Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Ν. Μ. Μισυρλής

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών,
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Μέγιστη Κοινή Υπακολουθία

Ορισμοί

Ορισμός 1: Μια ακολουθία $Z =< z_1, z_2, \ldots, z_k >$ αποτελεί *υπακολουθία* μιας δεδομένης ακολουθίας $X =< x_1, x_2, \ldots, x_m >$ εάν υπάρχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $< i_1, i_2, \ldots, i_k >$ από αύξοντες αριθμούς στοιχείων της X τέτοια ώστε για όλα τα $j = 1, 2, \ldots, k$ να ισχύει $x_{i_j} = z_j$.

Παράδειγμα

Η $Z =< B, C, D, B >$ είναι μια υπακολουθία της $X =< A, B, C, B, D, A, B >$, με αντίστοιχη ακολουθία αυξόντων αριθμών $< 2, 3, 5, 7 >$.

Ορισμός 2: Για δυο δεδομένες ακολουθίες $X \text{ και } Y$, λέμε ότι μια ακολουθία Z είναι *κοινή υπακολουθία* των $X \text{ και } Y$ εάν είναι υπακολουθία τόσο της $Q \text{ όσο και της } Y$.

Παράδειγμα

Εάν $X =< A, B, C, B, D, A, B >$ και $Y =< B, D, C, A, B, A >$, η ακολουθία $< B, C, A >$ είναι μια κοινή υπακολουθία των $X \text{ και } Y$.

Μέγιστη Κοινή Υπακολουθία

Πρόβλημα

Στο *πρόβλημα της μέγιστης υπακολουθίας* μας δίνονται δύο ακολουθίες $X =< x_1, x_2, \ldots, x_m >$ και $Y =< y_1, y_2, \ldots, y_n >$ και ζητείται να βρεθεί μια μέγιστου μήκους κοινή υπακολουθία των X και Y.

Επίλυση Προβλήματος Μέγιστης Κοινής Υπακολουθίας

Βήμα 1: Χαρακτηρισμός μια Μέγιστης Κοινής Υπακολουθίας

- Το πρόβλημα της ΜΚΥ διαθέτει την ιδιότητα της βέλτιστης υποδομής.
- Για μια δεδομένη ακολουθία $X =< x_1, x_2, \ldots, x_m >$, ορίζουμε την $i - \text{οστή}$ *προθηματική υπακολουθία της X*, για $i = 0, 1, \ldots, m$, ως την υπακολουθία $X_i =< x_1, x_2, \ldots, x_i >$.

  Παράδειγμα

  Εάν $X =< A, B, C, B, D, A, B >$, τότε $X_4 =< A, B, C, B >$ και η X_0 είναι η κενή ακολουθία.

Τηεορεμ

Έστω δυο ακολουθίες $X =< x_1, x_2, \ldots, x_m >$ $\textit{και}$ $Y =< y_1, y_2, \ldots, y_n >$, και έστω $Z =< z_1, z_2, \ldots, z_k >$ οποιαδήποτε ΜΚΥ των X $\textit{και}$ Y.

1. Εάν $x_m = y_n$ τότε $z_k = x_m = y_n$ και η Z_{k-1} είναι μια ΜΚΥ των X_{m-1} $\textit{και}$ Y_{n-1}.

2. Εάν $x_m \neq y_n$ $\textit{και}$ $z_k \neq x_m$, έπεται ότι η Z είναι μια ΜΚΥ των X_{m-1} $\textit{και}$ Y.

3. Εάν $x_m \neq y_n$ $\textit{και}$ $z_k \neq y_n$, έπεται ότι η Z είναι μια ΜΚΥ των X $\textit{και}$ Y_{n-1}.

Επίλυση Προβλήματος Μέγιστης Κοινής Υπακολουθίας

Βήμα 1: Χαρακτηρισμός μια Μέγιστης Κοινής Υπακολουθίας

Απόδειξη.

1. - Εάν $z_k \neq x_m$, τότε προσαρτώντας το στοιχείο $x_m = y_n$ στην Z προκύπτει μια κοινή υπακολουθία των X και Y με μήκος $= k + 1$, το οποίο αντιφάσκει στην υπόθεση μας ότι η Z είναι μια ΜΚΥ των X και Y. Συνεπώς πρέπει $z_k = x_m = y_n$.
   - Επιπλέον, η Z_{k-1} είναι μια κοινή υπακολουθία των X_{m-1} και Y_{n-1} με μήκος $= k - 1$. Θέλουμε να δείξουμε ότι είναι μια ΜΚΥ. Έστω ότι δεν ισχύει, υπάρχει δηλαδή μια κοινή υπακολουθία W των X_{m-1} και Y_{n-1} με μήκος $> k - 1$. Αν προσαρτήσουμε στην W το στοιχείο $x_m = y_n$ παίρνουμε μια κοινή υπακολουθία των X και Y με μήκος $> k$, άτοπο.
2. Αν $z_k \neq x_m$ τότε η Z είναι μια κοινή υπακολουθία των X_{m-1} και Y. Εάν υπήρχε κοινή υπακολουθία W των X_{m-1} και Y με μήκος $> k$, τότε η W θα ήταν επίσης κοινή υπακολουθία των X_m και Y, το οποίο αντιφάσκει με την υπόθεση ότι η Z είναι ΜΚΥ των X και Y.
3. Ανάλογα με την (2).

Επίλυση Προβλήματος Μέγιστης Κοινής Υπακολουθίας

Βήμα 1: Χαρακτηρισμός μια Μέγιστης Κοινής Υπακολουθίας

- Από τις προτάσεις του θεωρήματος έπεται ότι μια ΜΚΥ δυο ακολουθιών εμπεριέχει μια ΜΚΥ προθηματικών υπακολουθιών των δύο αρχικών ακολουθιών.
- Το πρόβλημα της ΜΚΥ παρουσιάζει βέλτιστη υποδομή.
- Μια αναδρομική λύση αυτού του προβλήματος έχει επίσης την ιδιότητα της επικάλυψης των υποπροβλημάτων.

Επίλυση Προβλήματος Μέγιστης Κοινής Υπακολουθίας

Βήμα 2: Μια Αναδρομική Λύση

- Από το παραπάνω Θεώρημα προκύπτει ότι για να προσδιορίσουμε κάποια ΜΚΥ των $X =< x_1, x_2, \ldots, x_m >$ και $Y =< y_1, y_2, \ldots, y_n >$ θα πρέπει να εξετάσουμε δυο υποπροβλήματα.
  - Αν $x_m = y_n$, πρέπει να βρούμε μια ΜΚΥ των X_{m-1} και Y_{n-1}. Προσαρτώντας σε αυτήν το $x_m = y_n$ παίρνουμε μια ΜΚΥ των X και Y.
  - Αν $x_m \neq y_n$ θα πρέπει να λύσουμε δύο υποπροβλήματα: την εύρεση μιας ΜΚΥ των X_{m-1} και Y και την εύρεση μιας ΜΚΥ των X και Y_{n-1}. Η μεγαλύτερη από αυτές τις δύο ΜΚΥ είναι μια ΜΚΥ των X και Y.
- Η ύπαρξη της ιδιότητας της επικάλυψης υποπροβλημάτων στο πρόβλημα της ΜΚΥ μπορεί να δειχθεί πολύ εύκολα.
  - Για να βρούμε τις ΜΚΥ των X και Y, θα χρειαστεί ενδεχομένως να βρούμε τις ΜΚΥ των X και Y_{n-1} και των X_{m-1} και Y.
  - Καθένα από αυτά τα υποπροβλήματα, όμως, έχει ως υποπρόβλημα την εύρεση της ΜΚΥ των X_{m-1} και Y_{n-1}.
  - Σε πολλά άλλα υποπροβλήματα εμφανίζονται κοινά υπο-υποπροβλήματα.

Επίλυση Προβλήματος Μέγιστης Κοινής Υπακολουθίας

Βήμα 2: Μια Αναδρομική Λύση

- Έστω $c[i,j]$ το μήκος μιας ΜΚΥ των ακολουθιών X_i και Y_j.
- Εάν έχουμε $i = 0$ ή $j = 0$, τότε μια από τις ακολουθίες έχει μήκος 0, και κατά συνέπεια η ΜΚΥ έχει μήκος επίσης 0.
- Με βάση τη βέλτιστη υποδομή του προβλήματος της ΜΚΥ, προκύπτει η εξής αναδρομική σχέση:

$$c[i,j] = \begin{cases} 0, & \text{εάν } i = 0 \text{ ή } j = 0, \\ c[i-1,j-1]+1, & \text{εάν } i,j > 0 \text{ και } x_i = y_j, \\ max\left(c[i,j-1], c[i-1,j]\right), & \text{εάν } i,j > 0 \text{ και } x_i \neq y_j. \end{cases}$$

Αναδρομικός Αλγόριθμος

```
MKY(x,y,i,j)
```

/∗Αγνοούμε την κατάσταση διακοπής $i = j = 0$ ∗/

```
   if x[i]=y[j]  then
      c[i,j]=MKY(x,y,i-1,j-1)
   else
      c[i,j]=max{MKY(x,y,i-1,j),MKY(x,y,i,j-1)}
   return c
```

Επίλυση Προβλήματος Μέγιστης Κοινής Υπακολουθίας

Βήμα 3: Υπολογισμός του Μήκους μιας ΜΚΥ

Η χειρότερη περίπτωση είναι $x[i] \neq y[j]$.

Η αναδρομική σχέση της πολυπλοκότητας είναι:

$$\begin{aligned}
T(m,n) &\geq T(m,n-1) + T(m-1,n) \\
&\geq [T(m,n-2) + T(m-1,n-1)] + \\
&\qquad\qquad [T(m-1,n-1) + T(m-2,n-1)] \\
T(m,n) &\geq 2T(m-1,n-1)
\end{aligned}$$

$$\text{Αν } m \geq n$$

$$\begin{aligned}
T(m,n) &\geq 2^2 T(m-2,n-2) \\
&\vdots \\
&\geq 2^m T(0,0) \\
&\geq 2^m
\end{aligned}$$

$$\text{Αν } n \geq m \quad \rightsquigarrow \quad T(m,n) \geq 2^n$$

Επίλυση Προβλήματος Μέγιστης Κοινής Υπακολουθίας

Βήμα 3: Υπολογισμός του Μήκους μιας ΜΚΥ

- Ωστόσο, επειδή υπάρχουν μόνο $\Theta(mn)$ διαφορετικά υποπροβλήματα, υπολογίζουμε τις λύσεις αναβιβαστικά μέσω δυναμικού προγραμματισμού.
- Η διαδικασία ΜΗΚΟΣ ΜΚΥ που ακολουθεί
  - δέχεται ως είσοδο δύο ακολουθίες $X =< x_1, x_2, \ldots, x_m >$ και $Y =< y_1, y_2, \ldots, y_n >$.
  - Ο αλγόριθμος υπολογίζει τις τιμές των $c[i, j]$, τις οποίες και αποθηκεύει σε έναν πίνακα $c[0 \ldots m, 0 \ldots n]$. Ο υπολογισμός των στοιχείων γίνεται κατ' αύξουσα σειρά γραμμής του πίνακα από τα αριστερά προς τα δεξιά.
  - Η διαδικασία τηρεί επίσης τον πίνακα $b[1 \ldots m, 1 \ldots n]$, για την κατασκευή μιας βέλτιστης λύσης. Το "βέλος" $b[i, j]$ δείχνει προς το στοιχείο πίνακα το οποίο αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση του υποπροβλήματος που επιλέχθηκε στον υπολογισμό του $c[i, j]$.
  - Η διαδικασία επιστρέφει τους πίνακες b και c. Το στοιχείο $c[m, n]$ περιέχει το μήκος μιας ΜΚΥ των X και Y.

Επίλυση Προβλήματος Μέγιστης Κοινής Υπακολουθίας

Βήμα 3: Υπολογισμός του Μήκους μιας ΜΚΥ

Μηκος ΜΚΥ(X, Y)

$m \leftarrow$ μήκος$[X]$
$n \leftarrow$ μήκος$[Y]$
για $i \leftarrow 1$ έως m
    $c[i, 0] \leftarrow 0$
για $j \leftarrow 0$ έως n
    $c[0, j] \leftarrow 0$
για $i \leftarrow 1$ έως m
    για $j \leftarrow 1$ έως n
        αν $x_i = y_j$
            τότε $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j-1] + 1$
                $b[i, j] \leftarrow '\nwarrow'$

Επίλυση Προβλήματος Μέγιστης Κοινής Υπακολουθίας

Βήμα 3: Υπολογισμός του Μήκους μιας ΜΚΥ

αλλιώς αν $c[i-1,j] \geq c[i,j-1]$
τότε $c[i,j] \leftarrow c[i-1,j]$
$b[i,j] \leftarrow '\uparrow'$
αλλιώς $c[i,j] \leftarrow c[i,j-1]$
$b[i,j] \leftarrow '\leftarrow'$
επιστροφή c και b

Επίλυση Προβλήματος Μέγιστης Κοινής Υπακολουθίας

Βήμα 4: Κατασκευή μιας ΜΚΥ

- Ξεκινώντας από το στοιχείο $b[m, n]$, διατρέχουμε απλώς τον πίνακα ακολουθώντας τα βέλη.
- Κάθε βέλος $\nwarrow$" που συναντούμε στο πίνακα $b[i, j]$ σημαίνει ότι το στοιχείο $x_i = y_j$ ανήκει στη ΜΚΥ.
- Με τη μέθοδο αυτή, τα στοιχεία της ΜΚΥ συναντώνται με αντίστροφη σειρά.

Επίλυση Προβλήματος Μέγιστης Κοινής Υπακολουθίας

Βήμα 4: Κατασκευή μιας ΜΚΥ

Εκτυπωση ΜΚΥ(b, Q, i, j)

αν $i = 0$ ή $j = 0$

  τότε επιστροφή

αν $b[i, j] = '\nwarrow'$

  Εκτυπωση ΜΚΥ$(b, Q, i-1, j-1)$

  εκτύπωση x_i

αλλιώς αν $b[i, j] = '\uparrow'$

  τότε Εκτυπωση ΜΚΥ$(b, Q, i-1, j)$

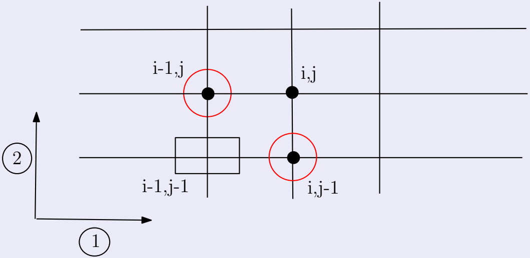
αλλιώς Εκτυπωση ΜΚΥ$(b, Q, i, j-1)$

Μη Αναδρομικός Αλγόριθμος

Χρόνος $O(mn)$

Χώρος $O(mn)$

4. Κατασκευή λύσης



Μη Αναδρομικός Αλγόριθμος

i	j $\longrightarrow$	0	1	2	3	4	5	6
$\downarrow$		$y_j \longrightarrow$	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	0	0	0	1	1	1
2	B	0	1	1	1	1	2	2
3	C	0	1	1	2	2	2	2
4	B	0	1	1	2	2	3	3
5	D	0	1	2	2	2	3	3
6	A	0	1	2	2	3	3	4
7	B	0	1	2	2	3	4	4