

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Στρογγυλοποίηση Γραμμικών Προγραμμάτων

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στόχος διάλεξης: Θα δείξουμε πως να σχεδιάζουμε *προσεγγιστικούς* αλγόριθμους για NP-hard προβλήματα σε *πολυωνυμικό* χρόνο, μέσω *στρογγυλοποίησης γραμμικών προγραμμάτων*.

Δοθέντος γράφου $G(V, E)$ να βρεθεί ένα σύνολο κορυφών $V^* \subseteq V$ ελάχιστης πληθικότητας έτσι ώστε καθε ακμή $e \in E$ έχει τουλάχιστον ένα άκρο της στο V^* .

Δοθέντος γράφου $G(V, E)$ να βρεθεί ένα σύνολο κορυφών $V^* \subseteq V$ ελάχιστης πληθικότητας έτσι ώστε καθε ακμή $e \in E$ έχει τουλάχιστον ένα άκρο της στο V^* .

- Το πρόβλημα αυτό είναι NP-hard, οπότε θα σχεδιάσουμε έναν αλγόριθμο που βρίσκει ένα κάλυμμα κορυφών $\hat{V}$ ώστε $|\hat{V}| \leq 2|V^*|$
- Μέσω άπληστου αλγόριθμου.
- Μέσω στρογγυλοποίησης γραμμικού προγράμματος.

Άπληστος αλγόριθμος

- 1: $\hat{V} \leftarrow \emptyset, F \leftarrow E$
- 2: Όσο $F \neq \emptyset$ (υπάρχει ακάλυπτη ακμή)
- 3: Επέλεξε οποιαδήποτε ακμή $e = (u, v)$
- 4: $\hat{V} = \hat{V} \cup \{u, v\}$
- 5: $F := F \setminus \{e \in E : u \in e \text{ or } v \in e\}$
- 6: Επέστρεψε το $\hat{V}$

Ανάλυση: Έστω V^* η βέλτιστη λύση.

Άπληστος αλγόριθμος

- 1: $\hat{V} \leftarrow \emptyset, F \leftarrow E$
- 2: Όσο $F \neq \emptyset$ (υπάρχει ακάλυπτη ακμή)
- 3: Επέλεξε οποιαδήποτε ακμή $e = (u, v)$
- 4: $\hat{V} = \hat{V} \cup \{u, v\}$
- 5: $F := F \setminus \{e \in E : u \in e \text{ or } v \in e\}$
- 6: Επέστρεψε το $\hat{V}$

Ανάλυση: Έστω V^* η βέλτιστη λύση. Τότε, η βέλτιστη λύση στη γραμμή 4 καλύπτει την ακμή e με τουλάχιστον ένα άκρο, άρα $|V^*|$ είναι τουλάχιστον το πλήθος εκτελέσεων του βρόγχου

Άπληστος αλγόριθμος

- 1: $\hat{V} \leftarrow \emptyset, F \leftarrow E$
- 2: Όσο $F \neq \emptyset$ (υπάρχει ακάλυπτη ακμή)
- 3: Επέλεξε οποιαδήποτε ακμή $e = (u, v)$
- 4: $\hat{V} = \hat{V} \cup \{u, v\}$
- 5: $F := F \setminus \{e \in E : u \in e \text{ or } v \in e\}$
- 6: Επέστρεψε το $\hat{V}$

Ανάλυση: Έστω V^* η βέλτιστη λύση. Τότε, η βέλτιστη λύση στη γραμμή 4 καλύπτει την ακμή e με τουλάχιστον ένα άκρο, άρα $|V^*|$ είναι τουλάχιστον το πλήθος εκτελέσεων του βρόγχου. Όμως $|\hat{V}|$ είναι το πολύ δύο φορές το πλήθος εκτελέσεων του βρόγχου.

Γραμμικό Πρόγραμμα

Θα δώσουμε μια εναλλακτική προσέγγιση, μέσω στρογγυλοποίησης γραμμικού προγράμματος.

Θα δώσουμε μια εναλλακτική προσέγγιση, μέσω στρογγυλοποίησης γραμμικού προγράμματος.

Για κάθε κορυφή $u \in V$ έχουμε μια μεταβλητή x_u , η οποία υποδηλώνει κατά πόσο διαλέξαμε την ακμή.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \sum_{u \in V} x_u \\ & x_u + x_v \geq 1, \forall e = (u, v) \in E \\ & x_u \geq 0, \forall u \in V \end{aligned}$$

Πως στρογγυλοποιώ?

Γραμμικό Πρόγραμμα

Θα δώσουμε μια εναλλακτική προσέγγιση, μέσω στρογγυλοποίησης γραμμικού προγράμματος.

Για κάθε κορυφή $u \in V$ έχουμε μια μεταβλητή x_u , η οποία υποδηλώνει κατά πόσο διαλέξαμε την ακμή.

$$\begin{aligned} \text{minimize } & \sum_{u \in V} x_u \\ & x_u + x_v \geq 1, \forall e = (u, v) \in E \\ & x_u \geq 0, \forall u \in V \end{aligned}$$

Πως στρογγυλοποιώ? Φτιάχνω $\hat{V} := \{u \in V : x_u \geq \frac{1}{2}\}$.

Γραμμικό Πρόγραμμα

Θα δώσουμε μια εναλλακτική προσέγγιση, μέσω στρογγυλοποίησης γραμμικού προγράμματος.

Για κάθε κορυφή $u \in V$ έχουμε μια μεταβλητή x_u , η οποία υποδηλώνει κατά πόσο διαλέξαμε την ακμή.

$$\begin{aligned} \text{minimize } & \sum_{u \in V} x_u \\ & x_u + x_v \geq 1, \forall e = (u, v) \in E \\ & x_u \geq 0, \forall u \in V \end{aligned}$$

Πως στρογγυλοποιώ? Φτιάχνω $\hat{V} := \{u \in V : x_u \geq \frac{1}{2}\}$.

$\hat{V}$ είναι Έγκυρο Κάλυμμα. Για ακμή $e = (u, v) \in E$ τουλάχιστον μία από τις u, v έχει x -τιμή $\geq \frac{1}{2}$ λόγω της ανισότητας $x_u + x_v \geq 1$,

$\hat{V}$ είναι Έγκυρο Κάλυμμα. Για ακμή $e = (u, v) \in E$ τουλάχιστον μία από τις u, v έχει x -τιμή $\geq \frac{1}{2}$ λόγω της ανισότητας $x_u + x_v \geq 1$, άρα τουλάχιστον ένα από τα u, v θα ανήκει στο $\hat{V}$.

$\hat{V}$ είναι Έγκυρο Κάλυμμα. Για ακμή $e = (u, v) \in E$ τουλάχιστον μία από τις u, v έχει x -τιμή $\geq \frac{1}{2}$ λόγω της ανισότητας $x_u + x_v \geq 1$, άρα τουλάχιστον ένα από τα u, v θα ανήκει στο $\hat{V}$.

Ανάλυση μεγέθους $\hat{V}$. Έχουμε ότι

$$|\hat{V}| \leq \sum_{u \in \hat{V}} 1 \leq \sum_{u \in \hat{V}} 2 \cdot x_u$$

$\hat{V}$ είναι Έγκυρο Κάλυμμα. Για ακμή $e = (u, v) \in E$ τουλάχιστον μία από τις u, v έχει x -τιμή $\geq \frac{1}{2}$ λόγω της ανισότητας $x_u + x_v \geq 1$, άρα τουλάχιστον ένα από τα u, v θα ανήκει στο $\hat{V}$.

Ανάλυση μεγέθους $\hat{V}$. Έχουμε ότι

$$|\hat{V}| \leq \sum_{u \in \hat{V}} 1 \leq \sum_{u \in \hat{V}} 2 \cdot x_u \leq 2 \cdot \sum_{u \in V} x_i$$

$\hat{V}$ είναι Έγκυρο Κάλυμμα. Για ακμή $e = (u, v) \in E$ τουλάχιστον μία από τις u, v έχει x -τιμή $\geq \frac{1}{2}$ λόγω της ανισότητας $x_u + x_v \geq 1$, άρα τουλάχιστον ένα από τα u, v θα ανήκει στο $\hat{V}$.

Ανάλυση μεγέθους $\hat{V}$. Έχουμε ότι

$$|\hat{V}| \leq \sum_{u \in \hat{V}} 1 \leq \sum_{u \in \hat{V}} 2 \cdot x_u \leq 2 \cdot \sum_{u \in V} x_u \leq 2|V^*|,$$

όπου η δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιεί ότι $x_u \geq \frac{1}{2}, \forall u \in \hat{V}$,

$\hat{V}$ είναι Έγκυρο Κάλυμμα. Για ακμή $e = (u, v) \in E$ τουλάχιστον μία από τις u, v έχει x -τιμή $\geq \frac{1}{2}$ λόγω της ανισότητας $x_u + x_v \geq 1$, άρα τουλάχιστον ένα από τα u, v θα ανήκει στο $\hat{V}$.

Ανάλυση μεγέθους $\hat{V}$. Έχουμε ότι

$$|\hat{V}| \leq \sum_{u \in \hat{V}} 1 \leq \sum_{u \in \hat{V}} 2 \cdot x_u \leq 2 \cdot \sum_{u \in V} x_u \leq 2|V^*|,$$

όπου η δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιεί ότι $x_u \geq \frac{1}{2}, \forall u \in \hat{V}$, και η τελευταία ότι το αριστερά μέλος είναι το βέλτιστο κόστος του γραμμικού προγράμματος και το δεξιά μέλος το βέλτιστο της ακέραιας λύσης.

Ταίριασμα σε Υπεργραφήματα

Ένας υπεργράφος $G(V, E)$ είναι ένα σύνολο με κορυφές στο V και ακμές στο E , όπου οι ακμές είναι υποσύνολα του V , πχ $\{a, b, e\}, \{a, b, c, d\}, \{e, f\}$.

Ταίριασμα σε Υπεργραφήματα: Δοθέντος υπεργράφου $G(V, E)$ να βρεθεί ένα υποσύνολο $M^* \subseteq E$ ώστε $e \cap e' = \emptyset, \forall e, e' \in M^*, e \neq e'$ και M^* μέγιστου δυνατού μεγέθους.

Ταίριασμα σε Υπεργραφήματα

Ένας υπεργράφος $G(V, E)$ είναι ένα σύνολο με κορυφές στο V και ακμές στο E , όπου οι ακμές είναι υποσύνολα του V , πχ $\{a, b, e\}, \{a, b, c, d\}, \{e, f\}$.

Ταίριασμα σε Υπεργραφήματα: Δοθέντος υπεργράφου $G(V, E)$ να βρεθεί ένα υποσύνολο $M^* \subseteq E$ ώστε $e \cap e' = \emptyset, \forall e, e' \in M^*, e \neq e'$ και M^* μέγιστου δυνατού μεγέθους.

Είναι NP-δύσκολο, οπότε θα σχεδιάσουμε προσεγγιστικό αλγόριθμο.

Προσεγγιστικός αλγόριθμος για ταιριάσματα σε 3-ομοιόμορφους υπεργράφους

Ορίζουμε $N(e) := \{f \in E \mid f \cap e \neq \emptyset\}$.

- 1: $M \leftarrow \emptyset, F \leftarrow E$
- 2: Όσο $F \neq \emptyset$
- 3: Επέλεξε υπέρ-ακμή $e \in F$ και πρόσθεσέ τη στο M
- 4: Αφαίρεσε όλες τις ακμές $N(e)$ από το F
- 5: Επέστρεψε το M

Ανάλυση:

Προσεγγιστικός αλγόριθμος για ταιριάσματα σε 3-ομοιόμορφους υπεργράφους

Ορίζουμε $N(e) := \{f \in E \mid f \cap e \neq \emptyset\}$.

- 1: $M \leftarrow \emptyset, F \leftarrow E$
- 2: Όσο $F \neq \emptyset$
- 3: Επέλεξε υπέρ-ακμή $e \in F$ και πρόσθεσέ τη στο M
- 4: Αφαίρεσε όλες τις ακμές $N(e)$ από το F
- 5: Επέστρεψε το M

Ανάλυση: Για κάθε υπέρ-ακμή $e^* \in M^*$ υπάρχει $e \in M$ ώστε $e \cap e^* \neq \emptyset$.

Προσεγγιστικός αλγόριθμος για ταιριάσματα σε 3-ομοιόμορφους υπεργράφους

Ορίζουμε $N(e) := \{f \in E \mid f \cap e \neq \emptyset\}$.

- 1: $M \leftarrow \emptyset, F \leftarrow E$
- 2: Όσο $F \neq \emptyset$
- 3: Επέλεξε υπέρ-ακμή $e \in F$ και πρόσθεσέ τη στο M
- 4: Αφαίρεσε όλες τις ακμές $N(e)$ από το F
- 5: Επέστρεψε το M

Ανάλυση: Για κάθε υπέρ-ακμή $e^* \in M^*$ υπάρχει $e \in M$ ώστε $e \cap e^* \neq \emptyset$.
Άρα όλες οι ακμές $e \in M$ καλύπτουν τουλάχιστον $|M^*|$ κόμβους,

Προσεγγιστικός αλγόριθμος για ταιριάσματα σε 3-ομοιόμορφους υπεργράφους

Ορίζουμε $N(e) := \{f \in E \mid f \cap e \neq \emptyset\}$.

- 1: $M \leftarrow \emptyset, F \leftarrow E$
- 2: Όσο $F \neq \emptyset$
- 3: Επέλεξε υπέρ-ακμή $e \in F$ και πρόσθεσέ τη στο M
- 4: Αφαίρεσε όλες τις ακμές $N(e)$ από το F
- 5: Επέστρεψε το M

Ανάλυση: Για κάθε υπέρ-ακμή $e^* \in M^*$ υπάρχει $e \in M$ ώστε $e \cap e^* \neq \emptyset$. Άρα όλες οι ακμές $e \in M$ καλύπτουν τουλάχιστον $|M^*|$ κόμβους, όλες οι ακμές στο M^* αγγίζουν $3|M^*|$ κόμβους,

Προσεγγιστικός αλγόριθμος για ταιριάσματα σε 3-ομοιόμορφους υπεργράφους

Ορίζουμε $N(e) := \{f \in E \mid f \cap e \neq \emptyset\}$.

- 1: $M \leftarrow \emptyset, F \leftarrow E$
- 2: Όσο $F \neq \emptyset$
- 3: Επέλεξε υπέρ-ακμή $e \in F$ και πρόσθεσέ τη στο M
- 4: Αφαίρεσε όλες τις ακμές $N(e)$ από το F
- 5: Επέστρεψε το M

Ανάλυση: Για κάθε υπέρ-ακμή $e^* \in M^*$ υπάρχει $e \in M$ ώστε $e \cap e^* \neq \emptyset$. Άρα όλες οι ακμές $e \in M$ καλύπτουν τουλάχιστον $|M^*|$ κόμβους, όλες οι ακμές στο M^* αγγίζουν $3|M^*|$ κόμβους, άρα $|M| \geq \frac{1}{3}|M^*|$ (γιατί?), δηλαδή 1/3-προσεγγιστικός.

Θα δώσουμε μια εναλλακτική προσέγγιση, μέσω στρογγυλοποίησης γραμμικού προγράμματος.

Θα δώσουμε μια εναλλακτική προσέγγιση, μέσω στρογγυλοποίησης γραμμικού προγράμματος.

Για κάθε υπέρ-ακμή $e \in E$ έχουμε μια μεταβλητή x_e , η οποία υποδηλώνει κατά πόσο διαλέξαμε την υπέρ-ακμή.

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \sum_{e \in E} x_e \\ &\sum_{e: u \in e} x_e \leq 1, \forall u \in V \\ &x_e \geq 0, \forall e \in E \end{aligned}$$

Αλγόριθμος Στρογγυλοποίησης

- 1: $M \leftarrow \emptyset, F \leftarrow E$
- 2: Όσο $F \neq \emptyset$
- 3: Λύσε το γραμμικό πρόγραμμα στον γράφο $G(V, F)$
- 4: Έστω μια βέλτιστη εφικτή λύση του x
- 5: Αν υπάρχει e με $x_e = 0$, αφάιρέσέ την από το F , continue
- 6: Διάλεξε την υπέρ-ακμή $e \in F$ με το ελάχιστο $x(N(e))$
- 7: Αφαίρεσε όλες τις ακμές $N(e)$ από το F
- 8: Επέστρεψε το M

Αλγόριθμος Στρογγυλοποίησης

- 1: $M \leftarrow \emptyset, F \leftarrow E$
- 2: Όσο $F \neq \emptyset$
- 3: Λύσε το γραμμικό πρόγραμμα στον γράφο $G(V, F)$
- 4: Έστω μια βέλτιστη εφικτή λύση του x
- 5: Αν υπάρχει e με $x_e = 0$, αφάιρέσέ την από το F , continue
- 6: Διάλεξε την υπέρ-ακμή $e \in F$ με το ελάχιστο $x(N(e))$
- 7: Αφαίρεσε όλες τις ακμές $N(e)$ από το F
- 8: Επέστρεψε το M

Θεώρημα

Το ταίρισμα το οποίο επιστρέφεται από τον προηγούμενο αλγόριθμο είναι μια $\frac{3}{7}$ -προσέγγιση.

Αλγόριθμος Στρογγυλοποίησης

- 1: $M \leftarrow \emptyset, F \leftarrow E$
- 2: Όσο $F \neq \emptyset$
- 3: Λύσε το γραμμικό πρόγραμμα στον γράφο $G(V, F)$
- 4: Έστω μια βέλτιστη εφικτή λύση του x
- 5: Αν υπάρχει e με $x_e = 0$, αφάιρέσέ την από το F , continue
- 6: Διάλεξε την υπέρ-ακμή $e \in F$ με το ελάχιστο $x(N(e))$
- 7: Αφαίρεσε όλες τις ακμές $N(e)$ από το F
- 8: Επέστρεψε το M

Θεώρημα

Το ταίρισμα το οποίο επιστρέφεται από τον προηγούμενο αλγόριθμο είναι μια $\frac{3}{7}$ -προσέγγιση.

Θα βασιστούμε στο εξής Λήμμα.

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Θα βασιστούμε στο εξής Λήμμα.

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Απόδειξη του Θεωρήματος βάσει του Λήμματος: Έστω ℓ_i το κέρδος της βέλτιστης λύσης του γραμμικού προγράμματος στο βήμα i .

Θα βασιστούμε στο εξής Λήμμα.

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Απόδειξη του Θεωρήματος βάσει του Λήμματος: Έστω ℓ_i το κέρδος της βέλτιστης λύσης του γραμμικού προγράμματος στο βήμα i . Έστω e^* η ακμή που επιλέγεται. Τότε ισχυριζόμαστε ότι

$$\ell_{i+1} \geq \ell_i - x(N(e^*))$$

Θα βασιστούμε στο εξής Λήμμα.

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Απόδειξη του Θεωρήματος βάσει του Λήμματος: Έστω ℓ_i το κέρδος της βέλτιστης λύσης του γραμμικού προγράμματος στο βήμα i . Έστω e^* η ακμή που επιλέγεται. Τότε ισχυριζόμαστε ότι

$$\ell_{i+1} \geq \ell_i - x(N(e^*)) \geq \ell_i - \frac{7}{3}.$$

Θα βασιστούμε στο εξής Λήμμα.

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Απόδειξη του Θεωρήματος βάσει του Λήμματος: Έστω ℓ_i το κέρδος της βέλτιστης λύσης του γραμμικού προγράμματος στο βήμα i . Έστω e^* η ακμή που επιλέγεται. Τότε ισχυριζόμαστε ότι

$$\ell_{i+1} \geq \ell_i - x(N(e^*)) \geq \ell_i - \frac{7}{3}.$$

Οπότε, αν ο βρόγχος τρέξει T βήματα, θα ισχύει $|M| = T$ και

Θα βασιστούμε στο εξής Λήμμα.

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Απόδειξη του Θεωρήματος βάσει του Λήμματος: Έστω ℓ_i το κέρδος της βέλτιστης λύσης του γραμμικού προγράμματος στο βήμα i . Έστω e^* η ακμή που επιλέγεται. Τότε ισχυριζόμαστε ότι

$$\ell_{i+1} \geq \ell_i - x(N(e^*)) \geq \ell_i - \frac{7}{3}.$$

Οπότε, αν ο βρόγχος τρέξει T βήματα, θα ισχύει $|M| = T$ και $0 \geq \ell_0 - \frac{7}{3}T$, άρα $T \geq \frac{3}{7}\ell_0$.

Θα βασιστούμε στο εξής Λήμμα.

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Απόδειξη του Θεωρήματος βάσει του Λήμματος: Έστω ℓ_i το κέρδος της βέλτιστης λύσης του γραμμικού προγράμματος στο βήμα i . Έστω e^* η ακμή που επιλέγεται. Τότε ισχυριζόμαστε ότι

$$\ell_{i+1} \geq \ell_i - x(N(e^*)) \geq \ell_i - \frac{7}{3}.$$

Οπότε, αν ο βρόγχος τρέξει T βήματα, θα ισχύει $|M| = T$ και $0 \geq \ell_0 - \frac{7}{3}T$, άρα $T \geq \frac{3}{7}\ell_0$, άρα ο αλγόριθμος είναι $\frac{3}{7}$ -προσεγγιστικός (γιατί?).

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Πλάνο απόδειξης.

- 1 Βρίσκουμε ένα μεγάλο σύνολο κορυφών u για τις οποίες $\sum_{e:u \in E} x_e = 1$ (στη βέλτιστη λύση).

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Πλάνο απόδειξης.

- 1 Βρίσκουμε ένα μεγάλο σύνολο κορυφών u για τις οποίες $\sum_{e:u \in E} x_e = 1$ (στη βέλτιστη λύση).
- 2 Βρίσκουμε ανάμεσα σε αυτές μία κορυφή u^* με μικρό βαθμό.

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Πλάνο απόδειξης.

- 1 Βρίσκουμε ένα μεγάλο σύνολο κορυφών u για τις οποίες $\sum_{e:u \in E} x_e = 1$ (στη βέλτιστη λύση).
- 2 Βρίσκουμε ανάμεσα σε αυτές μία κορυφή u^* με μικρό βαθμό.
- 3 Βρίσκουμε μια προσκείμενη στο u^* υπέρ-ακμή e^* με μεγάλο $x(e^*)$.

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Πλάνο απόδειξης.

- 1 Βρίσκουμε ένα μεγάλο σύνολο κορυφών u για τις οποίες $\sum_{e:u \in E} x_e = 1$ (στη βέλτιστη λύση).
- 2 Βρίσκουμε ανάμεσα σε αυτές μία κορυφή u^* με μικρό βαθμό.
- 3 Βρίσκουμε μια προσκείμενη στο u^* υπέρ-ακμή e^* με μεγάλο $x(e^*)$.
- 4 Δείχνουμε ότι $x(N(e^*))$ είναι μικρό.

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

★ Παρατήρηση I: Εφόσον x βασική εφικτή λύση ικανοποιεί $|F|$ το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητες σχέσεις ως ισότητες.

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

★ Παρατήρηση I: Εφόσον x βασική εφικτή λύση ικανοποιεί $|F|$ το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητες σχέσεις ως ισότητες.

★ Παρατήρηση II. Καμία από αυτές τις ανισότητες δεν είναι της μορφής $x_e = 0$,

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

★ Παρατήρηση I: Εφόσον x βασική εφικτή λύση ικανοποιεί $|F|$ το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητες σχέσεις ως ισότητες.

★ Παρατήρηση II. Καμία από αυτές τις ανισότητες δεν είναι της μορφής $x_e = 0$, άρα είναι $|F|$ σχέσεις της μορφής $\sum_{e:u \in e} x_e = 1$ για κάποια u .

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

★ Παρατήρηση I: Εφόσον x βασική εφικτή λύση ικανοποιεί $|F|$ το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητες σχέσεις ως ισότητες.

★ Παρατήρηση II. Καμία από αυτές τις ανισότητες δεν είναι της μορφής $x_e = 0$, άρα είναι $|F|$ σχέσεις της μορφής $\sum_{e:u \in e} x_e = 1$ για κάποια u . Έστω T το σύνολο κορυφών για το οποίο επιτυγχάνεται ισότητα.

Απόδειξη του Λήμματος

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

★ Παρατήρηση I: Εφόσον x βασική εφικτή λύση ικανοποιεί $|F|$ το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητες σχέσεις ως ισότητες.

★ Παρατήρηση II. Καμία από αυτές τις ανισότητες δεν είναι της μορφής $x_e = 0$, άρα είναι $|F|$ σχέσεις της μορφής $\sum_{e: u \in e} x_e = 1$ για κάποια u . Έστω T το σύνολο κορυφών για το οποίο επιτυγχάνεται ισότητα.

Αν $\deg(u) = \{e \in F : u \in e\}$ τότε

$$\sum_{u \in T} \deg(u) =$$

Απόδειξη του Λήμματος

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

★ Παρατήρηση I: Εφόσον x βασική εφικτή λύση ικανοποιεί $|F|$ το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητες σχέσεις ως ισότητες.

★ Παρατήρηση II. Καμία από αυτές τις ανισότητες δεν είναι της μορφής $x_e = 0$, άρα είναι $|F|$ σχέσεις της μορφής $\sum_{e: u \in e} x_e = 1$ για κάποια u . Έστω T το σύνολο κορυφών για το οποίο επιτυγχάνεται ισότητα.

Αν $\deg(u) = \{e \in F : u \in e\}$ τότε

$$\sum_{u \in T} \deg(u) = \sum_{e \in F} |e \cap T|$$

Απόδειξη του Λήμματος

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

★ Παρατήρηση I: Εφόσον x βασική εφικτή λύση ικανοποιεί $|F|$ το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητες σχέσεις ως ισότητες.

★ Παρατήρηση II. Καμία από αυτές τις ανισότητες δεν είναι της μορφής $x_e = 0$, άρα είναι $|F|$ σχέσεις της μορφής $\sum_{e: u \in e} x_e = 1$ για κάποια u . Έστω T το σύνολο κορυφών για το οποίο επιτυγχάνεται ισότητα.

Αν $\deg(u) = \{e \in F : u \in e\}$ τότε

$$\sum_{u \in T} \deg(u) = \sum_{e \in F} |e \cap T| \leq 3|F| \leq 3|T|,$$

Απόδειξη του Λήμματος

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

★ Παρατήρηση I: Εφόσον x βασική εφικτή λύση ικανοποιεί $|F|$ το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητες σχέσεις ως ισότητες.

★ Παρατήρηση II. Καμία από αυτές τις ανισότητες δεν είναι της μορφής $x_e = 0$, άρα είναι $|F|$ σχέσεις της μορφής $\sum_{e: u \in e} x_e = 1$ για κάποια u . Έστω T το σύνολο κορυφών για το οποίο επιτυγχάνεται ισότητα.

Αν $\deg(u) = \{e \in F : u \in e\}$ τότε

$$\sum_{u \in T} \deg(u) = \sum_{e \in F} |e \cap T| \leq 3|F| \leq 3|T|,$$

άρα υπάρχει $u^* \in T$ με $\deg(u^*) \leq 3$.

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Ας πάρουμε από όλες τις προσκείμενες υπερ-ακμές στο u^* την υπερ-ακμή e^* με τη μέγιστη x -τιμή.

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Ας πάρουμε από όλες τις προσκείμενες υπερ-ακμές στο u^* την υπερ-ακμή e^* με τη μέγιστη x -τιμή.

$$1 = \sum_{e: u \in e} x_e \leq$$

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Ας πάρουμε από όλες τις προσκείμενες υπερ-ακμές στο u^* την υπερ-ακμή e^* με τη μέγιστη x -τιμή.

$$1 = \sum_{e: u \in e^*} x_e \leq 3 \cdot x_{e^*} \Rightarrow \Rightarrow x_{e^*} \geq \frac{1}{3}.$$

Απόδειξη του Λήμματος

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Ας πάρουμε από όλες τις προσκείμενες υπερ-ακμές στο u^* την υπερ-ακμή e^* με τη μέγιστη x -τιμή.

$$1 = \sum_{e: u \in e} x_e \leq 3 \cdot x_{e^*} \Rightarrow x_{e^*} \geq \frac{1}{3}.$$

Αν $e^* = \{u, v, w\}$ τότε

$$x(N(e^*)) \leq \left(\sum_{e: u \in e} x_e + \sum_{e: v \in e} x_e + \sum_{e: w \in e} x_e \right) - 2 \cdot x(e^*)$$

Απόδειξη του Λήμματος

Λήμμα

Σε κάθε επανάληψη του βρόγχου, υπάρχει υπέρ-ακμή $e^* \in F$ με $x(N(e^*)) \leq \frac{7}{3}$.

Ας πάρουμε από όλες τις προσκείμενες υπερ-ακμές στο u^* την υπερ-ακμή e^* με τη μέγιστη x -τιμή.

$$1 = \sum_{e: u \in e} x_e \leq 3 \cdot x_{e^*} \Rightarrow x_{e^*} \geq \frac{1}{3}.$$

Αν $e^* = \{u, v, w\}$ τότε

$$x(N(e^*)) \leq \left(\sum_{e: u \in e} x_e + \sum_{e: v \in e} x_e + \sum_{e: w \in e} x_e \right) - 2 \cdot x(e^*) \leq 3 - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Ο παραπάνω αλγόριθμος μπορεί να γενικευτεί σε $(k - 1 + \frac{1}{k})^{-1}$ -προσεγγιστικό αλγόριθμο για k -ομοιόμορφους υπεργράφους.

Ο παραπάνω αλγόριθμος μπορεί να γενικευτεί σε $(k - 1 + \frac{1}{k})^{-1}$ -προσεγγιστικό αλγόριθμο για k -ομοιόμορφους υπεργράφους.

Για την ακρίβεια μπορεί να βρεθεί ένα ταίριασμα M ώστε

$$\sum_{e \in M} \left(|e| - 1 + \frac{1}{|e|} \right) \geq \text{LP} \quad (\dagger),$$

όπου LP το κέρδος της βέλτιστης κλασματικής λύσης.

Ο παραπάνω αλγόριθμος μπορεί να γενικευτεί σε $(k - 1 + \frac{1}{k})^{-1}$ -προσεγγιστικό αλγόριθμο για k -ομοιόμορφους υπεργράφους.

Για την ακρίβεια μπορεί να βρεθεί ένα ταίριασμα M ώστε

$$\sum_{e \in M} \left(|e| - 1 + \frac{1}{|e|} \right) \geq \text{LP} \quad (\dagger),$$

όπου LP το κέρδος της βέλτιστης κλασματικής λύσης.

Στην περίπτωση όπου οι υπερ-ακμές έχουν αντίστοιχα βάρη, υπάρχει αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης $(k - 1 + \frac{1}{k})^{-1}$, ωστόσο αν υπάρχει αλγόριθμος που πετυχαίνει την εγγύση $(\dagger)$ είναι ανοικτό πρόβλημα.