Παραγώγιση

Όπως στην περίπτωση των συναρτήσεων μιας μεταβλητής, έτσι και στην περίπτωση των συναρτήσεων δύο ή περισσότερων μεταβλητών, διαισθητικά, συνεχείς είναι οι συναρτήσεις που το γράφημά τους δεν έχει «διακοπές».

Στην περίπτωση των συναρτήσεων μιας μεταβλητής η ύπαρξη παραγώγου είναι αυτή που εξασφαλίζει ότι το γράφημα δεν κάνει γωνίες ή πτυχές, είναι δηλαδή λείο.

Σκοπός μας σε αυτή την παράγραφο είναι να ορίσουμε την έννοια της παραγωγισιμότητας για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, έτσι ώστε αυτή να εξασφαλίζει και εδώ ότι το γράφημα θα είναι λείο.

Στην περίπτωση των δύο μεταβλητών ειδικότερα, αν δηλαδή $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, η ύπαρξη παραγώγου σε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in A$ θα σημαίνει ότι στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, το γράφημα της f θα έχει ένα καλά ορισμένο εφαπτόμενο επίπεδο.

Παρένθεση: Γραμμικές απεικονίσεις

Υπενθυμίζουμε κάποιες βασικές γνώσεις σχετικά με τις γραμμικές απεικονίσεις.

Ορισμός

Μία συνάρτηση $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται **γραμμική** αν ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$, για κάθε $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

(β) $T(\lambda\vec{x}) = \lambda T(\vec{x})$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Ιδιότητες

1) Για κάθε γραμμική συνάρτηση $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ισχύει $T(\vec{0}) = \vec{0}$.

2) Αν $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ με $T(\vec{x}) = (T_1(\vec{x}), \ldots, T_m(\vec{x}))$ $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, τότε:
Η T είναι γραμμική $\Longleftrightarrow$ Για κάθε $i = 1, \ldots, m$, η συνιστώσα συνάρτηση $T_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική

(Απόδειξη: Άσκηση)

Παραδείγματα

1) Οι γραμμικές συναρτήσεις $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ακριβώς οι συναρτήσεις της μορφής

$$T(x) = a\cdot x \quad , x \in \mathbb{R}$$

για κάποια σταθερά $a \in \mathbb{R}$,
δηλαδή οι συναρτήσεις των οποίων η γραφική παράσταση είναι ευθεία (μη κατακόρυφη) που διέρχεται από το $(0,0)$.

Απόδειξη

Το ότι μια απεικόνιση αυτής της μορφής είναι γραμμική ελέγχεται άμεσα.
Αντίστροφα: Αν η $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική, έστω $a = T(1)$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι
$T(x) = T(x\cdot 1) = x\cdot T(1) = a\cdot x$.

2) Οι γραμμικές συναρτήσεις $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι ακριβώς οι συναρτήσεις της μορφής

$$T(x,y) = a \cdot x + b \cdot y \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

για κάποιες σταθερές $a, b \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Το ότι οι απεικονίσεις αυτής της μορφής είναι γραμμικές ελέγχεται άμεσα.
Αντίστροφα, αν η $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική θέτουμε $a = T(\vec{e}_1)$ και $b = T(\vec{e}_2)$
(όπου $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$).
Τότε, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ είναι $(x,y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, οπότε

$$T(x,y) = T(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = xT(\vec{e}_1) + yT(\vec{e}_2) = ax + by.$$

Γενικεύοντας τα προηγούμενα παραδείγματα έχουμε:
Αν $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ γραμμική απεικόνιση, τότε θέτοντας $a_1 = T(\vec{e}_1)$, $a_2 = T(\vec{e}_2)$, ..., $a_n = T(\vec{e}_n)$, έχουμε:

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n ,$$

δηλαδή $T(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$ ή, με μορφή πινάκων, αν $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, τότε

$$T(\vec{x}) = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

δηλαδή $T(\vec{x}) = A\vec{x}$.
Λέμε ότι ο $1 \times n$ πίνακας A αναπαριστά τη γραμμική απεικόνιση T.

Αναπαράσταση μιας γραμμικής συνάρτησης από πίνακα

Γενικότερα, αν $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(T = (T_1, T_2, \dots, T_m))$ είναι μία γραμμική συνάρτηση, τότε θέτοντας

$$T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad T(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad T(\vec{e}_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

και $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, έχουμε

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (T_1(\vec{x}), \dots, T_m(\vec{x}))$$

$T(\vec{x}) = A\vec{x}$, για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Λέμε ότι ο $\overset{m \times n}{\text{πίνακας}}$ A αναπαριστά τη γραμμική απεικόνιση T.

Αντίστροφα, αν ο A είναι ένας $m \times n$ πίνακας η απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με $T(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ είναι γραμμική.

<u>Παράδειγμα</u> Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ορίζει την απεικόνιση $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T(x,y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x-y, \ x+y)$

Μία συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται Lipschitz συνεχής, αν υπάρχει σταθερά $k>0$, τέτοια ώστε, για κάθε $\vec{x}, \vec{y} \in A$, να ισχύει:

$$\| f(\vec{x}) - f(\vec{y}) \| \leq k \|\vec{x}-\vec{y}\|$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε Lipschitz συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής.

Πρόταση

Κάθε γραμμική συνάρτηση $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι Lipschitz συνεχής.

Απόδειξη

Το αποδεικνύουμε πρώτα για $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση.
Όπως είδαμε, αν $a_1 = T(\vec{e}_1), \ldots, a_n = T(\vec{e}_n)$, και $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ τότε

$$T(\vec{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \vec{a}\cdot\vec{x}.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε:

$$|T(\vec{x})| = |\vec{a}\cdot\vec{x}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{x}\|$$

και, λόγω γραμμικότητας, για κάθε $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$|T(\vec{x}) - T(\vec{y})| = |T(\vec{x}-\vec{y})| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{x}-\vec{y}\|.$$

Συμπεραίνουμε ότι η T είναι Lipschitz με σταθερά $k = \|\vec{a}\|$

Έστω τώρα $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική με $T = (T_1, T_2, \ldots, T_m)$. καθεμιά από τις συνιστώσες $T_1, T_2, \ldots, T_m$ είναι Lipschitz με σταθερές $k_1, k_2, \ldots, k_m$ αντίστοιχα. Τότε

Για κάθε $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\| T(\vec{x}-\vec{y}) \| = \| (T_1(\vec{x}-\vec{y}), T_2(\vec{x}-\vec{y}), \ldots, T_m(\vec{x}-\vec{y})) \|$$

$$= \sqrt{ | T_1(\vec{x}-\vec{y}) |^2 + | T_2(\vec{x}-\vec{y}) |^2 + \ldots + | T_m(\vec{x}-\vec{y}) |^2 }$$

$$\leq \sqrt{ K_1^2 \| \vec{x}-\vec{y} \|^2 + K_2 \| \vec{x}-\vec{y} \|^2 + \ldots K_m \| \vec{x}-\vec{y} \|^2 }$$

$$= \| \vec{x}-\vec{y} \| \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + \ldots + K_m^2}$$

Συμπεραίνουμε ότι η T είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά $K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + \ldots K_m^2}$.