

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

N. M. Μισυρλής

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών,
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εισαγωγή

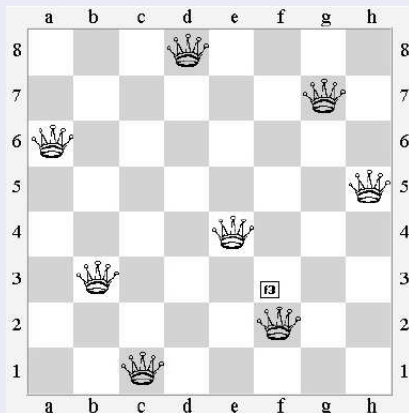
- Στις προηγούμενες ενότητες συναντήσαμε προβλήματα βελτιστοποίησης που δεν κατέστη δυνατό να βρούμε έναν αποδοτικό (πολυωνυμικό) αλγόριθμο που βρίσκει την βέλτιστη λύση οποιουδήποτε στιγμιοτύπου του προβλήματος.
- Μια ολόκληρη οικογένεια προβλημάτων, τα NP — δύσκολα προβλήματα, δεν έχει κατορθωθεί να βρεθεί αποδοτικός αλγόριθμος για κανένα από αυτά.
- Η μόνη αντιμετώπιση που είναι εφικτή για την εύρεση της βέλτιστης λύσης, είναι να απαριθμήσουμε όλες τις δυνατές λύσεις.
- Οι αλγόριθμοι αυτοί είναι κατά κανόνα εκθετικοί.

Το πρόβλημα των βασίλισσών

- Κλασσικό συνδυαστικό πρόβλημα.
- Θέλουμε να τοποθετήσουμε στην σκακιέρα 8 βασίλισσες, προσέχοντας να μην έχουμε συγκρούσεις.
- Καμία βασίλισσα δεν βρίσκεται στην ίδια γραμμή, στήλη ή διαγώνιο με κάποια άλλη.

Εξαντλητική Αναζήτηση

Μία λύση του προβλήματος των 8 βασίλισσων



Το πρόβλημα των βασιλισσών

- Θεωρούμε ότι η βασίλισσα k ($1 \leq k \leq N$), μπαίνει στο τετράγωνο (i_k, j_k) .
- Για κάθε συνδυασμό 2 βασιλισσών k_1, k_2 θα πρέπει να ισχύουν:
 - ▶ $i_{k_1} \neq i_{k_2}$: Οι βασίλισσες δεν βρίσκονται στην ίδια γραμμή.
 - ▶ $j_{k_1} \neq j_{k_2}$: Οι βασίλισσες δεν βρίσκονται στην ίδια στήλη.
 - ▶ $|i_{k_1} - i_{k_2}| \neq |j_{k_1} - j_{k_2}|$: Οι βασίλισσες δεν βρίσκονται στην ίδια διαγώνιο.
- Για να κατασκευάσουμε μία λύση του προβλήματος, ισχύει για κάθε k ($1 \leq k \leq N$) ότι $i_k = k$ και προσπαθούμε να βρούμε την στήλη της γραμμής στην οποία θα μπει η βασίλισσα.

Εξαντλητική Αναζήτηση

Αναδρομικός αλγόριθμος εύρεσης λύσης του προβλήματος των βασιλισσών

QUEENS (i : βασίλισσα)

1. **if** $i > N$ **then** /* N : αριθμός βασιλισσών */
2. τύπωσε την λύση
3. **else**
4. **for** $j = 1$ **to** N **do**
5. **if** COMPATIBLE (i, j) **then**
6. $pos[i] = j$
7. QUEENS ($i + 1$)
8. **end if**
9. **end for**
10. **end if**

Το πρόβλημα των βασιλισσών

- Σε κάθε αναδρομική κλήση προσπαθεί να τοποθετήσει την βασίλισσα i σε μία στήλη της γραμμής i που δεν δημιουργεί σύγκρουση με τις ήδη τοποθετημένες βασίλισσες $1, \dots, i - 1$.
- Ο έλεγχος της μη σύγκρουσης γίνεται με την συνάρτηση COMPATIBLE
- Η συνάρτηση Compatible ελέγχει τη σύγκρουση με τις ήδη τοποθετημένες βασίλισσες, όταν η i -η βασίλισσα τοποθετηθεί στο (i, j) τετράγωνο.

Εξαντλητική Αναζήτηση

Αναδρομικός αλγόριθμος εύρεσης λύσης του προβλήματος των βασιλισσών

COMPATIBLE (i, j)

1. $c = TRUE, k = 1$
2. **while** c **and** $k < i$ **do**
3. $c = \mathbf{not}$ CONFLICT ($i, j, k, pos[k]$)
4. $k = k + 1$
5. **end while**
6. return c

Εξαντλητική Αναζήτηση

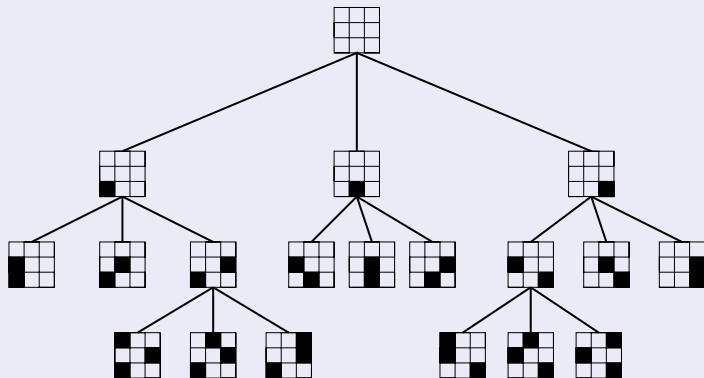
Αναδρομικός αλγόριθμος εύρεσης λύσης του προβλήματος των βασιλισσών

CONFLICT (i_1, j_1, i_2, j_2)

1. **if** $i_1 = i_2$ **or** $j_1 = j_2$ **or** $abs(i_1 - i_2) = abs(j_1 - j_2)$ **then**
2. return *TRUE*
3. **else** return *FALSE*

Εξαντλητική Αναζήτηση

Το δέντρο των αναδρομικών κλήσεων στο πρόβλημα των 3 βασιλισσών.



Το πρόβλημα των βασιλισσών

Στο δέντρο των αναδρομικών κλήσεων στο πρόβλημα των 3 βασιλισσών:

- Η αναζήτηση γίνεται σε μία πρώτα κατά βάθος λογική και σταματά όταν η τοποθέτηση της βασίλισσας δημιουργεί σύγκρουση με τις ήδη τοποθετημένες.
- Στις 3 βασίλισσες το πρόβλημα δεν έχει λύση.

Εξαντλητική Αναζήτηση

Το πρόβλημα των βασιλισσών

Στο δέντρο των αναδρομικών κλήσεων στο πρόβλημα των 3 βασιλισσών:

- Η αναζήτηση της λύσης γίνεται σε μία πρώτα κατά βάθος λογική.
- Όταν δεν μπορεί να ευρεθεί θέση για την i -οστή βασίλισσα (ολοκληρώνονται οι αναδρομικές κλήσεις $\text{COMPATIBLE}(i, j)$ με $1 \leq j \leq N$), ο έλεγχος επιστρέφεται στην $(i - 1)$ -οστή βασίλισσα και γίνεται τοποθέτηση της στην επόμενη θέση.
- Αυτή η διαδικασία ονομάζεται οπισθοδρόμηση (backtracking).
- Η διαδικασία αυτή είναι εκθετική (άσκηση).

Το πρόβλημα των βασιλισσών

Στο δέντρο των αναδρομικών κλήσεων στο πρόβλημα των 3 βασιλισσών:

- Το πρόβλημα εύρεσης του μέγιστου πλήθους κόμβων ενός γράφου που δεν συνδέονται μεταξύ τους, είναι ένα πολύ γνωστό πρόβλημα της συνδυαστικής βελτιστοποίησης, γνωστό και ως πρόβλημα του Ανεξαρτήτου Υποσυνόλου.
- Το πρόβλημα είναι NP -δύσκολο.
- Αν όμως ο γράφος είναι χορδικός (chordal), ή διαστημάτων (interval), τότε μπορούμε να σχεδιάσουμε αποδοτικό (πολυωνυμικό) αλγόριθμο.

Το πρόβλημα των βασιλισσών

Στο δέντρο των αναδρομικών κλήσεων στο πρόβλημα των 3 βασιλισσών:

- Το πρόβλημα εύρεσης του μέγιστου πλήθους κόμβων ενός γράφου που δεν συνδέονται μεταξύ τους, είναι ένα πολύ γνωστό πρόβλημα της συνδυαστικής βελτιστοποίησης, γνωστό και ως πρόβλημα του Ανεξαρτήτου Υποσυνόλου.
- Το πρόβλημα είναι NP -δύσκολο.
- Αν όμως ο γράφος είναι χορδικός (chordal), ή διαστημάτων (interval), τότε μπορούμε να σχεδιάσουμε αποδοτικό (πολυωνυμικό) αλγόριθμο.