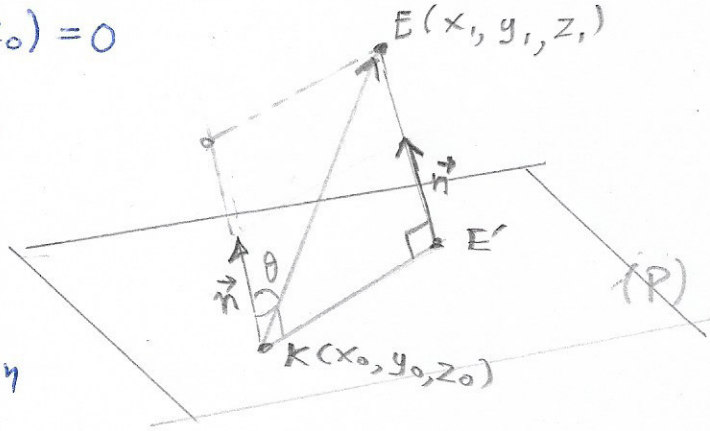
Εφαρμογή 4

Απόσταση σημείου από επίπεδο.

Δίνεται επίπεδο (P) με εξίσωση

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+\Gamma(z-z_0)=0$

και σημείο $E(x_1, y_1, z_1)$ του χώρου.



Θα βρούμε έναν τύπο για την απόσταση του σημείου E από το επίπεδο (P).

Θα δείξουμε συγκεκριμένα ότι:

$$\mathrm{dist}\,(E,(P)) = \frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+\Gamma(z_1-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

ή, ισοδύναμα, γράφοντας την εξίσωση του επιπέδου (P) στη μορφή: $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$,

$$\mathrm{dist}\,(E,(P)) = \frac{|Ax_1+By_1+\Gamma z_1+\Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}},$$

αφού $\Delta=-Ax_0-By_0-\Gamma z_0$, για οποιοδήποτε σημείο (x_0, y_0, z_0) του επιπέδου.

Απόδειξη

Θυμόμαστε ότι το $\vec{d} = (A, B, \Gamma)$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο (P), οπότε το $\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{d}\|}\vec{d}$, δηλαδή

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}\left(A\vec{i} + B\vec{j} + \Gamma\vec{k}\right),$$

είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα $(\|\vec{n}\|=1)$ κάθετο στο επίπεδο (P).

Έστω $K(x_0, y_0, z_0)$ σημείο του (P).
Ζητάμε το μήκος (EE'), όπου EE' το κάθετο τμήμα από το σημείο E προς το επίπεδο (P).

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $E'KE$, έχουμε ότι $(EE') = \|\vec{KE}\|\,|\cos\theta|$, όπου θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{KE}$ και $\vec{n}$, δηλαδή (EE') = το μήκος της προβολής του $\vec{KE}$ πάνω στο $\vec{n}$.
Αφού το $\vec{n}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, βλέπουμε ότι

$$(EE') = |\vec{KE}\cdot\vec{n}| = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}\left|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+\Gamma(z_1-z_0)\right|$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\operatorname{dist}(E,(P)) = \frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+\Gamma(z_1-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

ή

$$\operatorname{dist}(E,(P)) = \frac{|Ax_1+By_1+\Gamma z_1+\Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}},$$ αν

$(P):\ Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$.

Παράδειγμα

Βρείτε την απόσταση του σημείου $E(2,1,-1)$ από το επίπεδο

$$(p): \quad x - 2y + 2z + 5 = 0$$

Είναι:

$$dist(E,(p)) = \frac{|2 - 2\cdot 1 + 2(-1) + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{3}{3} = 1$$

Άσκηση

Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περιέχει τις ευθείες:

$$\vec{l}_1(t) = (0,1,-2) + t(2,3,-1)$$

και

$$\vec{l}_2(t) = (2,-1,0) + t(2,3,-1)$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι η διεύθυνση καθεμιάς από τις ευθείες l_1, l_2 δίνεται από το ίδιο διάνυσμα $\vec{v} = (2,3,-1)$.

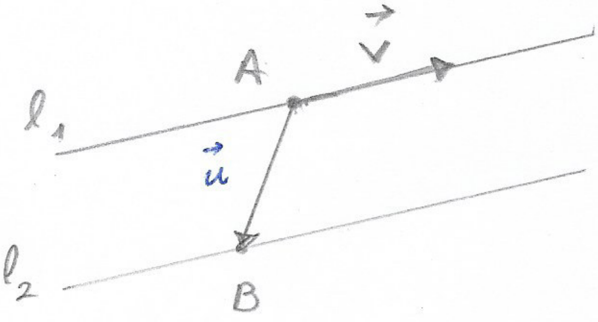
Επομένως οι ευθείες είτε συμπίπτουν είτε είναι παράλληλες. Για να δούμε ότι δεν συμπίπτουν, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το σημείο $A(0,1,-2)$ ανήκει στην l_1, αλλά όχι στην l_2 - αφού το σύστημα:

$0 = 2 + 2t, \quad 1 = -1 + 3t, \quad -2 = -t$ δεν έχει λύση.

Επομένως τα διανύσματα

$\vec{v} = (2, 3, -1)$ και

$\vec{u} = \vec{AB} = (2, -2, 2)$



παράγουν το επίπεδο
και, για να βρούμε την εξίσωση του, αρκεί να βρούμε ένα διάνυσμα κάθετο στα $\vec{u}, \vec{v}$.
Ένα τέτοιο είναι το $\vec{d} = \vec{u} \times \vec{v}$. Είναι

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = -4\vec{i} + 6\vec{j} + 10\vec{k}$$

Συμπεραίνουμε ότι το επίπεδο που ψάχνουμε έχει εξίσωση της μορφής

$$-4x + 6y + 10z + \Delta = 0,$$

και, αφού το $A(0, 1, -2)$ ανήκει σε αυτό, είναι

$$\Delta = 4 \cdot 0 - 6 \cdot 1 - 10 \cdot (-2) = 14$$

Τελικά, η εξίσωση του επιπέδου είναι:

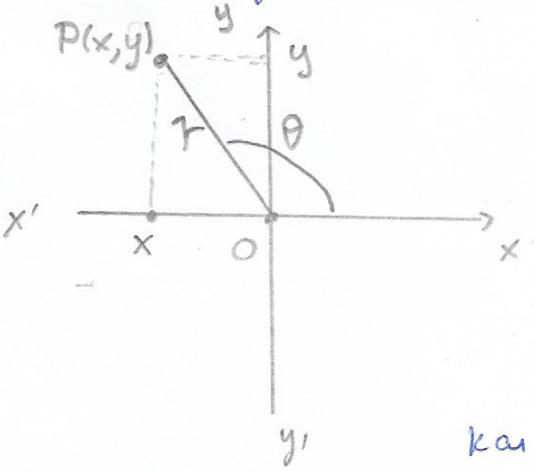
$$-4x + 6y + 10z + 14 = 0$$

Πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο

Ο πιο συνηθισμένος τρόπος αναπαράστασης ενός σημείου στον $\mathbb{R}^n$ είναι μέσω ορθογωνίων (καρτεσιανών) συντεταγμένων $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Στον $\mathbb{R}^2$ και στον $\mathbb{R}^3$ θα δούμε και εναλλακτικούς τρόπους αναπαράστασης που σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να είναι πολύ χρήσιμοι.

Στο επίπεδο ($\mathbb{R}^2$) θεωρούμε και πάλι τους Καρτεσιανούς άξονες με αρχή O. Ένα σημείο P διαφορετικό του O μπορεί να προσδιοριστεί αν γνωρίζουμε την απόστασή του r από το O και τη γωνία θ (με $0 \le \theta < 2\pi$) που διαγράφει ο θετικός ημιάξονας Ox όταν στρέφεται κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ακτίνα OP.



Οι (r, θ) με $r > 0$ και $0 \le \theta < 2\pi$ λέγονται <u>πολικές συντεταγμένες</u> του σημείου $P(x,y)$ και η σχέση μεταξύ αυτών και των καρτεσιανών δίνεται από τους τύπους:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

και, αντίστροφα,

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad \begin{pmatrix} \theta = \frac{\pi}{2}, \text{ αν } x=0, y>0 \\ \theta = \frac{3\pi}{2}, \text{ αν } x=0, y<0 \end{pmatrix}$$

Στο O δίνουμε πολικές συντεταγμένες $r=0$, $\theta=0$.

Παραδείγματα

1) Η εξίσωση $r = a$, όπου a θετική σταθερά, σε πολικές συντεταγμένες παριστάνει τον κύκλο κέντρου O και ακτίνας a.

2) Για να εκφράσουμε τον κύκλο κέντρου $K(0,3)$ και ακτίνας 3 σε πολικές συντεταγμένες ξεκινάμε με την εξίσωσή του σε καρτεσιανές:

$$x^2 + (y-3)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 6y = 0$$ θέτοντας $r = x^2 + y^2$, $y = r\sin\theta$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 - 6r\sin\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad r(r - 6\sin\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad r = 0 \quad ή \quad r = 6\sin\theta$$

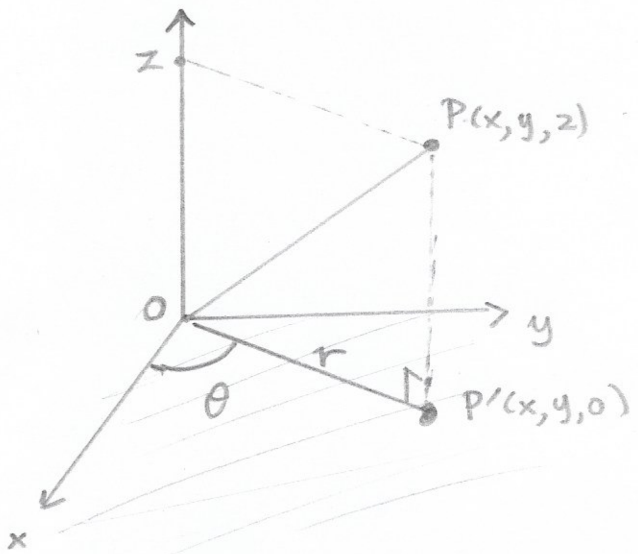
Τελικά, η εξίσωση αυτού του κύκλου σε πολικές συντεταγμένες είναι

$r = 6\sin\theta$ (που περιλαμβάνει και την περίπτωση $r=0$, $\theta=0$, δηλαδή το σημείο O).

Κυλινδρικές συντεταγμένες στον χώρο

Ενα σημείο $P(x,y,z)$ στον $\mathbb{R}^3$ προσδιορίζεται από τα r, θ, z όπου (r,θ) είναι οι πολικές συντεταγμένες της προβολής $P'(x,y)$ του P στο xy-επίπεδο.

Οι r, θ, z ονομάζονται **κυλινδρικές συντεταγμένες** του P.



Ισχύουν οι εξισώσεις:

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$

και, αντίστροφα

$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$

$\left(\begin{array}{l} \theta = \frac{\pi}{2}, \text{ αν } x=0, y>0 \\ \theta = \frac{3\pi}{2}, \text{ αν } x=0, y<0 \end{array} \right)$

Η εξίσωση $r = \alpha$ (όπου $\alpha > 0$ σταθερά), περιγράφει σε κυλινδρικές συντεταγμένες έναν κύλινδρο ακτίνας α με άξονα τον $z'z$.

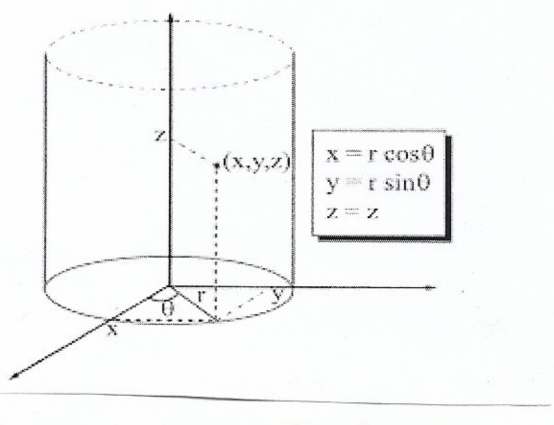
Παράδειγμα

(α) Βρείτε τις κυλινδρικές συντεταγμένες του σημείου $P(6,6,8)$.

Είναι $r = \sqrt{6^2+6^2} = 6\sqrt{2}$.

$\tan\theta = \frac{6}{6} \Rightarrow \tan\theta = 1$

και αφού το $(6,6)$ είναι στο 1ο τεταρτημόριο, είναι $\theta = \frac{\pi}{4}$. Αρα $(6\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 8)$ είναι οι κυλινδρικές συντεταγμένες του P.

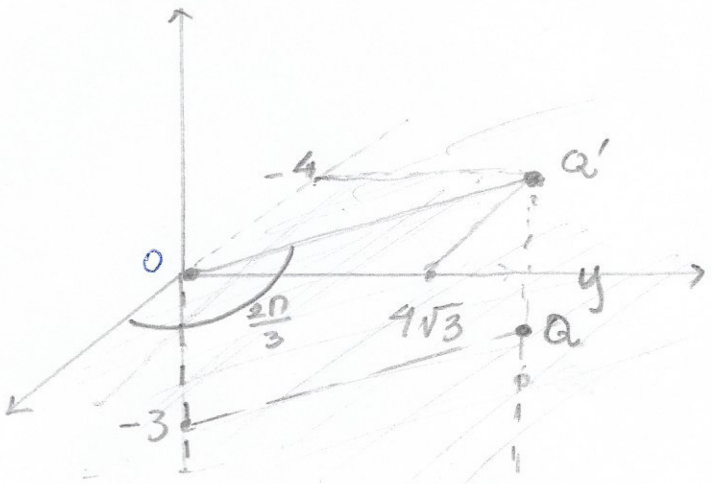


(β) Βρείτε τις Καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου Q που έχει κυλινδρικές συντεταγμένες $\left(8, \frac{2\pi}{3}, -3\right)$.

Είναι $x = r\cos\theta \Rightarrow x = 8\cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = -\frac{8}{2} \Rightarrow x = -4$

$y = r\sin\theta \Rightarrow y = 8\sin\frac{2\pi}{3} \Rightarrow y = \frac{8\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 4\sqrt{3}$

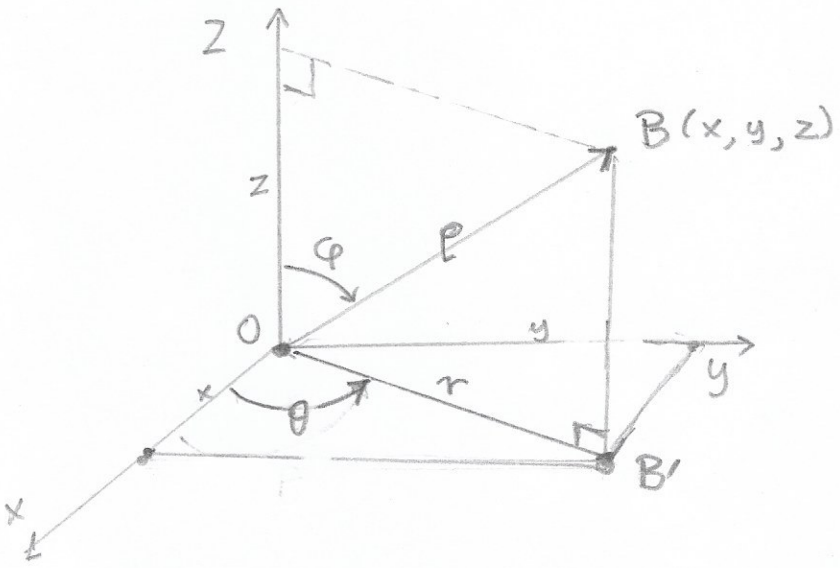
Άρα, σε Καρτεσιανές συντεταγμένες είναι $Q(-4, 4\sqrt{3}, -3)$.



$OQ' = 8$

Σφαιρικές συντεταγμένες στον χώρο

Ένας άλλος τρόπος να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου B στον χώρο είναι μέσω της απόστασης $\rho = OB$ του B από την αρχή των αξόνων, της γωνίας φ μεταξύ του διανύσματος $\vec{OB}$ και του ημιάξονα Oz (με $0 \leq \varphi \leq \pi$) και της γωνίας θ — που είναι ίδια με τη γωνία των κυλινδρικών συντεταγμένων:



$OB' = r = \rho \sin\varphi$

$z = \rho\cos\varphi$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

Οι ρ, θ, φ ονομάζονται σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου B.

Σχέσεις μεταξύ σφαιρικών και καρτεσιανών συντεταγμένων:

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta \quad , \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta \quad , \quad z = \rho\cos\varphi$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

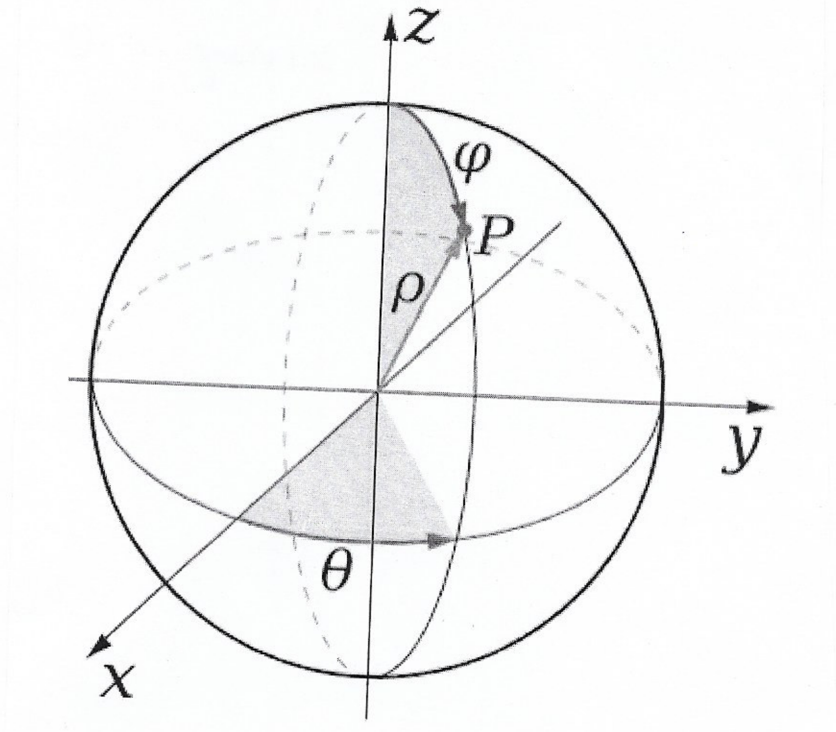
και

$$\rho \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq \pi .$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες η εξίσωση

$$\rho = \alpha \quad (\alpha \text{ θετική σταθερά})$$

παριστάνει τη σφαίρα κέντρου O και ακτίνας α.



Παρατηρήστε ότι οι γωνίες θ και φ αντιστοιχούν στο γεωγραφικό μήκος και πλάτος των σημείων στην επιφάνεια της Γης, με κάποιες διαφορές: Το γεωγραφικό μήκος δεν κυμαίνεται μεταξύ 0° και 360°, αλλά 0°-180° ανατολικά και 0°-180° δυτικά.

Το γεωγραφικό πλάτος δεν είναι η γωνία φ, αλλά η $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

Ασκήσεις

1. Περιγράψτε τη γεωμετρική σημασία των παρακάτω απεικονίσεων που δίνονται σε σφαιρικές συντεταγμένες.

(α) $(\rho, \theta, \varphi) \to (\rho, \theta+\pi, \varphi)$

(β) $(\rho, \theta, \varphi) \to (\rho, \theta, \pi-\varphi)$

(γ) $(\rho, \theta, \varphi) \to (2\rho, \theta+\frac{\pi}{2}, \varphi)$

2. (α) Περιγράψτε τις επιφάνειες $r=$ σταθερά, $\theta=$ σταθερά και $z=$ σταθερά στο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων.

(β) Περιγράψτε τις επιφάνειες $\rho=$ σταθερά, $\theta=$ σταθερά και $\varphi=$ σταθερά στο σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων.