Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Ν. Μ. Μισυρλής

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών,
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αναπαραστάσεις γραφημάτων

Κατάλογοι και πίνακες γειτνίασης

Υπάρχουν δυο καθιερωμένοι τρόποι αναπαράστασης ενός γραφήματος $G = (V, E)$: υπό τη μορφή μιας συλλογής από καταλόγους γειτνίασης ή υπό τη μορφή ενός πίνακα γειτνίασης.

- Η αναπαράστασή μέσω καταλόγων γειτνίασης για πυκνή αναπαράσταση αραιών γραφημάτων $|E| \ll |V|^2$.
- Αν το γράφημα είναι πυκνό $|E| \sim |V|^2$ τότε αναπαράσταση μέσω πίνακα γειτνίασης.

Αναπαραστάσεις γραφημάτων

Κατάλογοι γειτνίασης

Η αναπαράσταση μέσω καταλόγων γειτνίασης ενός γραφήματος $G = (V, E)$.

- Εάν το γράφημα G είναι κατευθυντό, το άθροισμα των μηκών όλων των καταλόγων γειτνίασης ισούται με $|E|$.
- Εάν το G είναι ακατεύθυντο, το αντίστοιχο άθροισμα των μηκών είναι $2|E|$.
- Για τα κατευθυντά όσο και για τα ακατεύθυντα γραφήματα, για την αναπαράσταση μέσω καταλόγων γειτνίασης η απαιτούμενη μνήμη είναι $\Theta(V + E)$.

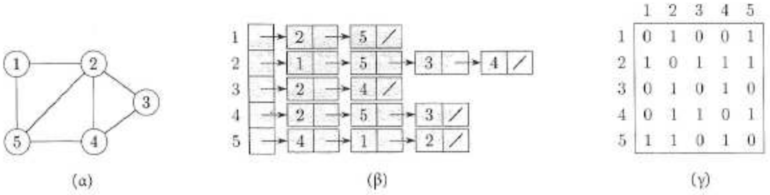
Έστω $G = (V, E)$ ένα εμβαρές γράφημα με συνάρτηση βάρους w. Το βάρος $w(u, v)$ της ακμής $(u, v) \in E$ μπορεί να αποθηκευτεί μαζί με το κόμβο v στον κατάλογο γειτνίασης του u.

Αναπαραστάσεις γραφημάτων

Πίνακες γειτνίασης

Αναπαράσταση μέσω πίνακα γειτνίασης ενός γραφήματος $G = (V, E)$.

Σχήμα: Ακατεύθυντο γράφημα



(α) Ακατεύθυντο γράφημα G.

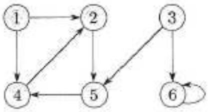
(β) Κατάλογος γειτνίασης του G.

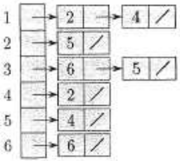
(γ) Πίνακας γειτνίασης του G.

Αναπαράσταση γραφημάτων

Όταν το γράφημα είναι ακατεύθυντο ο πίνακας γειτνίασης A συμπίπτει με τον ανάστροφο $A = A^T$.

Σχήμα: Κατευθυντό γράφημα





	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

Αναπαράσταση γραφημάτων

- Ο πίνακας γειτνίασης ενός γραφήματος απαιτεί μνήμη $\Theta(V^2)$, ανεξάρτητα από το πλήθος των ακμών του γραφήματος.
- Εάν $G = (V, E)$ ένα εμβαρές γράφημα με συνάρτηση βάρους ακμών w, το βάρος $w(u, v)$ της ακμής $(u, v) \in E$ αποθηκευεται απλώς ως στοιχείο της γραμμής u και της στήλης v του πίνακα γειτνίασης.
- Όταν τα γραφήματα είναι αρκετά μικρά, ο πίνακας γειτνίασης είναι προτιμότερος λόγω της απλότητας του.
- Εάν το γράφημα είναι αβαρές, η αναπαράσταση μέσω πίνακα γειτνίασης προσφέρει ένα επιπρόσθετο πλεονέκτημα όσον αφορά τον αποθηκευτικό χώρο: αντί να χρησιμοποιείται μια λέξη για κάθε στοιχείο του πίνακα αυτού, χρησιμοποιείται μόνο ένα δυφίο ανά στοιχείο.

Οριζόντια διερεύνηση

Οριζόντια διερεύνηση

Για δεδομένο γράφημα $G = (V, E)$ και έναν δεδομένο αφετηριακό κόμβο s.

- Η οριζόντια διερεύνηση συνίσταται στη συστηματική εξέταση των ακμών του G ώστε να ``εντοπιστούν όλοι οι κόμβοι που είναι προσπελάσιμοι από τον s''.
- Υπολογίζεται η απόσταση (το μικρότερο πλήθος ακμών) ανάμεσα στον s και σε κάθε προσπελάσιμο κόμβο.
- Δημιουργείται επίσης ένα ``οριζόντιο δένδρο'' με ριζικό κόμβο τον s, το οποίο περιέχει όλους τους προσπελάσιμος κόμβους.
- Ο αλγόριθμος μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε κατευθυντά όσο και σε ακατεύθυντα γραφήματα.

Οριζόντια διερεύνηση

- Ο αλγόριθμος εντοπίζει πρώτα όλους τους κόμβους σε απόσταση k από τον s, και μόνο αφού εξαντλήσει αυτούς τους κόμβους προχωρά στον εντοπισμό κόμβων σε απόσταση $k + 1$.
- Ο αλγόριθμος χρωματίζει κάθε κόμβο λευκό, γκρίζο ή μελανό. Αρχικά, όλοι οι κόμβοι είναι λευκοί, και κατόπιν πιθανόν να χρωματιστούν γκρίζοι και στη συνέχεια μελανοί.
- Ένας κόμβος θεωρείται εντοπισμένος την πρώτη φορά που συναντάται στη διάρκεια της διερεύνησης, οπότε και καθίσταται μη λευκός.
- Όλοι οι κόμβοι που γειτνιάζουν με μελανούς είναι εντοπισμένοι. Ορισμένοι από τους κόμβους που γειτνιάζουν με γκρίζους είναι δυνατόν να είναι λευκοί.
- Οι γκρίζοι κόμβοι αντιπροσωπεύουν το σύνορο μεταξύ εντοπισμένων και μη εντοπισμένων κόμβων.

Οριζόντια διερεύνηση

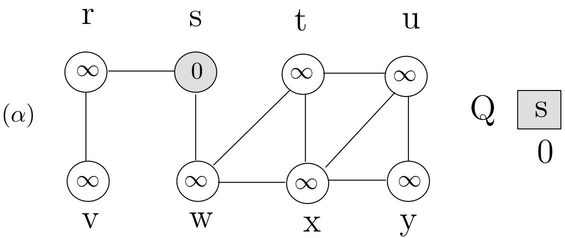
Οριζοντια Διερευνηση

- Η διαδικασία Οριζοντια Διερευνηση προϋποθέτει ότι το γράφημα εισόδου $G = (V, E)$ αναπαριστάται μέσω καταλόγων γειτνίασης.
- Το χρώμα του κάθε κόμβου $u \in V$ καταχωρίζεται στην μεταβλητή $\textit{χρώμα}[u]$, ο προκάτοχος του u καθορίζεται στην μεταβλητή $\pi[u]$.
- Η απόσταση από τον αφετηριακό κόμβο s μέχρι τον u, την οποία υπολογίζει ο αλγόριθμος, καταχωρίζεται στη μεταβλητή $d[u]$.
- Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί επίσης μια ουρά FIFO Q για τη διαχείριση του συνόλου των γκρίζων κόμβων.

Οριζόντια διερεύνηση

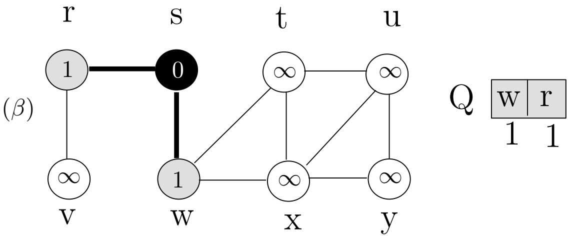
```
ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ(G, s)
για κάθε κόμβο u ∈ V[G] − {s}
            χρώμα[u] ← ΛΕΥΚΟ
            d[u] ← ∞
            π[u] ← ΚΕΝΟ
χρώμα[s] ← ΓΚΡΙΖΟ
d[s] ← 0
π[s] ← ΚΕΝΟ
Q ← ∅
ΠΡΟΣΘΗΚΗ(Q, s)
ενόσω Q ≠ ∅
            u ← ΑΦΑΙΡΕΣΗ(Q)        O(1)
            για κάθε v ∈ Adj[u]
                        αν χρώμα[v] = ΛΕΥΚΟ
                           τότε   χρώμα[v] ← ΓΚΡΙΖΟ
                                  d[v] ← d[u] + 1
                                  π[v] ← u
                                  ΠΡΟΣΘΗΚΗ(Q, v)      O(1)
            χρώμα[u] ← ΜΕΛΑΝΟ
```

Οριζόντια διερεύνηση



Σχήμα: Οριζόντια

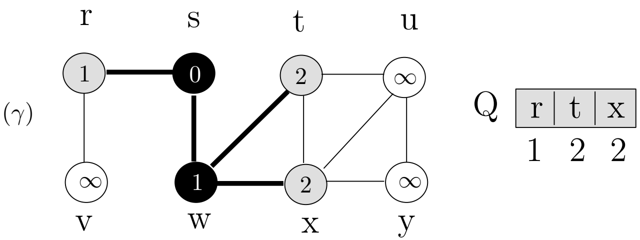
Οριζόντια διερεύνηση



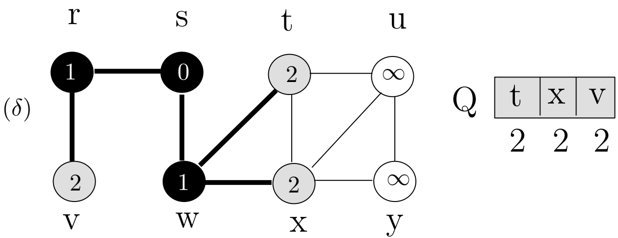
Σχήμα: Οριζόντια

Οριζόντια διερεύνηση

Σχήμα: Οριζόντια

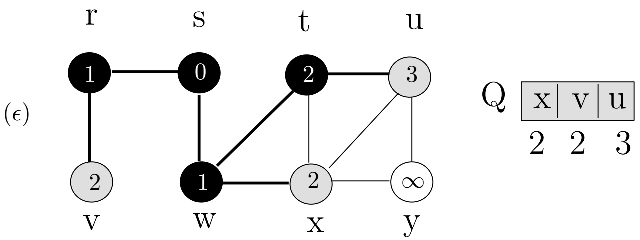


Οριζόντια διερεύνηση



Σχήμα: Οριζόντια

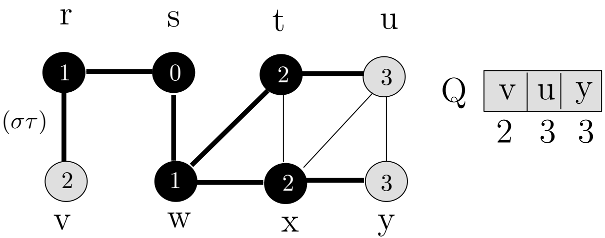
Οριζόντια διερεύνηση



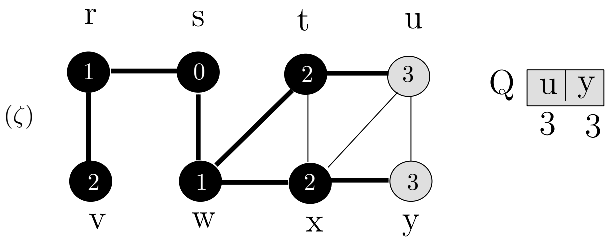
Σχήμα: Οριζόντια

Οριζόντια διερεύνηση

Σχήμα: Οριζόντια

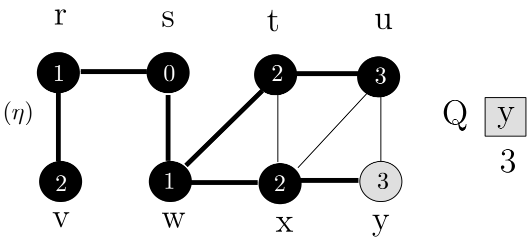


Οριζόντια διερεύνηση



Σχήμα: Οριζόντια

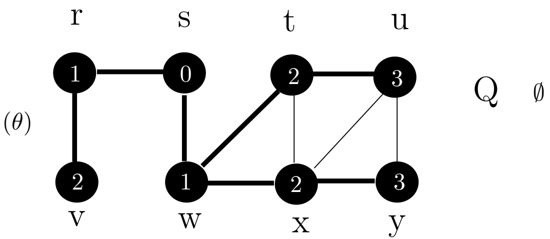
Οριζόντια διερεύνηση



Σχήμα: Οριζόντια

Οριζόντια διερεύνηση

Σχήμα: Οριζόντια



Οριζόντια διερεύνηση

- Οι σκιασμένες ακμές αναπαριστούν τις ακμές του δένδρου.
- Εντός του κάθε κόμβου u αναγράφεται η απόσταση $d[u]$.
- Κάτω από τους κόμβους της ουράς αναγράφονται οι αποστάσεις των κόμβων από τον αφετηριακό κόμβο.

- Ο βρόχος ενόσω στις γραμμές 10-18 επαναλαμβάνεται εφόσον υπάρχουν εναπομένοντες γκρίζοι κόμβοι.
- Ο βρόχος αυτός τηρεί την εξής αναλλοίωτη συνθήκη:
  Στον έλεγχο της γραμμής 10, η ουρά Q αποτελείται από το σύνολο των γκρίζων κόμβων.

- Τα αποτελέσματα της Οριζόντιας διερεύνησης είναι πιθανόν να εξαρτώνται από τη σειρά με την οποία εξετάζονται οι γείτονες ενός δεδομένου κόμβου στη γραμμή 12.
- Το τελικό οριζόντιο δένδρο μπορεί να ποικίλλει, αλλά οι αποστάσεις d που υπολογίζονται από τον αλγόριθμο θα είναι πάντοτε ίδιες.

Οριζόντια διερεύνηση

Ανάλυση

- Ο συνολικός χρόνος που αναλώνεται στις πράξεις ουράς είναι $O(V)$.
- Το άθροισμα των μηκών όλων των καταλόγων γειτνίασης είναι $\Theta(E)$.
- Η επιβάρυνση από την απόδοση αρχικών τιμών είναι $O(V)$.
- Ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης της Οριζοντιας Διερευνησης είναι $O(V + E)$.
- Επομένως, η Οριζοντια Διερευνηση έχει γραμμικό χρόνο εκτέλεσης ως προς το μέγεθος της αναπαράστασης του G μέσω καταλόγων γειτνίασης.

Βραχύτατες διαδρομές

Ορισμός

Ορίζουμε ως **μήκος βραχύτατης διαδρομής** $\delta(s, v)$ από τον κόμβο s μέχρι τον κόμβο v το ελάχιστο πλήθος ακμών σε όλες τις διαδρομές από τον s μέχρι τον u. Εάν δεν υπάρχει καμία τέτοια διαδρομή, τότε $\delta(s, v) = \infty$

Λήμμα

Έστω $G = (V, E)$ και $s \in V$. $\forall (u, v) \in E$

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$$

Βραχύτατες διαδρομές

Ορθότητα Οριζοντιας Διερευνησης

- Θέλουμε να δείξουμε ότι η Οριζοντια Διερευνηση υπολογίζει ορθά την ποσότητα $d[v] = \delta(s, v)$ για κάθε κόμβο $v \in V$.
- Θα δείξουμε αρχικά ότι η $d[v]$ αποτελεί άνω φράγμα της $\delta(s, v)$.

Βραχύτατες διαδρομές

Λήμμα

Έστω $G = (V, E)$, κατά τον τερματισμό της Οριζοντιας Διερευνησης

$$d[v] \geq \delta(s, v), \forall v \in V.$$

Αποδειξη

Το Λήμμα αποδεικνύεται με επαγωγή ως προς το πλήθος των πράξεων της Προσθηκης.

Βάση: $d[s] = 0 = \delta(s, s)$ και $d[v] = \infty \geq \delta(s, v)$ για όλους τους κόμβους $v \in V - \{s\}$.

Επαγωγικό βήμα: θεωρούμε έναν λευκό κόμβο v ο οποίος εντοπίζεται κατά την διερεύνηση από ένα κόμβο u

$$\begin{aligned} d[v] &= d[u] + 1 && \text{(λόγω της 15)} \\ &\geq \delta(s, u) + 1 && \text{(επαγωγική υπόθεση)} \\ &\geq \delta(s, v). && \text{(λόγω Λήμμα)} \end{aligned}$$

Βραχύτατες διαδρομές

Απόδειξη ότι $d[v] = \delta(s, v)$.

Λήμμα

Η ουρά Q περιέχει τους κόμβους $\langle v_1, v_2, .., v_r \rangle$ τότε $d[v_r] \leq d[v_1] + 1$ και $d[v_i] \leq d[v_{i+1}]$ για $i = 1, 2, .., r - 1$.

Απόδειξη

- Το Λήμμα αποδεικνύεται με επαγωγή ως προς το πλήθος των πράξεων της ουράς.
- **Βάση:** Όταν η ουρά περιέχει μόνο τον κόμβο s, είναι προφανές ότι το Λήμμα ισχύει.
- **Επαγωγικό βήμα:** Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι το Λήμμα ισχύει τόσο μετά την αφαίρεση ενός κόμβου από την ουρά όσο και μετά την προσθήκη ενός κόμβου.

Βραχύτατες διαδρομές

Συνέχεια Απόδειξης

Εάν αφαιρεθεί η κεφαλή v_1, έχουμε ότι

$$d[v_1] \leq d[v_2] \Rightarrow d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \leq d[v_2] + 1.$$

Οι υπόλοιπες ανισότητες δεν επηρεάζονται. Το Λήμμα ισχύει με κεφαλή της ουράς τον κόμβο v_2.

Προσθήκη κόμβου

$$d[v_{r+1}] = d[v] = d[u] + 1 \leq d[v_1] + 1,$$

όπου u ο κόμβος που έχει ήδη αφαιρεθεί από την Q και διατρέχεται ο κατάλογος γειτνίασής του.

Από την επαγωγική υπόθεση, $d[v_r] \leq d[u] + 1$ συνεπώς

$$d[v_r] \leq d[u] + 1 = d[v] = d[v_{r+1}]$$

Οι υπόλοιπες ανισότητες δεν επηρεάζονται.

Βραχύτατες διαδρομές

Πόρισμα

Έστω ότι ο v_i προστίθεται πριν από τον v_j στην Q, τότε $d[v_i] \leq d[v_j]$.

Θεώρημα (Ορθότητα της Οριζόντιας διερεύνησης)

Ισχύει ότι

$$d[v] = \delta(s, v) \;\; \forall v \in V.$$

Επιπλέον $\forall v \neq s$ μια από τις βραχύτατες διαδρομές από τον s μέχρι τον v είναι μια βραχύτατη διαδρομή από τον s μέχρι τον $\pi[v]$ ακολουθούμενη από την ακμή $(\pi[v], v)$.

Βραχύτατες διαδρομές

Απόδειξη (Ορθότητα της Οριζόντιας διερεύνησης)

Έστω

$$d[v] \neq \delta(s,v), v \neq s.$$

Σύμφωνα με το Λήμμα $d[v] \geq \delta(s,v)$ επομένως $d[v] > \delta(s,v)$. Έστω $u = \pi[v]$, σε μια βραχύτατη διαδρομή από τον s μέχρι τον v. Τότε

$$d[v] > \delta(s,v) = \delta(s,u) + 1 = d[u] + 1. \tag{1}$$

Ας εξετάσουμε τώρα τι συμβαίνει τη χρονική στιγμή που η Οριζοντια Διερευνηση αφαιρεί τον κόμβο u από την ουρά Q στη γραμμή 11. Ο κόμβος v είναι είτε λευκός, είτε γκρίζος, είτε μελανός.

- Ο v είναι λευκός τότε $d[v] = d[u] + 1$ αντίφαση με (1).
- Ο v είναι μελανός με βάση το Πόρισμα $d[v] \leq d[u]$ αντίφαση (1).

Βραχύτατες διαδρομές

συνέχεια απόδειξης (Ορθότητα της Οριζόντιας διερεύνησης)

- Ο v είναι γκρίζος τότε χρωματίστηκε γκρίζος κατά την αφαίρεση από την ουρά κάποιου κόμβου w, συνεπώς

$$d[v] = d[w] + 1.$$

Σύμφωνα με το Πόρισμα όμως

$$d[w] \leq d[u],$$

συνεπώς

$$d[v] \leq d[u] + 1$$

αντίφαση (1).

Επομένως $d[v] = \delta(s, v)\ \forall v \in V$. Εάν $\pi[v] = u$, τότε $d[v] = d[u] + 1$. Εάν πάρουμε μια βραχύτατη διαδρομή από τον s μέχρι τον $\pi[v]$ και στη συνέχεια διασχίζουμε την ακμή $(\pi[v], v)$ παίρνουμε μια βραχύτατη διαδρομή από τον s μέχρι τον v.

Οριζόντια δένδρα

Ορισμός

Για ένα γράφημα $G = (V, E)$ με αφετηριακό κόμβο τον s, ορίζουμε ως **υπογράφημα προκατόχων** του G το γράφημα $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ όπου

$$V_\pi = \{v \in V : \pi[v] \neq \text{KENO}\} \cup \{s\}$$

και

$$E_\pi = \{(\pi[v], v) : v \in V_\pi - \{s\}\}$$

Ορισμός

Το υπογράφημα προκάτοχων G_π είναι ένα **οριζόντιο δένδρο** εάν

1. το σύνολο V_π αποτελείται από τους κόμβους που είναι προσπελάσιμοι από τον s,
2. για όλους τους κόμβους $v \in V_\pi$, υπάρχει μια μοναδική απλή διαδρομή από τον s μέχρι τον v στο G_π η οποία είναι επίσης βραχύτατη διαδρομή από τον s μέχρι το v στο G.

Ένα οριζόντιο δένδρο αποτελεί όντως δένδρο, δεδομένου ότι είναι συνδεδεμένο και $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$.

Οριζόντια δένδρα

Λήμμα

Η εκτέλεση της διαδικασίας ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ αποδίδει στα πεδία π τιμές τέτοιες ώστε το υπογράφημα προκατόχων $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ να αποτελεί οριζόντια δένδρο.

Απόδειξη

Η γραμμή 16 της ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ θέτει $\pi[v] = u$ εάν και μόνο εάν $(u, v) \in E$ και $\delta(s, v) < \infty$ -δηλαδή εάν ο v είναι προσπελάσιμος από τον s- και συνεπώς το V_π αποτελείται από τους κόμβους του V που είναι προσπελάσιμοι από τον s. Δεδομένου ότι το γράφημα G_π αποτελεί δένδρο, περιέχει μια μοναδική διαδρομή από τον κόμβο s μέχρι οποιονδήποτε κόμβο του V_π. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα επαγωγικά, συμπεραίνουμε ότι κάθε τέτοια διαδρομή αποτελεί βραχύτατη διαδρομή.

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τις τιμές d και π που προκύπτουν από την εκτέλεση της οριζόντιας διερεύνησης στο κατευθυντό γράφημα του σχήματος (σελ. 2), με αφετηριακό κόμβο τον κόμβο 3.
2. Υπολογίστε τις τιμές d και π που προκύπτουν από την εκτέλεση της οριζόντιας διερεύνησης στο ακατεύθυντο γράφημα του σχήματος (σελ. 19), με αφετηριακό κόμβο τον κόμβο u.
3. Ποιος είναι ο χρόνος εκτέλεσης της Οριζοντιασ Διερευνησησ εάν το γράφημα εισόδου αναπαρισtάται μέσω πίνακα γειτνίασης και ο αλγόριθμος έχει τροποποιηθεί κατάλληλα ώστε να χειρίζεται αυτή τη μορφή εισόδου·

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι σε μια οριζόντια διερεύνηση η τιμή $d[u]$ που αποδίδεται σε έναν κόμβο u είναι ανεξάρτητη από τη σειρά των κόμβων σε κάθε κατάλογο γειτνίασης. Με βάση το σχήμα (σελ. 19), δείξτε ότι το οριζόντιο δένδρο που υπολογίζει η Οριζοντια Διερευνηση είναι δυνατόν να εξαρτάται από τη σειρά αυτή.
2. Ορίζουμε ως διάμετρο ενός δένδρου $T = (V, E)$ την ποσότητα

   $$\max_{u,v \in V} \delta(u, v).$$

   Δηλαδή η διάμετρος είναι το μεγαλύτερο από όλα τα μήκη βραχύτατων διαδρομών στο δένδρο. Κατασκευάστε έναν ταχύ αλγόριθμο ο οποίος να υπολογίζει τη διάμετρο ενός δένδρου, και αναλύστε τον χρόνο εκτέλεσης του.

Καθοδική διερεύνηση

Υπογράφημα προκατόχων

- Το **υπογράφημα προκατόχων** της καθοδικής διερεύνησης ορίζεται κάπως διαφορετικά απ΄ ό,τι το αντίστοιχο της Οριζόντιας διερεύνησης: ορίζουμε $G_\pi = (V, E_\pi)$, όπου

$$E\pi = \{(\pi[v], v) : v \in V \text{ και } \pi[v] \neq \text{KENO}\} .$$

- Το υπογράφημα προκατόχων της καθοδικής διερεύνησης σχηματίζει ένα **καθοδικό δάσος** που αποτελείται από διάφορα **καθοδικά δένδρα**.
- Η οριζόντια διερεύνηση συνήθως χρησιμοποιείται για την εύρεση των μηκών βραχύτατων διαδρομών (και του αντίστοιχου υπογραφήματος προκατόχων) από έναν δεδομένο αφετηριακό κόμβο.
- Η καθοδική διερεύνηση συχνά αποτελεί τμήμα ενός άλλου αλγορίθμου.

Καθοδική διερεύνηση

Χρονοσφραγίδες

- Η διαδικασία Κατα Βαθος Διερευνηση καταγράφει το χρόνο εντοπισμού του κόμβου u στη μεταβλητή $d[u]$ και το χρόνο περάτωσης του στη μεταβλητή $f[u]$.
- οι χρονοσφραγίδες αυτές είναι ακέραιοι αριθμοί μεταξύ του 1 και του $2|V|$.
- Για κάθε κόμβο u, έχουμε ότι

$$d[u] < f[u].$$

- Ο κόμβος u έχει τιμή χρώματος ΛΕΥΚΟ πριν από τη χρονική στιγμή $d[u]$, ΓΚΡΙΖΟ στο χρονικό διάστημα μεταξύ $d[u]$ και $f[u]$, και ΜΕΛΑΝΟ στη συνέχεια.

Καθοδική διερεύνηση

Κατα Βαθος Διερευνηση

Κατα Βαθος Διερευνηση(G)

για κάθε κόμβο $u \in V[G]$
    χρώμα$[u] \leftarrow$ ΛΕΥΚΟ
    $\pi[u] \leftarrow$ ΚΕΝΟ
χρόνος$\leftarrow 0$
για κάθε κόμβο $u \in V[G]$
    αν χρώμα $[u] =$ ΛΕΥΚΟ
        τότε Επισκεψη Κατα Βαθοσ Διερευνησησ(u)

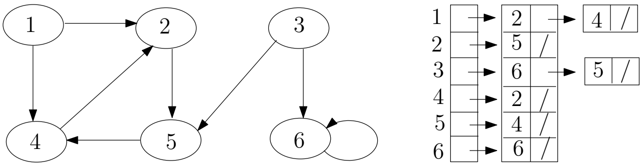
Καθοδική διερεύνηση

Επισκεψη Κατα Βαθοσς Διερευνησησ

Επισκεψη Κατα Βαθοσς Διερευνησησ(u)

χρώμα$[u] \leftarrow$ ΓΚΡΙΖΟ $\triangleright$ ο λευκός κόμβος u μόλις ανακαλύφθηκε.
χρόνος $\leftarrow$ χρόνος $+1$
$d[u] \leftarrow$ χρόνος
για κάθε $v \in Adj[u]$ $\triangleright$ εξερεύνηση της ακμής (u, v).
    αν χρώμα$[v] =$ ΛΕΥΚΟ
        τότε $\pi[v] \leftarrow u$
            Επισκεψη Κατα Βαθοσς Διερευνησησ(v)
χρώμα$[u] \leftarrow$ ΜΕΛΑΝΟ $\triangleright$ χρωμάτισε τον u μελανο· έχει περατωθεί.
$f[u] \leftarrow$ χρόνος $\leftarrow$ χρόνος $+1$

Καθοδική διερεύνηση

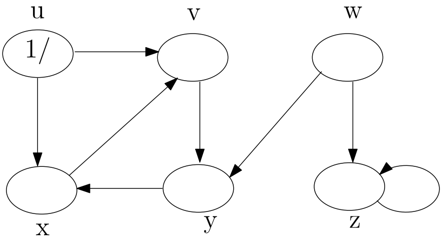


(α) (β)

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

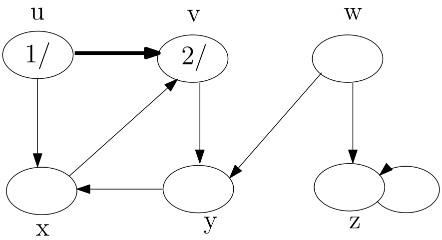
(γ)

Καθοδική διερεύνηση



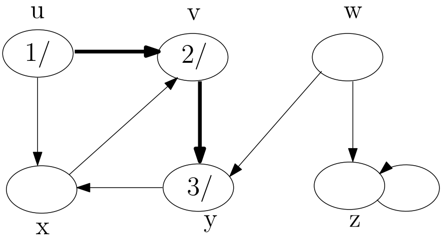
(α)

Καθοδική διερεύνηση



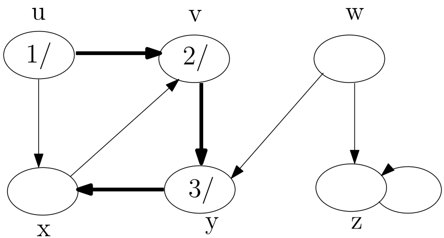
(β)

Καθοδική διερεύνηση



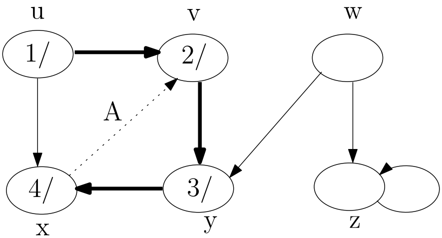
(γ)

Καθοδική διερεύνηση



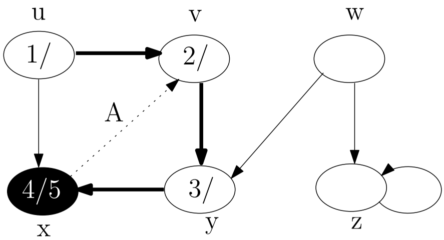
(δ)

Καθοδική διερεύνηση



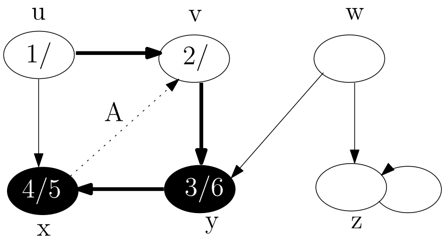
(ϵ)

Καθοδική διερεύνηση



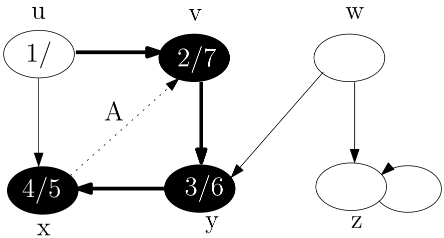
$(\sigma\tau)$

Καθοδική διερεύνηση



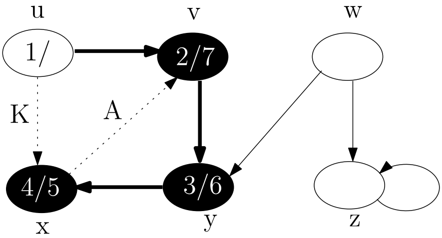
(ζ)

Καθοδική διερεύνηση



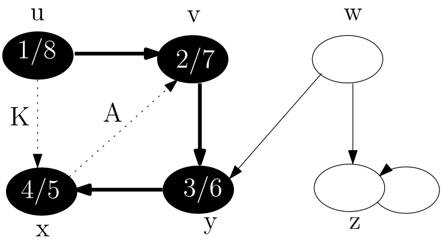
(η)

Καθοδική διερεύνηση



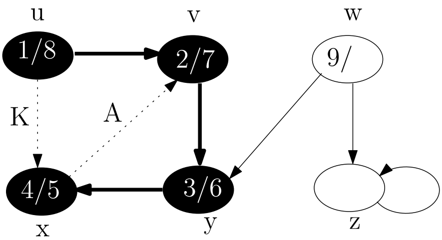
(θ)

Καθοδική διερεύνηση



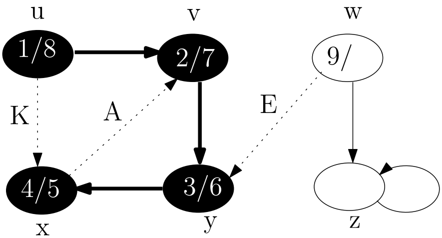
(ι)

Καθοδική διερεύνηση



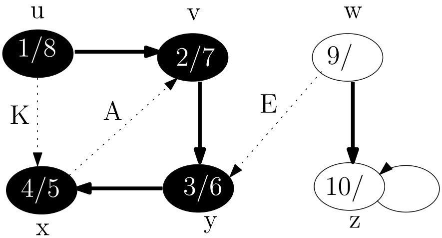
$(\iota\alpha)$

Καθοδική διερεύνηση



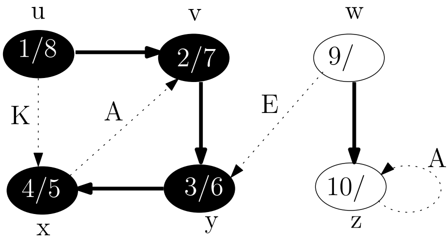
(ιβ)

Καθοδική διερεύνηση



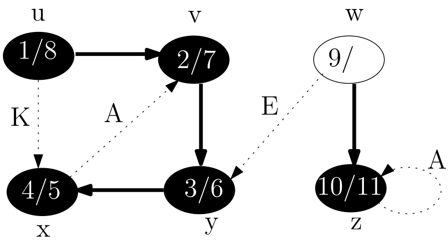
$(\iota\gamma)$

Καθοδική διερεύνηση



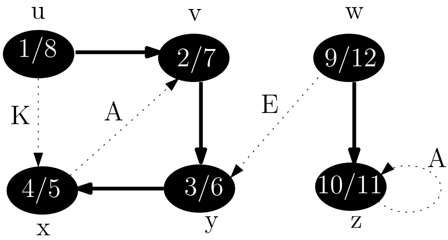
$(\iota\delta)$

Καθοδική διερεύνηση



$(\iota\epsilon)$

Καθοδική διερεύνηση



$\iota\sigma\tau$

Καθοδική διερεύνηση

Χρόνος εντοπισμού και χρόνος περάτωσης

- Κάθε φορά που καλείται η ΕΠΙΣΚΕΨΗ ΚΑΤΑ ΒΑΘΟΣΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ(u) στη γραμμή 7, ο κόμβος u καθίσταται ριζικός ενός δένδρου στο καθοδικό δάσος.
- Όταν η ΚΑΤΑ ΒΑΘΟΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ επιστρέφει, έχει αποδοθεί σε κάθε κόμβο u ένας **χρόνος εντοπισμού** $d[u]$ και ένας **χρόνος περάτωσης** $f[u]$.

Καθοδική διερεύνηση

Χρόνος εκτέλεσης της Κατα Βαθοσσ Διερευνησησ

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα της καθοδικής διερεύνησης

- Εξαρτώνται από τη σειρά με την οποία εξετάζονται οι κόμβοι στη γραμμή 5 της Κατα Βαθοσσ Διερευνησησ.
- Καθώς και από τη σειρά με την οποία εξετάζονται οι γείτονες του κάθε κόμβου στη γραμμή 4 της Επισκεψησ Κατα Βαθοσσ Διερευνησησ.
- Ωστόσο, αυτές οι διαφορές στη σειρά εξέτασης στη πράξη δεν δημιουργούν πρόβλημα, καθώς οποιοδήποτε αποτέλεσμα της καθοδικής διερεύνησης δίνει κατ' ουσία ισοδύναμα διερευνητικά δένδρα

Ο χρόνος εκτέλεσης της Κατα Βαθοσ Διερευνησησ είναι $\Theta(V + E)$.

Ιδιότητες της καθοδικής διερεύνησης

Ιδιότητες

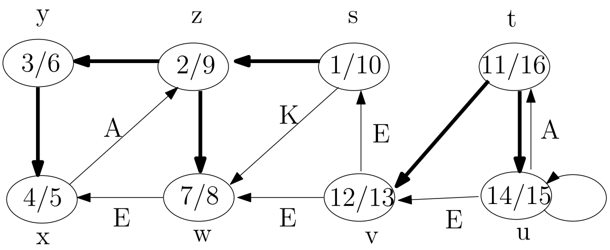
- Το υπογράφημα προκατόχων G_π συνιστά όντως δάσος. Δηλαδή

$$u = \pi[v]$$

  εάν και μόνο εάν η Επισκεψη Κατα Βαθοσ Διερευνησησ(v) κλήθηκε κατά τη διάρκεια της διερεύνησης του καταλόγου γειτνίασης του u.
- Επιπλέον, ο κόμβος v είναι απόγονος του κόμβου u στο καθοδικό δάσος εάν και μόνο εάν ο v εντοπίσθηκε κατά το χρονικό διάστημα που ο u ήταν γκρίζος.

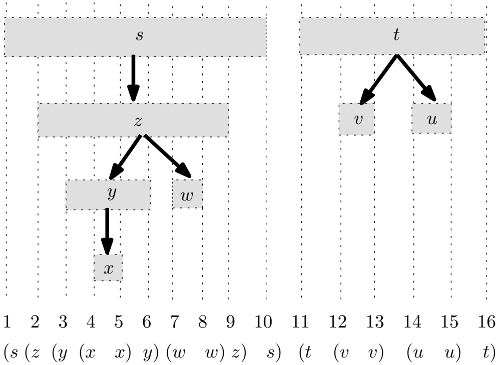
Οι χρόνοι εντοπισμού και περάτωσης έχουν δομή παρενθέσεων.

Ιδιότητες της καθοδικής διερεύνησης



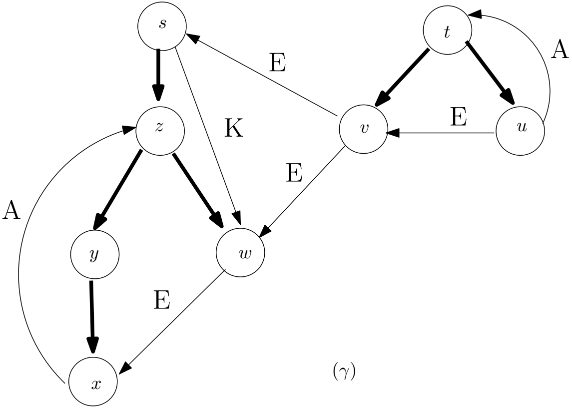
(α)

Ιδιότητες της καθοδικής διερεύνησης



(β)

Ιδιότητες της καθοδικής διερεύνησης



(γ)

Κατά Βάθος διερεύνηση

Θεώρημα

Σε οποιαδήποτε καθοδική διερεύνηση ενός (κατευθυντού ή ακατεύθυντου) γραφήματος $G = (V, E)$, για κάθε ζεύγος κόμβων u και v, ισχύει μια και μόνο μια από τις ακόλουθες τρεις συνθήκες

1. $[d[u], f[u]] \cap [d[v], f[v]] = \varnothing$
2. $[d[u], f[u]] \subseteq [d[v], f[v]]$, u απόγονος του v.
3. $[d[v], f[v]] \subseteq [d[u], f[u]]$, v απόγονος του u

Κατά Βάθος διερεύνηση

Απόδειξη

Υποθέτουμε αρχικά ότι
$$d[u] < d[v].$$
Αν
$$d[v] < f[u]$$
τότε

- Ο v εντοπίστηκε ενόσω ο u ήταν ακόμη γκρίζος.
- Ο v είναι απόγονος του u.
- Ο v περατώνεται, προτού η διερεύνηση επιστρέψει στον u για να τον περατώσει.

Επομένως,
$$[d[v], f[v]] \subseteq [d[u], f[u]].$$
Όμοια αποδεικνύονται και οι άλλες περιπτώσεις.

Κατά Βάθος διερεύνηση

Πόρισμα

Ο κόμβος v είναι γνήσιος απόγονος του u στο καθοδικό δάσος ενός (κατευθυντού ή ακατεύθυντου) γραφήματος G εάν και μόνο εάν

$$d[u] < d[v] < f[v] < f[u].$$

Θεώρημα

Ο κόμβος v είναι απόγονος του u εάν και μόνο εάν τη χρονική στιγμή $d[u]$ που εντοπίζεται ο u, ο v μπορεί να προσπελαστεί από τον u κατά μήκος μιας διαδρομής που αποτελείται αποκλειστικά από λευκούς κόμβους.

Κατά Βάθος διερεύνηση

Απόδειξη

$\Rightarrow$ Ας υποθέσουμε ότι ο κόμβος v είναι απόγονος του u. Έστω w ένας τυχών κόμβος στη διαδρομή μεταξύ των u και v. Σύμφωνα με το Πόρισμα

$$d[u] < d[w],$$

και επομένως ο w είναι λευκός τη χρονική στιγμή $d[u]$.

Κατά Βάθος διερεύνηση

Απόδειξη συνέχεια

$\Leftarrow$ Έστω V:

$$u \rightsquigarrow V$$

αλλά όχι απόγονος u.

Υποθέτουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας,

$$\forall v_i \neq v \text{ της } V.$$

είναι απόγονος του u.

Έστω

$$w = \pi(v)$$

τότε

$$w \text{ απόγονος του } u.$$

Κατά Βάθος διερεύνηση

Απόδειξη συνέχεια

Λόγω του Πορίσματος

$$f[w] \leq f[u]$$

Επομένως,

$$[d[v] < d[v] < f[w] \leq f[u]$$

και λόγω του θεωρήματος

$$[d[v], f[v]] \subseteq [d[u], f[u]]$$

άρα ο v απόγονος του u.

Κατά Βάθος διερεύνηση

Κατάταξη ακμών

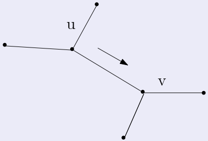
1. Δενδρικές ακμές
2. Ανιούσες ακμές
3. Κατιούσες ακμές
4. Εγκάρσιες ακμές

Θεώρημα

Σε μια καθοδική διερεύνηση ακατεύθυντου γραφήματος G, κάθε ακμή του G είναι είτε δενδρική είτε ανιούσα.

Κατά Βάθος διερεύνηση

Απόδειξη



Υποθέτουμε $d[u] < d[v] \rightarrow f[v] < f[u]$ και u γκρίζος.
Αν πρώτα

$$u \rightsquigarrow v$$

τότε

$$v \text{ λευκός}$$

άρα

$$(u, v) \text{ δενδρική.}$$

Κατά Βάθος διερεύνηση

Απόδειξη συνέχεια

Αν τώρα

$$v \rightsquigarrow u$$

επειδή

$$u \text{ γκρίζος}$$

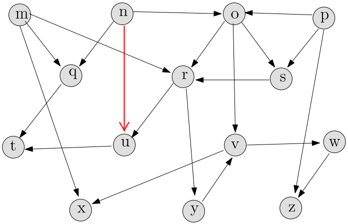
άρα

$$(u, v) \text{ ανιούσα.}$$

Κατά Βάθος διερεύνηση

Ασκήσεις

1. Περιγράψτε τη λειτουργία της καθοδικής διερεύνησης στο γράφημα του Σχήματος 70. Υποθέστε ότι ο βρόχος για στις γραμμές 5-7 της διαδικασίας Κατα Βαθος Διερευνηση διεξέρχεται τους κόμβους με αλφαβητική σειρά, και ότι όλοι οι κατάλογοι γειτνίασης είναι ταξινομημένοι επίσης με αλφαβητική σειρά. Προσδιορίστε το χρόνο εντοπισμού και περάτωσης του κάθε κόμβου, και το τύπο κάθε ακμής.



Σχήμα: 70

Κατά Βάθος διερεύνηση

Ασκήσεις

2 Προσδιορίστε τη δομή παρενθέσεων της καθοδικής διερεύνησης του Σχήματος 22.4

3 Δείξτε ότι η ακμή (u, v) είναι

- α δενδρική ή κατιούσα εάν και μόνο εάν $d[u] < d[v] < f[v] < f[u]$,
- β ανιούσα εάν και μόνο εάν $d[v] \leq d[u] < f[u] \leq f[v]$, και
- γ εγκάρσια εάν και μόνο εάν $d[v] < f[v] < d[u] < f[u]$.

4 Ξαναγράψτε τη διαδικασία Κατα Βαθος Διερευνηση, χρησιμοποιώντας μια στοίβα ώστε να εξαλείψετε τις αναδρομικές κλήσεις.

Κατά Βάθος διερεύνηση

Ασκήσεις

5 Αναφέρετε ένα παράδειγμα που να αντιβαίνει προς την εικασία ότι εάν σε ένα κατευθυντό γράφημα G υπάρχει μια διαδρομή από τον κόμβο u μέχρι και τον v, και εάν $d[u] < d[v]$ σε μια καθοδική διερεύνηση του G, τότε ο v είναι απόγονος του u στο παραγόμενο καθοδικό δάσος.

6 Αναφέρετε ένα παράδειγμα που να αντιβαίνει προς την εικασία ότι εάν σε ένα κατευθυντό γράφημα G υπάρχει μια διαδρομή από τον κόμβο u μέχρι τον v, τότε οποιαδήποτε καθοδική διερεύνηση θα πρέπει να δώσει $d[v] \leq f[u]$.

7 Τροποποιήστε τον ψευδοκώδικα της καθοδικής διερεύνησης ώστε να εκτυπώνει όλες τις ακμές του κατευθυντού γραφήματος G, καθώς και τον τύπο της καθεμιάς. Προσδιορίστε ποιες τροποποιήσεις θα πρέπει να γίνουν, εφόσον απαιτούνται, για την περίπτωση που το γράφημα G είναι ακατεύθυντο.

Κατά Βάθος διερεύνηση

Ασκήσεις

8 Δείξτε ότι με μια καθοδική διερεύνηση ενός ακατεύθυντου γραφήματος G είναι δυνατόν να προσδιοριστούν οι συνδεδεμένες συνιστώσες του G, και ότι το πλήθος των δένδρων στο καθοδικό δάσος ισούται με το πλήθος των συνδεδεμένων συνιστωσών του G. Συγκεκριμένα, δείξτε πώς θα πρέπει να τροποποιηθεί η καθοδική διερεύνηση ώστε να αποδίδει σε κάθε κόμβο v μια ακέραια επιγραφή $cc[v]$ μεταξύ του 1 και του k, όπου k το πλήθος των συνδεδεμένων συνιστωσών του G, έτσι ώστε $cc[u] = cc[v]$ εάν και μόνο εάν οι u και v ανήκουν στην ίδια συνδεδεμένη συνιστώσα.

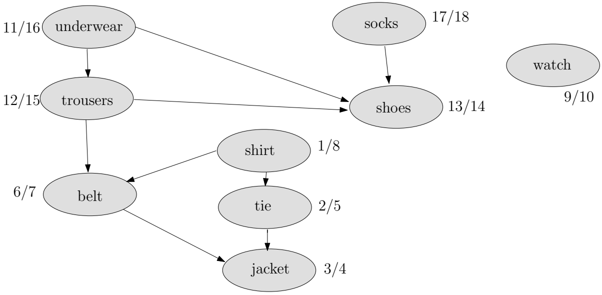
9 Ένα κατευθυντό γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται απλά συνδεδεμένο εάν στις περιπτώσεις που ισχύει $u \rightsquigarrow v$ υπάρχει το πολύ μια απλή διαδρομή από τον κόμβο u μέχρι τον v για όλους τους κόμβους $u, v \in V$. Κατασκευάστε έναν ταχύ αλγόριθμο που να προσδιορίζει εάν ένα κατευθυντό γράφημα είναι απλά συνδεδεμένο ή όχι.

Τοπολογική ταξινόμηση

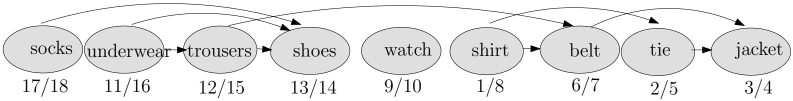
Ορισμός

Η **τοπολογική ταξινόμηση** ενος ΚΑΓ $G = (V, E)$ συνίσταται στη διάταξη των κόμβων του σε μια γραμμική αλληλουχία τέτοια ώστε εάν το G περιέχει μια ακμή (u, v), ο κόμβος u να εμφανίζεται πριν από τον v στην αλληλουχία αυτή. (Εάν το γράφημα δεν είναι άκυκλο, είναι αδύνατον να υπάρξει τέτοια αλληλουχία).

Τοπολογική ταξινόμηση



(α)



(β)

Σχήμα: 75

Τοπολογική ταξινόμηση

Τοπολογικη ταξινομηση

Τοπολογικη ταξινομηση(G)

1 καλούμε την Κατα Βαθος διερευνηση (G) για τον υπολογισμό
του χρόνου περάτωσης $f[v]$ του κάθε κόμβου v

2 μετά την περάτωση κάθε κόμβου,
τον τοποθετούμε επικεφαλής μιας αλυσίδας

3 **επιστροφή** η αλυσίδα των κόμβων

Το αποτέλεσμα της τοπολογικής ταξινόμησης

- Οι κόμβοι είναι διατεταγμένοι κατά φθίνουσα σειρά ως προς τον χρόνο περάτωσής τους.
- Η τοπολογική ταξινόμηση μπορεί να εκτελεστεί σε χρόνο $\Theta(V + E)$.

Τοπολογική ταξινόμηση

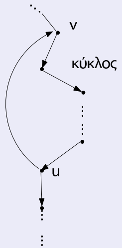
Η ορθότητα του αλγορίθμου.

Λήμμα

Ένα κατευθυντό γράφημα G είναι άκυκλο εάν και μόνο εάν από μια καθοδική διερεύνηση του G δεν προκύπτει καμία ανιούσα ακμή.

Απόδειξη...

$\Rightarrow$ Έστω $\exists$ ανιούσα ακμή (u, v)



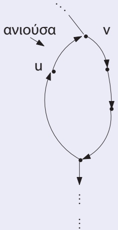
Τοπολογική ταξινόμηση

...Απόδειξη

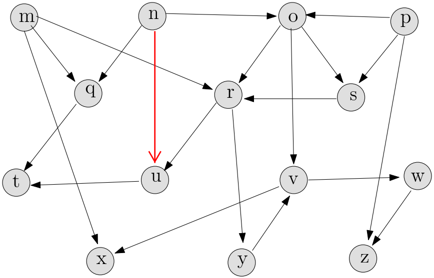
$\Leftarrow$ Έστω ότι το G έχει κάποιο κύκλο c

Οι κόμβοι του c σχηματίζουν μια διαδρομή λευκών κόμβων από τον v μέχρι τον u

Συνεπώς, ο u είναι απόγονος του v



Τοπολογική ταξινόμηση



Σχήμα: 79

Θεώρημα

Η διαδικασία Τοπολογικη ταξινομηση(G) παράγει μια τοπολογική ταξινόμηση του κατευθυντού άκυκλου γραφήματος G.

Τοπολογική ταξινόμηση

Απόδειξη

- Αρκεί $f[v] < f[u], (u, v) \in E$
- Κατά την εξερεύνηση της (u, v)
  - ο v δεν είναι γκρίζος.
    Πράγματι, αν v γκρίζος, τότε v πρόγονος του u
    $\rightarrow$ η (u, v) ανιούσα $\rightarrow$ αντίφαση με Λήμμα.
  - Συνεπώς
    v λευκός ή μελανός
  - v λευκός τότε απόγονος u
    και $f[v] < f[u]$
  - v μελανός $\rightarrow f[v] < f[u]$

Τοπολογική ταξινόμηση

Ασκήσεις

10 Προσδιορίστε τη διάταξη των κόμβων που προκύπτει από την εκτέλεση της διαδικασίας Τοπολογικη ταξινομηση για το ΚΑΓ του Σχήματος 70, υπό την παραδοχή της ΄Ασκησης 1

11 Σχεδιάστε ένα αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που να δέχεται ως είσοδο ένα ΚΑΓ $G = (V, E)$ και δύο κόμβους s και t, και να επιστρέφει το πλήθος των διαδρομών από τον s μέχρι τον t στο G. Παραδείγματος χάριν, στο κατευθυντό άκυκλο γράφημα του Σχήματος 79, υπάρχουν ακριβώς τέσσερεις διαδρομές από τον κόμβο p μέχρι τον κόμβο v : *pov*, *poryv*, *posryv* και *psryv*. (Ο αλγόριθμος σας δεν είναι απαραίτητο να παραθέτει τις διαδρομές, αλλά μόνο να τις καταμετρά.)

Τοπολογική ταξινόμηση

Ασκήσεις

12 Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο που να δέχεται ως είσοδο ένα ακατεύθυντο γράφημα $G = (V, E)$ και να προσδιορίζει εάν περιέχει κάποιον κύκλο ή όχι. Ο αλγόριθμός σας θα πρέπει να έχει χρόνο εκτέλεσης $O(V)$, ανεξαρτήτως του $|E|$.

13 Αποδείξτε ή καταρρίψτε την ακόλουθη πρόταση: Εάν ένα κατευθυντό γράφημα G περιέχει κύκλους, η διαδικασία Τοπολογικη ταξινομηση(G) παράγει μια διάταξη κόμβων η οποία ελαχιστοποιεί το πλήθος των "κακών" ακμών που είναι ασύμβατες με την παραγόμενη διάταξη.

14 Μια άλλη μέθοδος τοπολογικής ταξινόμησης ενός κατευθυντού άκυκλου γραφήματος $G = (V, E)$ είναι η εξής: εντοπίζουμε επαναληπτικά κάποιον κόμβο με βαθμό εισόδου 0, τον καταγράφουμε, και τον αφαιρούμε από το γράφημα μαζί με όλες τις εξερχόμενες από αυτόν ακμές. Περιγράψτε πώς μπορεί να υλοποιηθεί η διαδικασία αυτή, ώστε να εκτελείται σε χρόνο $O(V + E)$. Πώς συμπεριφέρεται ο αλγόριθμος αυτός στην περίπτωση που το G περιέχει κύκλους;

Ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες

Ισχυρά συνδεδεμένη συνιστώσα

Μια ισχυρά συνδεδεμένη συνιστώσα ενός κατευθυντού γραφήματος $G = (V, E)$ είναι μείζον σύνολο κόμβων $C \subseteq V$ τέτοιο ώστε για κάθε ζεύγος κόμβων u και v στο C να ισχύει $u \rightsquigarrow v$ και επίσης $v \rightsquigarrow u$.

Ανάστροφο γράφημα

Το ανάστροφο γράφημα του G, ορίζεται ως το γράφημα $G^T = (V, E^T)$ όπου

$$E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\} .$$

Δηλαδή το E^T αποτελείται από τις ακμές του G με τις κατευθύνσεις τους ανεστραμμένες.

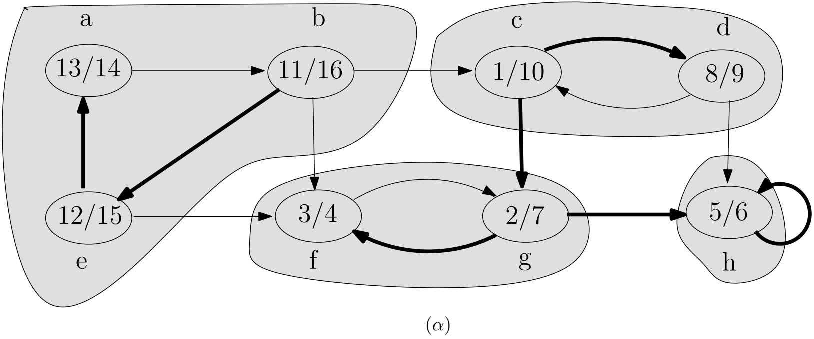
Αξίζει να σημειωθεί ότι τα G και G^T έχουν ακριβώς τις ίδιες ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες: οι κόμβοι u και v είναι προσπελάσιμοι ο ένας από τον άλλο στο G εάν και μόνο εάν είναι προσπελάσιμοι ο ένας από τον άλλο στο G^T.

Ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες

Κατευθυντό γράφημα

- Οι σκιασμένες περιοχές αναπαριστούν τις συνδεδεμένες συνιστώσες του G.
- Εντός κάθε κόμβου αναγράφεται ο χρόνο εντοπισμού και ο χρόνος περάτωσης του.
- Οι δενδρικές ακμές απεικονίζονται σκιασμένες.

Ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες



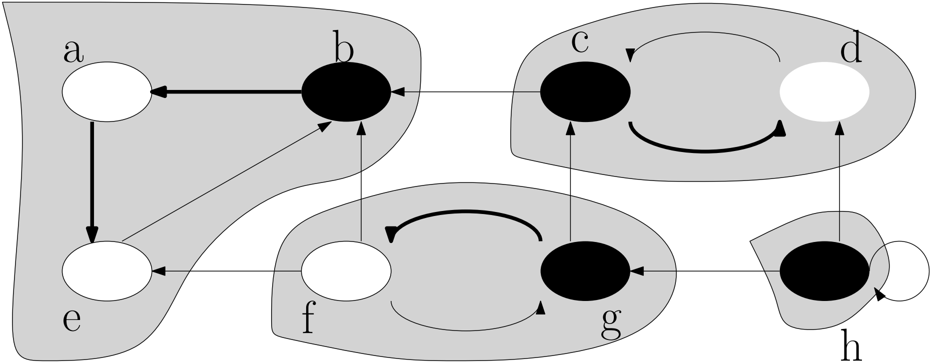
Σχήμα: Ένα κατευθυντό γράφημα G

Ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες

Ανάστροφο γράφημα

- Στο σχήμα απεικονίζεται το καθοδικό δάσος που υπολογίζεται στη γραμμή 3 της διαδικασίας Ισχυρα Συνδεδεμενες Συνιστωσες, με τις δενδρικές ακμές σκιασμένες.
- Κάθε ισχυρά συνδεδεμένη συνιστώσα αντιστοιχεί σε ένα καθοδικό δένδρο.
- Οι κόμβοι b, c, g και h που αναπαρίστανται με έντονη σκίαση, είναι οι ριζικοί κόμβοι των καθοδικών δένδρων που παράγονται από την καθοδική διερεύνηση του G^T.

Ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες



Σχήμα: Το γράφημα G^T, το ανάστροφο του G

Ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες

Ο ακόλουθος αλγόριθμος γραμμικού χρόνου ($\Theta(V+E)$) υπολογίζει τις ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες ενός κατευθυντού γραφήματος $G=(V,E)$ εκτελώντας δυο καθοδικές διερευνήσεις, μια για το G και μια για το G^T.

Ισχυρα Συνδεδεμενες Συνιστωσες

Ισχυρα Συνδεδεμενες Συνιστωσες(G)

1 καλούμε την Κατα Βαθος Διερευνηση(G) για τον υπολογισμό
    του χρόνου περάτωσης $f[u]$ του κάθε κόμβου u

2 υπολογίζουμε το G^T

3 καλούμε την Κατα Βαθος Διερευνηση(G^T) όπου στον κύριο βρόχο της
    οι κόμβοι εξετάζονται κατά φθίνουσα σειρά ως προς τον $f[u]$
    (όπως υπολογίστηκε στη γραμμή 1)

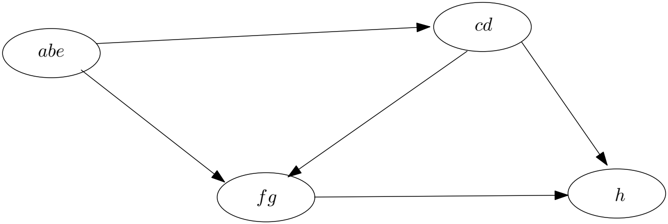
4 εκτυπώνουμε τους κόμβους κάθε δένδρου του καθοδικού δάσους
    που δημιουργήθηκε στη γραμμή 3 ως μια ξεχωριστή
    ισχυρά συνδεδεμένη συνιστώσα

Ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες

Ακυκλο γράφημα των συνιστωσών

Το γράφημα συνιστωσών $G^{\text{ΙΣΣ}} = (V^{\text{ΙΣΣ}}, E^{\text{ΙΣΣ}})$ ορίζεται ως εξής

- Το άκυκλο γράφημα συνιστωσών $G^{\text{ΙΣΣ}}$ που προκύπτει από τη σύμπτυξη όλων των ακμών εντός κάθε ισχυρά συνδεδεμένης συνιστώσας του G, έτσι ώστε σε κάθε συνιστώσα να απομένει μόνο ένας κόμβος.



(γ)

Σχήμα: Το άκυκλο γράφημα των συνιστωσών $G^{\text{ΙΣΣ}}$

Ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες

Στη δεύτερη καθοδική διερεύνηση διατρέχουμε τους κόμβους του γραφήματος συνιστωσών (καθένας από τους οποίους αντιστοιχεί σε μια ισχυρά συνδεδεμένη συνιστώσα του G) κατά διάταξη τοπολογικής ταξινόμησης.

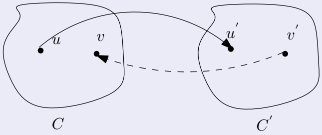
Εάν $U \subset V$, ορίζουμε

$$d(U) = \min_{u \in U} \{d[u]\} \text{ και } f(U) = \max_{u \in U} \{f[u]\}$$

Ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες

Λήμμα

$G^{\text{ΙΣΣ}}$ είναι ΚΑΓ.



Απόδειξη

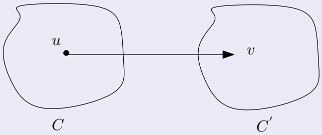
Αν $\exists u \rightsquigarrow u'$ τότε $\nexists v \rightsquigarrow v'$. Πράγματι,
αν $\exists v' \rightsquigarrow v$ τότε οι C και C' δεν είναι δυο διαφορετικές ΙΣΣ αλλά μία.

Ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες

Στο λήμμα που ακολουθεί και στο πόρισμα του περιγράφεται μια βασική ιδιότητα η οποία συσχετίζει τις ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες με τους χρόνους περάτωσης στην καθοδική διερεύνηση.

Λήμμα

Το G είναι K. Αν



τότε $f(C) > f(C')$.

Απόδειξη

βλέπε σύγγραμμα.

Ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες

Πόρισμα

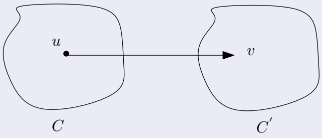
Έστω ότι $\exists(u, v) \in E^T$, όπου $u \in C$ και $v \in C'$ τότε

$$f(C) < f(C')$$

Ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες

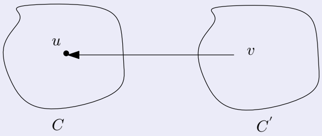
Απόδειξη

Αν G^T:



τότε

G:



συνεπώς, λόγω του Λήμματος $f(C) < f(C')$.

Ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες

Συνεπώς, όλες οι ακμές του γραφήματος G^T οι οποίες συνδέουν διαφορετικές ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες έχουν κατεύθυνση από τη συνιστώσα με το μικρότερο χρόνο περάτωσης (στην πρώτη καθοδική διερεύνηση) προς τη συνιστώσα με τον μεγαλύτερο χρόνο περάτωσης.

Ας εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν εκτελούμε τη δεύτερη καθοδική διερεύνηση, η οποία αφορά το G^T.

- ξεκινάμε από τη ισχυρά συνδεδεμένη συνιστώσα C της οποίας ο χρόνος περάτωσης $f(C)$ είναι ο μέγιστος.
- Σύμφωνα με το Πόρισμα, δεν υπάρχει καμία ακμή στο G^T από την C προς οποιαδήποτε άλλη ισχυρά συνδεδεμένη συνιστώσα, και επομένως η διερεύνηση με αφετηρία τον x δεν θα επεκταθεί σε κόμβους των άλλων συνιστωσών.
- Επομένως, το δένδρο με ριζικό κόμβο τον x θα περιέχει όλους τους κόμβους της συνιστώσας C, και μόνο αυτούς.

Ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες

- Εν γένει, οποτεδήποτε η καθοδική διερεύνηση του G^T στη γραμμή 3 διεξέρχεται κάποια ισχυρά συνδεδεμένη συνιστώσα, όλες οι ακμές που εξέρχονται από αυτήν τη συνιστώσα θα πρέπει να απολήγουν σε συνιστώσες που έχουν ήδη διερευνηθεί.
- Επομένως, κάθε καθοδικό δένδρο θα αντιπροσωπεύει ακριβώς μια ισχυρά συνδεδεμένη συνιστώσα.

Θεώρημα

Η διαδικασία Ισχυρά Συνδεδεμένες Συνιστώσες(G) υπολογίζει ορθά τις ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες ενός κατευθυντού γραφήματος G.

Ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες

Ένας άλλος τρόπος θεώρησης της λειτουργίας της καθοδικής διερεύνησης είναι ο εξής.

- Θεωρήστε το γράφημα συνιστωσών $(G^T)^{\text{ΙΣΣ}}$ του G^T.
- Εάν αντιστοιχίσουμε κάθε ισχυρά συνδεδεμένη συνιστώσα που εξετάζεται στη δεύτερη καθοδική διερεύνηση σε έναν κόμβο του $(G^T)^{\text{ΙΣΣ}}$, οι κόμβοι του $(G^T)^{\text{ΙΣΣ}}$ εξετάζονται με σειρά αντίστροφη της τοπολογικής ταξινόμησης.
- Εάν αναστρέψουμε τις ακμές του γραφήματος $(G^T)^{\text{ΙΣΣ}}$, παίρνουμε το γράφημα $((G^T)^{\text{ΙΣΣ}})^T$.
- Δεδομένου ότι $((G^T)^{\text{ΙΣΣ}})^T = G^{\text{ΙΣΣ}}$, η δεύτερη καθοδική διερεύνηση διεξέρχεται τους κόμβους του $G^{\text{ΙΣΣ}}$ με τη σειρά της τοπολογικής ταξινόμησης