

Ιδιότητες στις τάξεις μεγέθους

Θετικές συναρτήσεις f, f_1, f_2

a) $f(n) = O(f(n))$

b) $f(n) = \Theta(f(n))$

c) $c O(f(n)) = O(f(n))$

d) $O(f(n)) + O(f(n)) = O(f(n))$

e) $O(f_1(n)) + O(f_2(n)) = O(\max(f_1(n), f_2(n)))$

f) $O(f_1(n)) \cdot O(f_2(n)) = O(f_1(n) \cdot f_2(n))$

Έστω $T1(n) = O(f(n))$ και $T2(n) = O(g(n))$ οι πολυπλοκότητες δύο τμημάτων $P1$ και $P2$ ενός προγράμματος P . Το τμήμα $P2$ εκτελείται μετά το $P1$. Ποια είναι η πολυπλοκότητα του προγράμματος P ;

Ακολουθία από βήματα:

$$O(n^2), O(n^3), O(n \log n)$$

$$O(\max(n^2, n^3)) = O(n^3)$$

$$O(\max(n^3, n \log n)) = O(n^3)$$

$$\mathbf{O(n^2+n) = O(n^2)}$$

Απόδειξη ε)

Αν $g(n) \in O(f_1(n)) + O(f_2(n))$ υπάρχουν c_1 και c_2 , n_1
και n_2 :

$$g(n) \leq c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n), \quad \forall n > n_1, n_2$$

Αν $c = \max\{c_1, c_2\}$, $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow$

$$g(n) \leq c(f_1(n) + f_2(n)) \leq 2c \max\{f_1(n), f_2(n)\}, \\ \forall n > n_0$$

Ιδιότητες πραγματικών αριθμών → ασυμπτωτικές συγκρίσεις

$$\left. \begin{array}{l} f(n) = \Theta(g(n)) \\ g(n) = \Theta(h(n)) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} O(h(n)) \\ f(n) = \Theta(h(n)) \\ \Omega(h(n)) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} O(f(n)) \\ f(n) = \Theta(f(n)) \\ \Omega(f(n)) \end{array}$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$$

συνέχεια...

Ιδιότητες πραγματικών αριθμών \longrightarrow ασυμπτωτικές συγκρίσεις

$$f(n) = O(g(n)) \approx a \leq b$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \approx a \geq b$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \approx a = b$$

$a, b \in \mathcal{R} \Rightarrow a < b, a = b, a > b$ (πάντοτε συγκρίσιμοι)

$f(n), g(n)$ είναι ασυμπτωτικά συγκρίσιμες ?

Όχι πάντα, π.χ

$f(n) = O(g(n))$ ούτε $f(n) = \Omega(g(n))$

$$f(n) = n, \quad g(n) = n^{1+\sin(n)}$$

εκθέτης $[0, 2]$

✱ Έστω $a > 1$ και $f(n) = O(\log_a n) \Rightarrow f(n) = O(\log n)$

Απόδειξη:

$$f(n) \leq c \log_a n = c \frac{\log n}{\log a} \leq c' \log n$$

Άρα $f(n) = O(\log n)$

✱ Έχουμε $\log(n!) = O(n \log n)$

Απόδειξη:

$$n! = n(n-1)\dots 2.1 \leq$$

$$n \dots n = n^n \Rightarrow$$

$$\log(n!) \leq n \log n$$

$$i. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a \neq 0 \Rightarrow f = \Theta(g)$$

$$ii. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f = O(g) \text{ και } f \neq \Theta(g)$$

$$iii. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Rightarrow g = O(f) \text{ και } g \neq \Theta(f)$$

όπου f και g θετικές συναρτήσεις

Απόδειξη του i.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a \neq 0 \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0: \left| \frac{f(n)}{g(n)} - a \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|a - \varepsilon| < \frac{f(n)}{g(n)} < a + \varepsilon \Rightarrow$$

$$(a - \varepsilon)g(n) < f(n) < (a + \varepsilon)g(n) \xrightarrow[\theta \varepsilon \tau.]{f, g}$$

$$f(n) < (a + \varepsilon)g(n) \Rightarrow f = O(g)$$

$$g(n) < \frac{1}{a - \varepsilon} f(n) \Rightarrow g = O(f)$$

Να δοθεί ο καλύτερος “big O” συμβολισμός για τις ακόλουθες εκφράσεις:

a) $2\log n - 4n + 3n\log n$

b) $2+4+\dots+2n$

c)
$$\frac{(n^2+\log n)(n-1)}{n+n^2}$$

d) $2+4+8+\dots+2^n$

1) Δείξτε ότι για πραγματικούς a και b , $b > 0$ έχουμε
 $(n+a)^b = \Theta(n^b)$

2) $2^{n+1} = O(2^n)$

3) Είναι $2^{2n} = O(2^n)$?

4) $x \in \mathbb{R} : x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$
 $\forall n \in \mathbb{N}: \lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor = n$

1) Να δειχθεί ότι:

$$\sum_{k=1}^n k n = O(n^3)$$

2) Αν $f(n) = O(n)$ τότε $(f(n))^2 = O(n^2)$

3) $f(n) = O(n)$ τότε $2^{f(n)}$ δεν είναι $O(2^n)$