Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Ν. Μ. Μισυρλής

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών,
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εύρεση Ελάχιστου Μονοπατιού

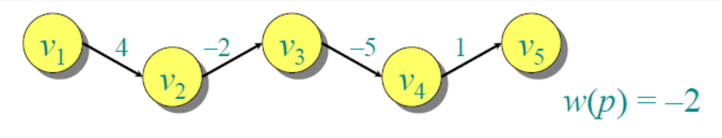
- Ιδιότητες ελάχιστου μονοπατιού
- Αλγόριθμος Dijkstra
- Πολυπλοκότητα
- Ορθότητα

Μονοπάτια σε γραφήματα

- Έστω γράφημα $G = (V, E)$ με συνάρτηση βάρους $w : E \to \mathbb{R}$. Τότε το βάρος ενός μονοπατιού $p = v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_k$ ορίζεται ως εξής:

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1}).$$

- Παράδειγμα



Ελάχιστα Μονοπάτια

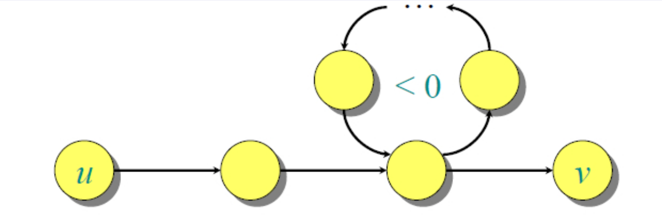
- Ελάχιστο μονοπάτι από τον κόμβο u στον v είναι ένα απλό μονοπάτι ελάχιστου βάρους από τον u στον v.
- Το βάρος του ελάχιστου μονοπατιού από τον u στον v ορίζεται ως

$$\delta(u, v) = min\{w(p) : p \text{ είναι ένα μονοπάτι από τον } u \text{ στον } v.\}$$

- $\delta(u, v) = \infty$ αν δεν υπάρχει μονοπάτι από τον u στον v.

Καλά Ορισμένα Ελάχιστα Μονοπάτια

- Αν ένα γράφημα G περιέχει κύκλο αρνητικού βάρους, τότε κάποια ελάχιστα μονοπάτια μπορεί να μην υπάρχουν.
- Παράδειγμα



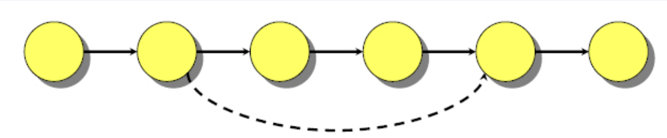
- $\delta(s, v) = -\infty$

Βέλτιστη Υποδομή

Theorem

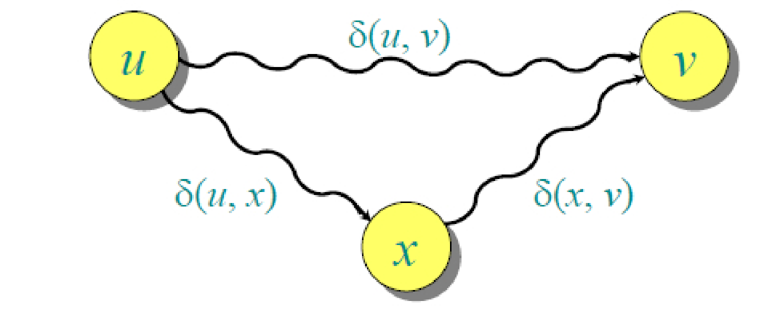
Ένα υπο-μονοπάτι ενός ελάχιστου μονοπατιού είναι ένα ελάχιστο μονοπάτι.

Κόψε και επικόλλησε: (cut and paste)



Τριγωνική Ανισότητα

- Έστω G ένα εμβαρές, κατευθυντό γράφημα με συνάρτηση βάρους w. Τότε
- $\delta(u, v) \leq \delta(u, x) + \delta(x, v)$



Ελάχιστα Μονοπάτια

- Πρόβλημα: Δεδομένου ενός αφετηριακού κόμβου $s \in V$, να βρεθούν τα βάρη των ελάχιστων μονοπατιών $\delta(s, v)$ για όλους τους $v \in V$
- Αν όλες οι ακμές έχουν μη αρνητικά βάρη $w(u, v)$, τότε όλα τα ελάχιστα μονοπάτια πρέπει να υπάρχουν.
- Ιδέα: Απληστία.
  1. Διατήρησε ένα συνόλο S κόμβων, των οποίων τα ελάχιστα μονοπάτια από τον s είναι γνωστά.
  2. Σε κάθε βήμα πρόσθεσε στο S τον κόμβο $v \in V - S$, του οποίου η εκτίμηση για την απόστασή του από τον s είναι ελάχιστη.
  3. Ενημέρωσε τις εκτιμήσεις των αποστάσεων των γειτονικών κόμβων του v.

Αλγόριθμος του Dijkstra

Dijkstra(G, w, s)

$d[s] \leftarrow 0$

for each $v \in V - \{s\}$

  do $d[v] \leftarrow \infty$

    $\pi[v] \leftarrow KENO$

$S \leftarrow \emptyset$

$Q \leftarrow V$ /* Q είναι μια ουρά προτεραιότητας που διατηρεί τις $V - S$ */

while $Q \neq \emptyset$

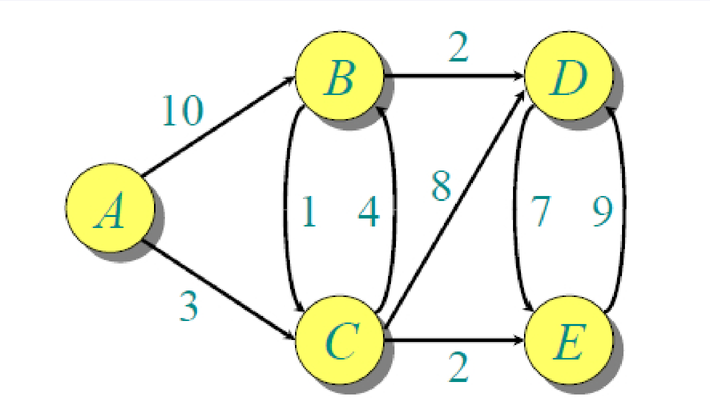
  do $u \leftarrow$ $\text{EXTRACT-MIN}(Q)$

    $S \leftarrow S \cup \{u\}$

    for each $v \in Adj[u]$

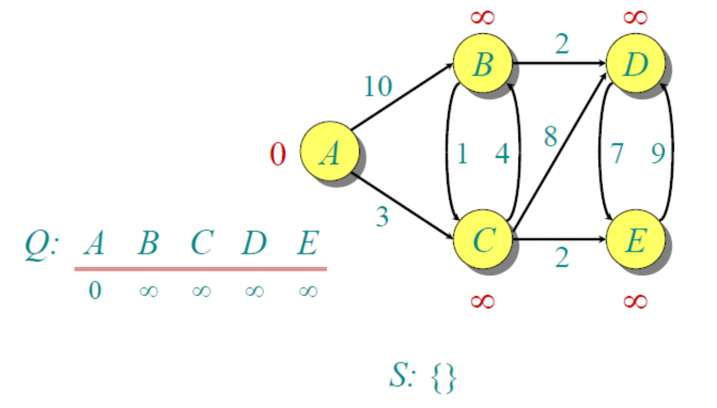
$$\left.\begin{array}{l} \text{do if } \quad d[v] > d[u] + w(u,v) \\ \quad \text{then } \quad d[v] \leftarrow d[u] + w(u,v) \\ \qquad\qquad \pi[v] \leftarrow u \end{array}\right\} \textit{Relaxation step}$$

Παράδειγμα Αλγορίθμου Dijkstra

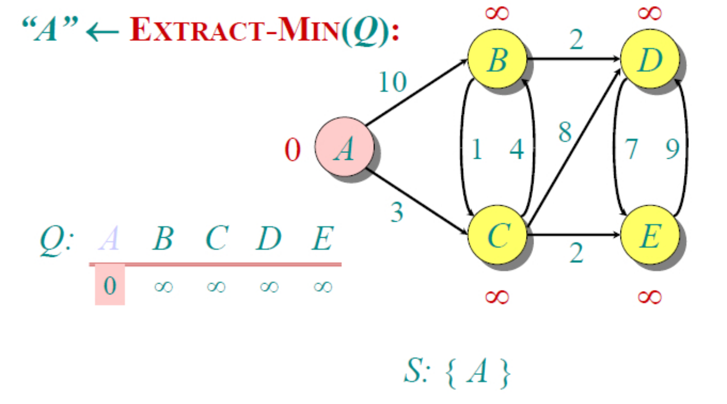


Παράδειγμα Αλγορίθμου Dijkstra

Αρχικοποίηση

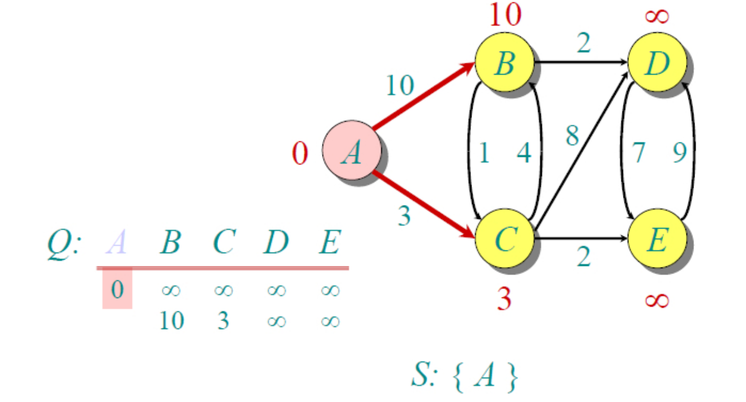


Παράδειγμα Αλγορίθμου Dijkstra

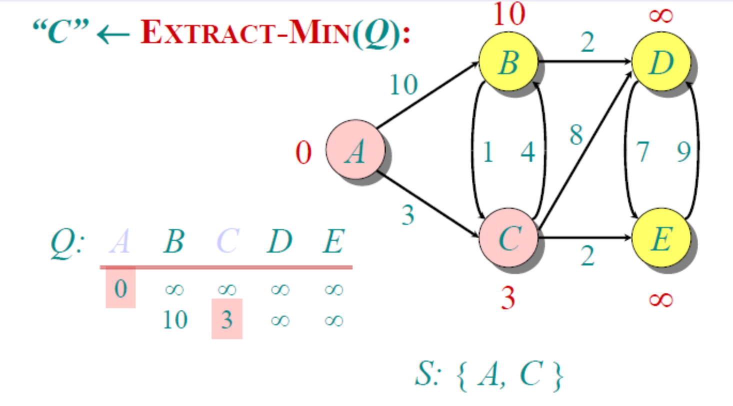


Παράδειγμα Αλγορίθμου Dijkstra

Χαλάρωση όλων των ακμών που ξεκινούν από την A.

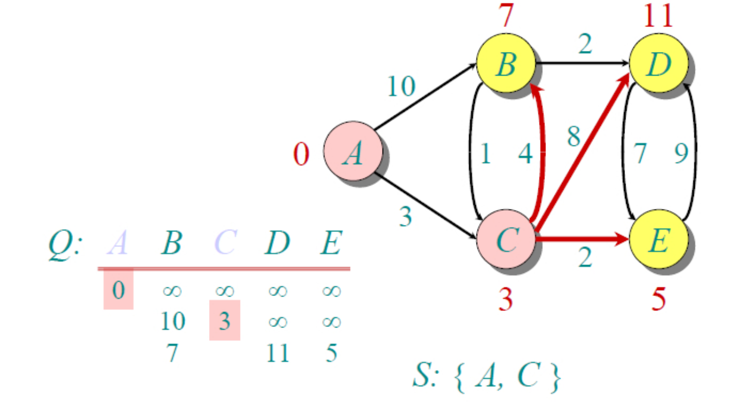


Παράδειγμα Αλγορίθμου Dijkstra

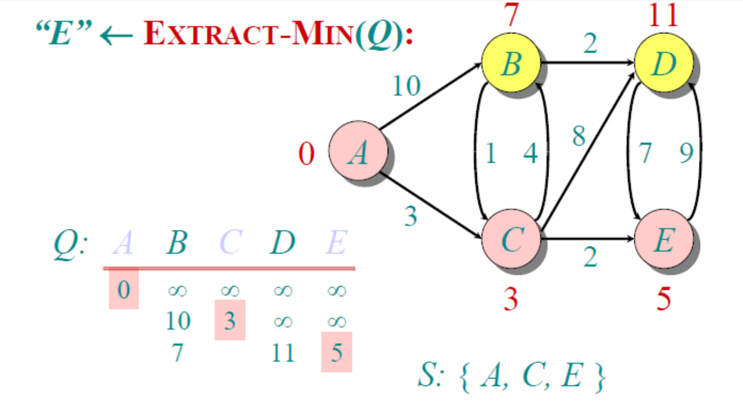


Παράδειγμα Αλγορίθμου Dijkstra

Χαλάρωση όλων των ακμών που ξεκινούν από την C.

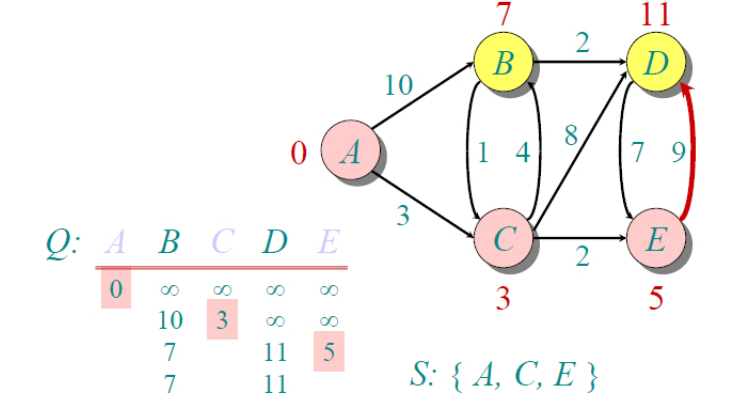


Παράδειγμα Αλγορίθμου Dijkstra

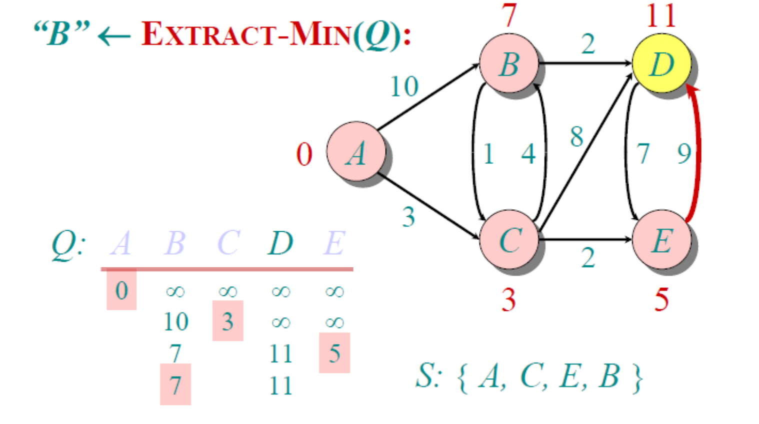


Παράδειγμα Αλγορίθμου Dijkstra

Χαλάρωση όλων των ακμών που ξεκινούν από την E.

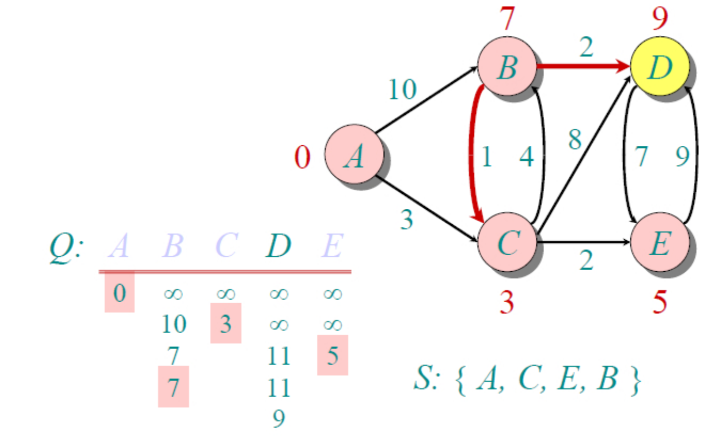


Παράδειγμα Αλγορίθμου Dijkstra



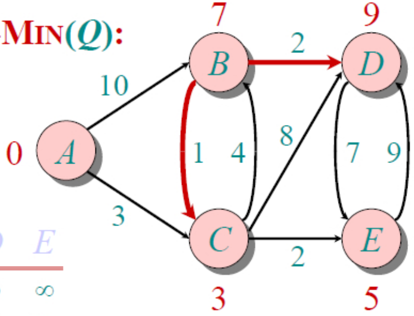
Παράδειγμα Αλγορίθμου Dijkstra

Χαλάρωση όλων των ακμών που ξεκινούν από την B.



Παράδειγμα Αλγορίθμου Dijkstra

"D" ← EXTRACT-MIN(Q):



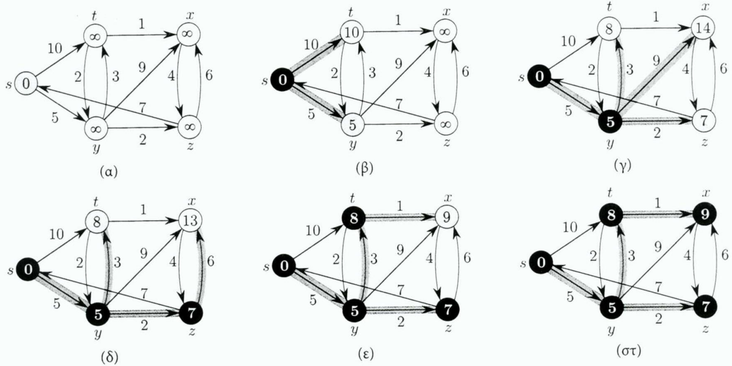
Q:

A	B	C	D	E
0	∞	∞	∞	∞
	10	3	∞	∞
	7		11	5
	7		11	
			9	

S: { A, C, E, B, D }

Παράδειγμα Αλγορίθμου Dijkstra

598 *Κεφάλαιο 24 Ομοαφετηριακές ελαφρύτατες διαδρομές*



Ορθότητα Ι

Lemma

Αρχικοποιώντας $d[s] \leftarrow 0$ *και* $d[v] \leftarrow \infty \quad \forall\, v \in V$ *ισχύει ότι*

$$d[v] \geq \delta(s, v) \ \ \forall v \in V$$

Η συνθήκη αυτή διατηρείται για οποιαδήποτε ακολουθία πράξεων χαλάρωσης στις ακμές του G *. Επιπλέον, από την στιγμή που* $d[v] = \delta(s, v)$ *η* $d[v]$ *δεν μεταβάλλεται ποτέ.*

Proof.

Με επαγωγή ως προς το πλήθος των πράξεων χαλάρωσης.
Βάση.

$$d[s] = 0 \geq \delta(s, s) \quad \delta(s, v) \leq \infty = d[v]$$

□

Ορθότητα I

Επαγωγικό βήμα.

Χαλάρωση της ακμής (u, v). Από την επαγωγική υπόθεση, έπεται ότι πριν από την πράξη χαλάρωσης ισχύει

$$d[x] \geq \delta(s, x) \quad \forall x \in V$$

$$\begin{aligned} d[v] &= d[u] + w(u, v) && \text{χαλάρωση} \\ &\geq \delta(s, u) + w(u, v) && \text{επαγωγική υπόθεση} \\ &= \delta(s, u) + \delta(u, v) \\ &\geq \delta(s, v) && \text{τριγωνική ανισότητα .} \end{aligned}$$

Ορθότητα (Ιδιότητα Σύγκλισης)ΙΙ

Lemma

Έστω u ο προκάτοχος του v στο ελάχιστο μονοπάτι από τον s στον v. Τότε, αν $d[u] = \delta(s, u)$ και εφαρμοστεί η χαλάρωση στην ακμή (u, v), έχουμε $d[v] = \delta(s, v)$ μετά την χαλάρωση.

Proof.

Από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε ότι $d[v] \geq \delta(s, v)$ πριν την χαλάρωση. Αν $d[v] = \delta(s, v)$ τελειώσαμε.
Αν $d[v] > \delta(s, v)$. Τότε, αν $d[v] > d[u] + w(u, v)$ εφαρμόζεται χαλάρωση και

$$d[v] \leq d[u] + w(u, v)$$

$$= \delta(s, u) + w(u, v) = \delta(s, v)$$

λόγω της υπόθεσης. Άρα λόγω της $d[v] \geq \delta(s, v)$ έπεται

$$d[v] = \delta(s, v)$$

Ορθότητα II

Lemma

Έστω $p =< v_0, v_1, ..., v_k >$ *μια ελαφρύτατη διαδρομή από τον* $s = v_0$ *στον* v_k *Τότε, αν εφαρμοστεί η χαλάρωση στις διαδοχικές ακμές της* p *, έχουμε*

$$d[v_k] = \delta(s, v_k)$$

και αυτό διατηρείται.

Proof.

Με επαγωγή. Βάση. Για $i = 0$ πριν από την χαλάρωση και λόγω ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ έχουμε $d[v_0] = d[s] = 0 = \delta(s, s)$.
Επαγωγικό βήμα. Υπόθεση $d[v_i] = \delta(v_{i-1}, v_i)$. Μετά την χαλάρωση της ακμής (v_{i-1}, v_i) και με βάση την ιδιότητα σύγκλισης

$$d[v_i] = \delta(s, v_i)$$

και αυτή διατηρείται.

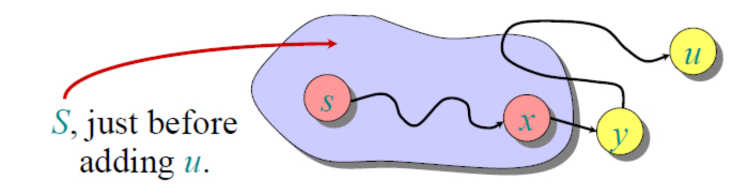
Ορθότητα III

Theorem

Ο αλγόριθμος του Dijkstra τερματίζει με $d[v] = \delta(s, v) \quad \forall\, v \in V$.

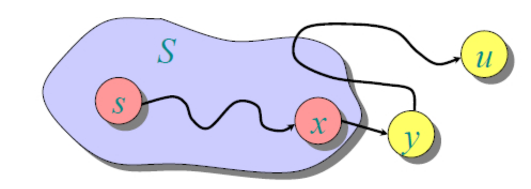
Proof.

Αρκεί να δείξουμε ότι $d[v] = \delta(s, v)$ για κάθε $v \in V$ όταν ο v προστίθεται στο S. Έστω u ο πρώτος κόμβος που εισάγεται στο S και $d[u] > \delta(s, u)$. Έστω y ο πρώτος κόμβος στο $V - S$ κατά μήκος του ελάχιστου μονοπατιού από τον s στον u και x ο προκάτοχός του:



□

Ορθότητα III (συν.)



Αφού ο u είναι ο πρώτος κόμβος που παραβιάζει τον ισχυρισμό μας, έχουμε $d[x] = \delta(s, x)$. Όταν ο x προστέθηκε στο S, εφαρμόστηκε η χαλάρωση στην ακμή (x, y), το οποίο συνεπάγεται

$$d[y] = \delta(s, y).$$

Ο κόμβος y προηγείται του u και όλα τα βάρη των ακμών είναι μη αρνητικά, συνεπώς

$$\delta(s, y) \leq \delta(s, u).$$

Ορθότητα III (συν.)

Συνοψίζοντας έχουμε τελικά ότι

$$d[y] = \delta(s, y) \leq \delta(s, u) \leq d[u]$$

όπου η τελευταία προκύπτει από την ιδιότητα του άνω φράγματος.
Αλλά, η επιλογή του u έγινε διότι

$$d[u] \leq d[y]$$

Συνεπώς οι ανωτέρω ανισότητες είναι ισότητες, δηλαδή

$$d[y] = \delta(s, y) = \delta(s, u) = d[u]$$

Τελικά

$$d[u] = \delta(s, u)$$

που αντιβαίνει στην υπόθεσή μας.

Ανάλυση του Dijkstra

$$
\left.\begin{array}{c}|V| \\ \textit{times}\end{array}\right.
\left\{\begin{array}{l}
\text{while } Q \neq \emptyset \\
\quad \text{do } u \leftarrow \textsc{Extract-Min}(Q) \\
\qquad S \leftarrow S \cup \{u\} \\
\begin{array}{c}degree(u) \\ \textit{times}\end{array}
\left\{\begin{array}{l}
\text{for each } v \in Adj[u] \\
\quad \text{do if } d[v] > d[u] + w(u,v) \\
\qquad \text{then } d[v] \leftarrow d[u] + w(u,v)
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

- $\Theta(E)$ ακριβώς $\textsc{Decrease-Key}$'s.
- Χρόνος = $\Theta(V \cdot T_{\textsc{Extract-Min}} + E \cdot T_{\textsc{Decrease-Key}})$
- Ίδια όπως στην ανάλυση του αλγορίθμου του Prim.

Ανάλυση του Dijkstra (συν.)

$$\text{Χρόνος} = \Theta(V \cdot T_{\textsc{Extract-Min}} + E \cdot T_{\textsc{Decrease-Key}})$$

Q	$T_{\textsc{Extract-Min}}$	$T_{\textsc{Decrease-Key}}$	Συνολικό
array	$O(V)$	$O(1)$	$O(V^2)$
binary Heap	$O(\log V)$	$O(\log V)$	$O(E \log V)$
fibonacci Heap	$O(\log V)$	$O(1)$	$O(E + V \log V)$

Ορθότητα III

Lemma

Υπόθεση: Δεν υπάρχει κύκλος με $w(p) < 0$.
Αν δοθούν αρχικές τιμές τότε το γράφημα G_π είναι δέντρο ελαφρύτατων διαδρομών με ρίζα τον s

Proof.

- Το G_π συνιστά έρριζο δένδρο με ριζικό κόμβο τον s
- Το G_π συνιστά έρριζο δένδρο ελαφρύτατων διαδρομών με ριζικό κόμβο τον s

$\square$

Ορθότητα III

Lemma

Υπόθεση: Δεν υπάρχει κύκλος με $w(p) < 0$.
Αν δοθούν αρχικές τιμές τότε το γράφημα G_π *συνιστά έρριζο δένδρο με ριζικό κόμβο τον* s

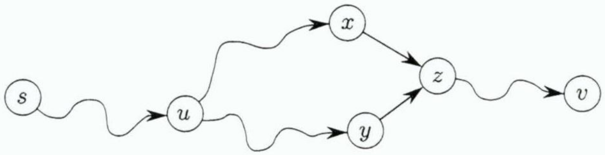
Proof.

- Έστω το G_π μετά από μια ακολουθία πράξεων χαλάρωσης, τότε αυτό είναι άκυκλο.
    - Έστω $c =< v_0, v_1, ..., v_k >$ κύκλος από την χαλάρωση της ακμής (v_{k-1}, v_k)
    - Οι κόμβοι του κύκλου είναι προσπελάσιμοι από τον s
    - Τότε, ΠΡΙΝ την χαλάρωση της ακμής (v_{k-1}, v_k) έχουμε $w(c) < 0$
    - Άτοπο. Συνεπώς το G_π είναι ένα κατευθυντό άκυκλο γράφημα.
- Για να δείξουμε ότι συνιστά έρριζο δένδρο με ρίζα το s αρκεί να δείξουμε ότι $\forall v \in V_\pi$ υπάρχει μια μοναδική διαδρομή p από τον s μέχρι τον v στο G_π
    - $\exists$ p από τον s $\forall v \in V$ (άσκηση).
    - $\forall v \in V_\pi$ $\exists$ το πολύ μία p από τον s στον v στο G_π

Μοναδικότητα διαδρομής

- $\forall v \in V_\pi \;\; \exists$ το πολύ μία p από τον s στον v στο G_π

614 *Κεφάλαιο 24 Ομοαφετηριακές ελαφρύτατες διαδρομές*



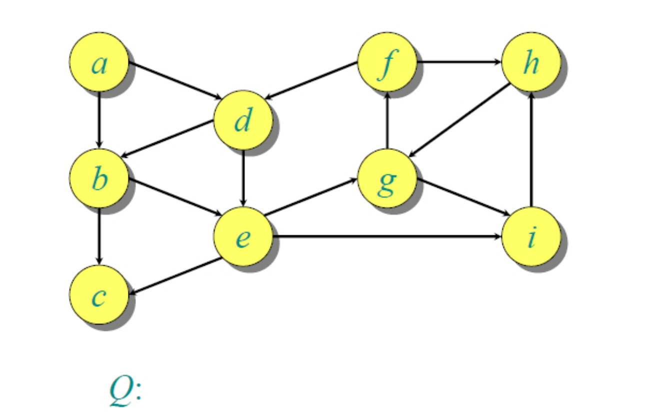
Γράφοι χωρίς Βάρη

- Θεωρήστε $w(u, v) = 1$ για όλες τις $(u, v) \in E$.
- Μπορεί να βελτιωθεί ο αλγόριθμος του Dijkstra ;
  - Χρησιμοποίησε μια ουρά FIFO αντί για ουρά προτεραιότητας
- Αναζήτηση Κατά-Πλάτος

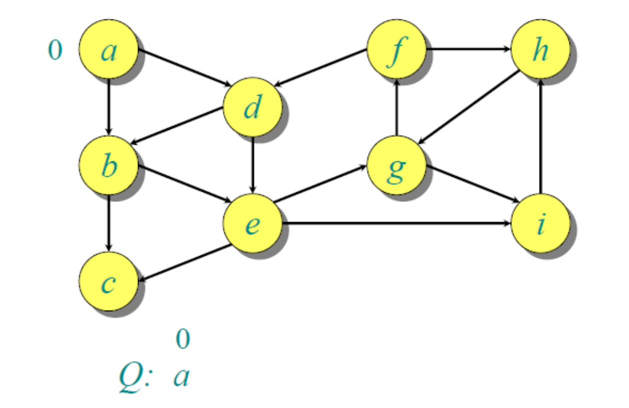
$$
\begin{array}{l}
\text{while } Q \neq \emptyset \\
\quad \text{do } u \leftarrow \textsc{Dequeue}(Q) \\
\quad\quad \text{for each } v \in Adj[u] \\
\quad\quad\quad \text{do if } d[u] = \infty \\
\quad\quad\quad\quad \text{then } d[v] \leftarrow d[u] + 1 \\
\quad\quad\quad\quad\quad \textsc{Enqueue}(Q, v)
\end{array}
$$

- Χρόνος = $O(V + E)$.

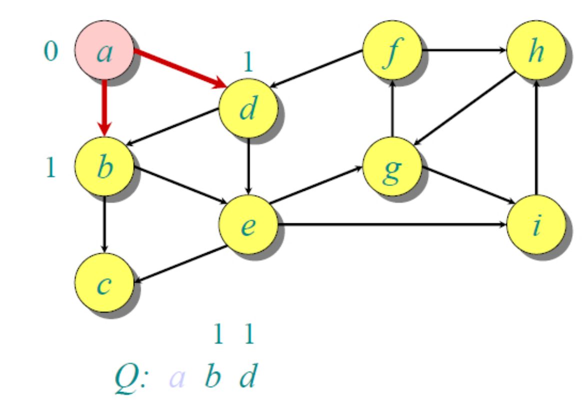
Παράδειγμα Αλγορίθμου Αναζήτησης Κατά-Πλάτος



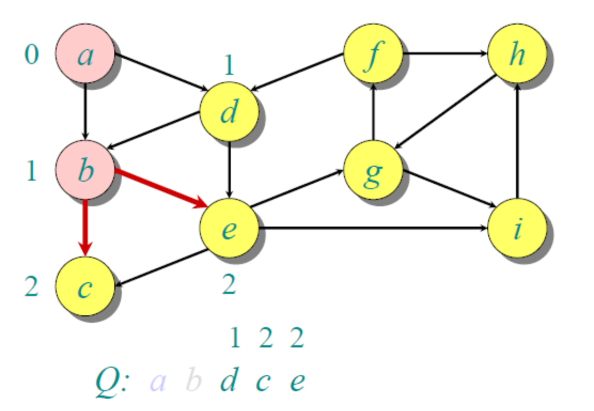
Παράδειγμα Αλγορίθμου Αναζήτησης Κατά-Πλάτος



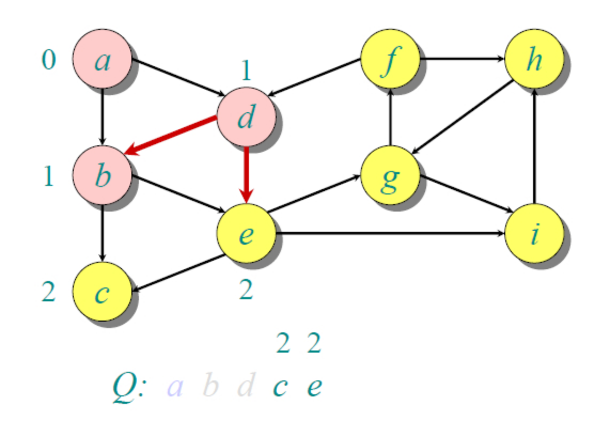
Παράδειγμα Αλγορίθμου Αναζήτησης Κατά-Πλάτος



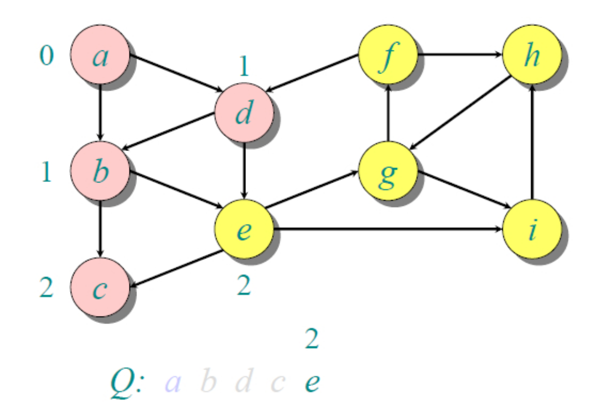
Παράδειγμα Αλγορίθμου Αναζήτησης Κατά-Πλάτος



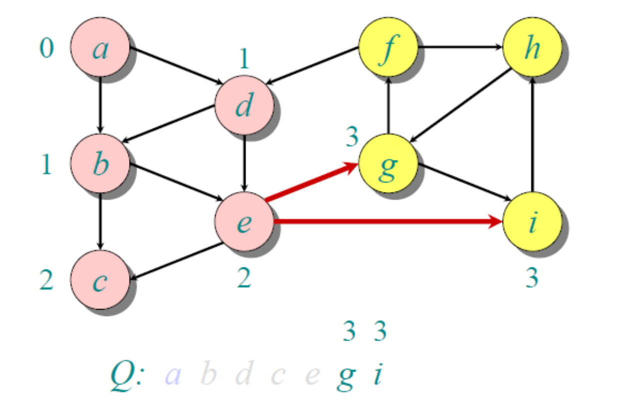
Παράδειγμα Αλγορίθμου Αναζήτησης Κατά-Πλάτος



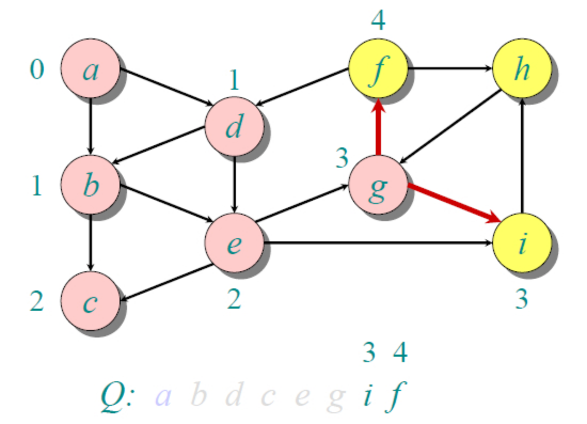
Παράδειγμα Αλγορίθμου Αναζήτησης Κατά-Πλάτος



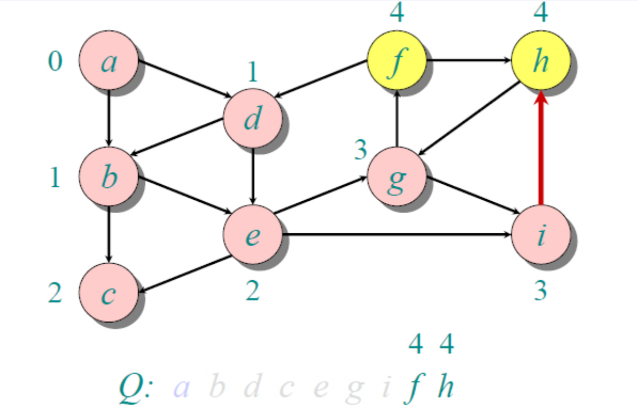
Παράδειγμα Αλγορίθμου Αναζήτησης Κατά-Πλάτος



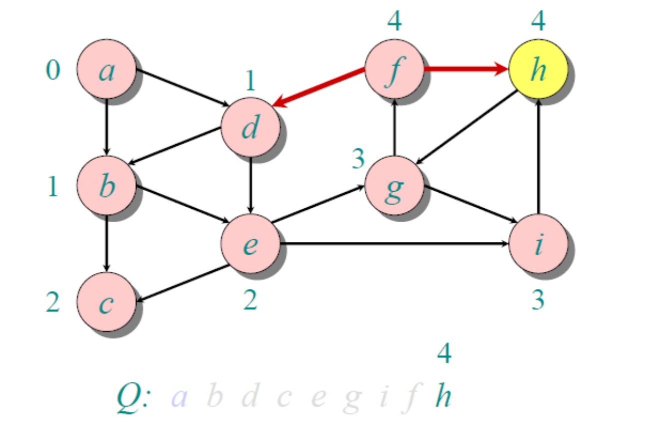
Παράδειγμα Αλγορίθμου Αναζήτησης Κατά-Πλάτος



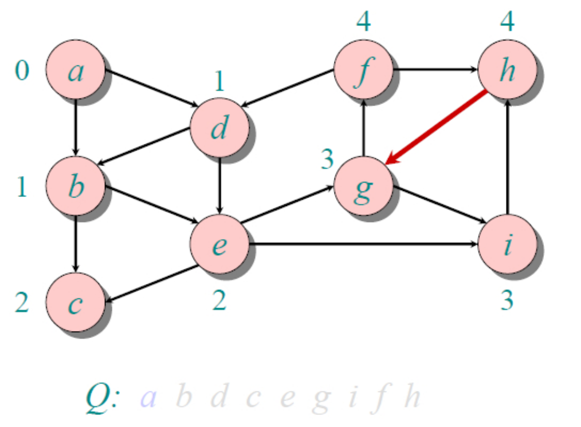
Παράδειγμα Αλγορίθμου Αναζήτησης Κατά-Πλάτος



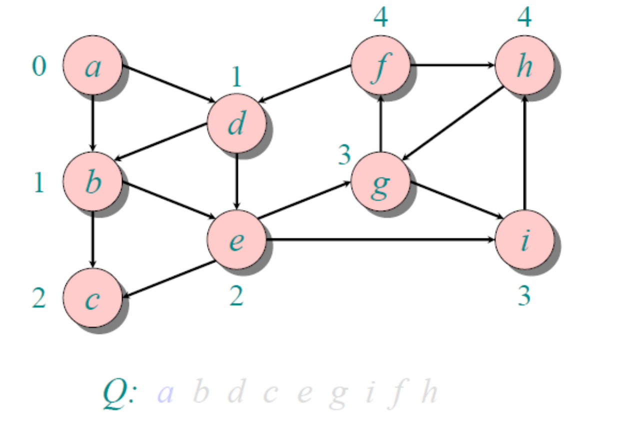
Παράδειγμα Αλγορίθμου Αναζήτησης Κατά-Πλάτος



Παράδειγμα Αλγορίθμου Αναζήτησης Κατά-Πλάτος



Παράδειγμα Αλγορίθμου Αναζήτησης Κατά-Πλάτος



Ορθότητα του Αλγορίθμου Αναζήτησης Κατά-Πλάτος

while $Q \neq \emptyset$
 do $u \leftarrow \textsc{Dequeue}(Q)$
  for each $v \in Adj[u]$
   do if $d[n] = \infty$
    then $d[v] \leftarrow d[u] + 1$
     $\textsc{Enqueue}(Q, v)$

- **Βασική Ιδέα:** Η ουρά FIFO Q στην αναζήτηση κατά πλάτος μιμείται την ουρά προτεραιότητας Q του Dijkstra
- Το γεγονός ότι η v έρχεται μετά την u στην Q συνεπάγεται ότι $d[v] = d[u]$ ή $d[v] = d[u] + 1$.