



NP Completeness

- Προβλήματα απόφασης (Decision problems)
- Εύκολα και δύσκολα προβλήματα
- Η κλάση NP
- NP complete προβλήματα



NP Completeness

- Μερικά προβλήματα είναι δυσεπίλυτα (intractable): όσο μεγαλώνουν, αδύνατο να τα λύσουμε σε λογικό χρόνο
- Τι σημαίνει λογικός χρόνος?
 - Πολυωνυμικός χρόνος
 - Όχι πολυωνυμικός χρόνος



Προβλήματα Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης (ΠΣΒ)

- $\langle S, f \rangle$: στιγμιότυπο (instance)
- $S = \{\text{feasible solutions}\}$ – πεπερασμένο
- f : objective function
- $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ (ή \mathbb{N})
- ζητούμενο:

$$f(s^*) = \min_{s \in S} \{f(s)\}$$



Προβλήματα απόφασης (ύπαρξης)

- Αναζήτηση μέσα σε ένα πεπερασμένο σύνολο S αν υπάρχει ένα στοιχείο s που ικανοποιεί μια δεδομένη ιδιότητα P
(απάντηση 'ΝΑΙ' ή 'ΟΧΙ')
- εισαγωγή στα δεδομένα ενός ακεραίου αριθμού k με την ιδιότητα: " $f(s) \leq k$ "



Παράδειγμα

- $G=(X, U, C), s, t \in X$
- ΠΣΒ: $S=\{ \mu \}$
 $f: S \rightarrow R$
 $\mu \rightarrow f(\mu) = \sum_{(i,j) \in \mu} c_{ij}$
- Ζητούμενο: **Ελάχιστο** μονοπάτι από s προς t
- **ΠΑ:** Έστω $k \in N$. Υπάρχει μονοπάτι μ από s προς t με κόστος το πολύ k ?



Παράδειγμα

- ΠΣΒ: 0-1 knapsack

a, c : n -vectors, $b \in \mathbb{N}$

Ζητούμενο: Εύρεση υποσυνόλου δεικτών με συνολική τιμή **μέγιστη** και ολικό βάρος $\leq b$

- **ΠΑ**: Υπάρχει λύση με τιμή $\geq k$



Προβλήματα απόφασης

- $PA \rightarrow PΣB$
- $PΣB \rightarrow PA$
- Αλγόριθμος για $PA \Rightarrow$ αλγόριθμος για $PΣB$

Πρόβλημα Απόφασης – Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

Αν έχουμε έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο A για
το πρόβλημα Απόφασης τότε



έχουμε έναν επίσης πολυωνυμικό αλγόριθμο για
το ΠΣΒ

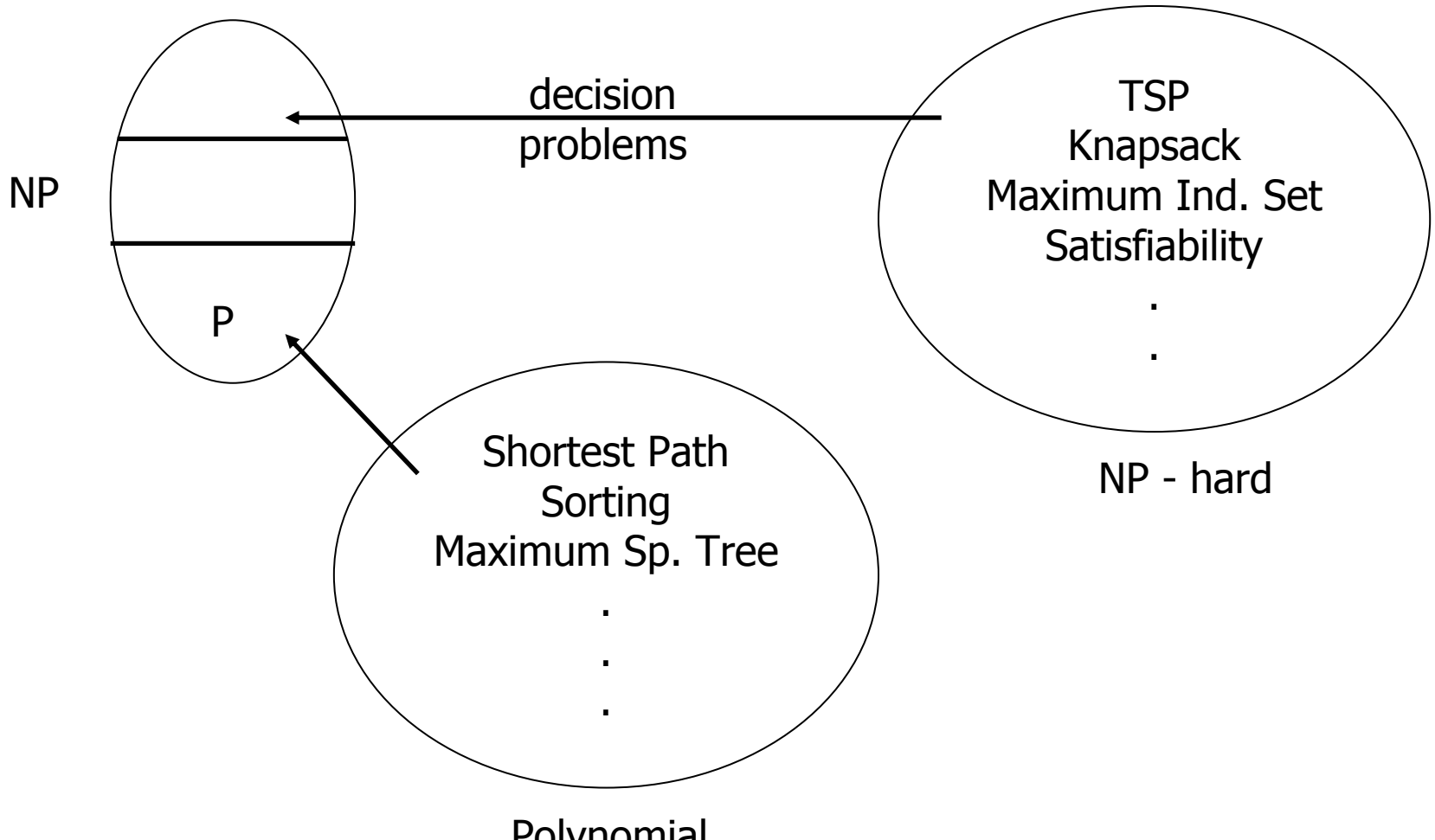




Προβλήματα εύκολα - δύσκολα

- Εύκολα: ύπαρξη αποτελεσματικού αλγορίθμου (πολυωνυμικού)
- Δύσκολα: οι γνωστοί αλγόριθμοι είναι εκθετικοί!

Προβλήματα Απόφασης





Θεωρία πολυπλοκότητας (~1970)

- Υπάρχει πραγματικά μια κατηγορία προβλημάτων ΣΒ για τα οποία δε θα βρούμε ποτέ πολ/κούς αλγορίθμους
- ή μήπως τα δύσκολα προβλήματα επιδέχονται τέτοιους αλγορίθμους οι οποίοι δεν έχουν ακόμα ανακαλυφθεί ??

- Εικασία: ύπαρξη μιας κατηγορίας προβλημάτων ουσιαδώς δύσκολα (TSP)



Θεωρία πολυπλοκότητας

- Η θεωρία πολυπλοκότητας επεξεργάζεται μόνο προβλήματα απόφασης
- Ένα ΠΣΒ είναι το λιγότερο το ίδιο δύσκολο όσο το αντίστοιχό του ΠΑ
- Αν το ΠΑ είναι δύσκολο, τότε το ΠΣΒ είναι επίσης δύσκολο



Θεμελιώδες αποτέλεσμα

- Όλα τα δύσκολα προβλήματα είναι συνδεδεμένα
- Η ανακάλυψη ενός πολυωνυμικού αλγορίθμου για ένα από αυτά θα επέτρεπε να σχεδιάσουμε έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο για όλα τα άλλα