

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Ημι-Ορισμένος Προγραμματισμός

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ημι-ορισμένος προγραμματισμός.

Σε αυτή τη διάλεξη, θα δούμε ένα ακόμη εργαλείο, το οποίο μας επιτρέπει να σχεδιάζουμε προσεγγιστικούς αλγορίθμους.

Το βασικό στοιχείο είναι οι ημι-ορισμένοι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ οι οποίοι έχουν μη αρνητικές ιδιοτιμές.

Ημι-ορισμένος προγραμματισμός.

Σε αυτή τη διάλεξη, θα δούμε ένα ακόμη εργαλείο, το οποίο μας επιτρέπει να σχεδιάζουμε προσεγγιστικούς αλγορίθμους.

Το βασικό στοιχείο είναι οι ημι-ορισμένοι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ οι οποίοι έχουν μη αρνητικές ιδιοτιμές.

Θα συμβολίζουμε το γεγονός ότι ένας πίνακας A είναι ημι-ορισμένος με $A \succeq 0$.

Ημι-ορισμένος προγραμματισμός.

Σε αυτή τη διάλεξη, θα δούμε ένα ακόμη εργαλείο, το οποίο μας επιτρέπει να σχεδιάζουμε προσεγγιστικούς αλγορίθμους.

Το βασικό στοιχείο είναι οι ημι-ορισμένοι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ οι οποίοι έχουν μη αρνητικές ιδιοτιμές.

Θα συμβολίζουμε το γεγονός ότι ένας πίνακας A είναι ημι-ορισμένος με $A \succeq 0$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα του A αν $Au = \lambda u$. Το λ λέγεται ιδιοτιμή του A .

Ημι-ορισμένος προγραμματισμός.

Σε αυτή τη διάλεξη, θα δούμε ένα ακόμη εργαλείο, το οποίο μας επιτρέπει να σχεδιάζουμε προσεγγιστικούς αλγορίθμους.

Το βασικό στοιχείο είναι οι ημι-ορισμένοι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ οι οποίοι έχουν μη αρνητικές ιδιοτιμές.

Θα συμβολίζουμε το γεγονός ότι ένας πίνακας A είναι ημι-ορισμένος με $A \succeq 0$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα του A αν $Au = \lambda u$. Το λ λέγεται ιδιοτιμή του A .

Υπενθύμιση εννοιών Γραμμικής Άλγεβρας.

★ Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας. Τότε

- 1 Όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές, και άρα μπορούν να διαταχθούν ως $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n$.

Υπενθύμιση εννοιών Γραμμικής Άλγεβρας.

★ Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας. Τότε

- 1 Όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές, και άρα μπορούν να διαταχθούν ως $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n$.
- 2 Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ιδιοδιανυσμάτων του A .

Υπενθύμιση εννοιών Γραμμικής Άλγεβρας.

★ Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας. Τότε

- 1 Όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές, και άρα μπορούν να διαταχθούν ως $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n$.
- 2 Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ιδιοδιανυσμάτων του A .
- 3 $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i u_i^T$.

Υπενθύμιση εννοιών Γραμμικής Άλγεβρας.

★ Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας. Τότε

- 1 Όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές, και άρα μπορούν να διαταχθούν ως $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n$.
- 2 Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ιδιοδιανυσμάτων του A .
- 3 $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i u_i^T$.
- 4 Τα λ_i και τα u_i μπορούν σε πολυωνυμικό χρόνο να προσεγγιστούν με υψηλή ακρίβεια.

Υπενθύμιση εννοιών Γραμμικής Άλγεβρας.

★ Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας. Τότε

- 1 Όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές, και άρα μπορούν να διαταχθούν ως $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n$.
- 2 Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ιδιοδιανυσμάτων του A .
- 3 $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i u_i^T$.
- 4 Τα λ_i και τα u_i μπορούν σε πολυωνυμικό χρόνο να προσεγγιστούν με υψηλή ακρίβεια.
- 5 Ο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ικανοποιεί $A \succeq 0$ αν και μόνο αν $v^T A v \geq 0$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$.

Μια ιδιότητα του συνόλου των ημι-ορισμένων πινάκων.

Λήμμα

Το σύνολο $\mathcal{S}_+^n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \succeq 0\}$ είναι κυρτό.

Μια ιδιότητα του συνόλου των ημι-ορισμένων πινάκων.

Λήμμα

Το σύνολο $\mathcal{S}_+^n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \succeq 0\}$ είναι κυρτό.

Όντως, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $A, B \in \mathcal{S}_+^n, \theta \in [0, 1]$ έχουμε $\theta A + (1 - \theta B) \succeq 0$. Όμως

Μια ιδιότητα του συνόλου των ημι-ορισμένων πινάκων.

Λήμμα

Το σύνολο $S_+^n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \succeq 0\}$ είναι κυρτό.

Όντως, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $A, B \in S_+^n, \theta \in [0, 1]$ έχουμε $\theta A + (1 - \theta)B \succeq 0$. Όμως

$$v^T(\theta A + (1 - \theta)B)v =$$

Μια ιδιότητα του συνόλου των ημι-ορισμένων πινάκων.

Λήμμα

Το σύνολο $S_+^n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \succeq 0\}$ είναι κυρτό.

Όντως, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $A, B \in S_+^n, \theta \in [0, 1]$ έχουμε $\theta A + (1 - \theta)B \succeq 0$. Όμως

$$v^T(\theta A + (1 - \theta)B)v = \theta \underbrace{(v^T A v)}_{\geq 0} + (1 - \theta) \underbrace{(v^T B v)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Μια ιδιότητα του συνόλου των ημι-ορισμένων πινάκων.

Λήμμα

Το σύνολο $\mathcal{S}_+^n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \succeq 0\}$ είναι κυρτό.

Όντως, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $A, B \in \mathcal{S}_+^n, \theta \in [0, 1]$ έχουμε $\theta A + (1 - \theta)B \succeq 0$. Όμως

$$v^T(\theta A + (1 - \theta)B)v = \theta \underbrace{(v^T A v)}_{\geq 0} + (1 - \theta) \underbrace{(v^T B v)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Το γεγονός ότι το $\mathcal{S}_+^n$ είναι κυρτό είναι κομβικό για την ύπαρξη αλγόριθμων πολυωνυμικού χρόνου για ημι-ορισμένο προγραμματισμό.

Παραδείγματα ημι-ορισμένων πινάκων.

- 1 Διαγώνιοι πίνακες D με μη αρνητικές εγγραφές.

Παραδείγματα ημι-ορισμένων πινάκων.

- 1 Διαγώνιοι πίνακες D με μη αρνητικές εγγραφές. Οι ιδιοτιμές είναι τα διαγώνια στοιχεία και τα ιδιοδιανύσματα τα $e_i, i \in \mathbb{R}^n$.

Παραδείγματα ημι-ορισμένων πινάκων.

- 1 Διαγώνιοι πίνακες D με μη αρνητικές εγγραφές. Οι ιδιοτιμές είναι τα διαγώνια στοιχεία και τα ιδιοδιανύσματα τα $e_i, i \in \mathbb{R}^n$.
- 2 Εξωτερικό γινόμενο πινάκων (ή διανυσμάτων): BB^T είναι πάντα ημι-ορισμένος

Παραδείγματα ημι-ορισμένων πινάκων.

- 1 Διαγώνιοι πίνακες D με μη αρνητικές εγγραφές. Οι ιδιοτιμές είναι τα διαγώνια στοιχεία και τα ιδιοδιανύσματα τα $e_i, i \in \mathbb{R}^n$.
- 2 Εξωτερικό γινόμενο πινάκων (ή διανυσμάτων): BB^T είναι πάντα ημι-ορισμένος καθώς $v^T BB^T v = (B^T v)(B^T v) = \|B^T v\|_2^2 \geq 0$.

Παραδείγματα ημι-ορισμένων πινάκων.

- 1 Διαγώνιοι πίνακες D με μη αρνητικές εγγραφές. Οι ιδιοτιμές είναι τα διαγώνια στοιχεία και τα ιδιοδιανύσματα τα $e_i, i \in \mathbb{R}^n$.
- 2 Εξωτερικό γινόμενο πινάκων (ή διανυσμάτων): BB^T είναι πάντα ημι-ορισμένος καθώς $v^T BB^T v = (B^T v)(B^T v) = \|B^T v\|_2^2 \geq 0$.
- 3 Πίνακας συνδιακυμάνσεων: ο πίνακας ο οποίος για $X_1, X_2, \dots, X_n$ τυχαίες μεταβλητές ορίζεται ως

$$\begin{bmatrix} E[X_1^2] & E[X_1 X_2] & \dots & E[X_1 X_n] \\ E[X_2 X_1] & E[X_2 X_3] & \dots & E[X_2 X_n] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E[X_n X_1] & E[X_n X_2] & \dots & E[X_n^2] \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα ημι-ορισμένων πινάκων.

- 1 Διαγώνιοι πίνακες D με μη αρνητικές εγγραφές. Οι ιδιοτιμές είναι τα διαγώνια στοιχεία και τα ιδιοδιανύσματα τα $e_i, i \in \mathbb{R}^n$.
- 2 Εξωτερικό γινόμενο πινάκων (ή διανυσμάτων): BB^T είναι πάντα ημι-ορισμένος καθώς $v^T BB^T v = (B^T v)(B^T v) = \|B^T v\|_2^2 \geq 0$.
- 3 Πίνακας συνδιακυμάνσεων: ο πίνακας ο οποίος για $X_1, X_2, \dots, X_n$ τυχαίες μεταβλητές ορίζεται ως

$$\begin{bmatrix} E[X_1^2] & E[X_1 X_2] & \dots & E[X_1 X_n] \\ E[X_2 X_1] & E[X_2 X_3] & \dots & E[X_2 X_n] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E[X_n X_1] & E[X_n X_2] & \dots & E[X_n^2] \end{bmatrix}$$

- 4 Ο Λαπλασιανός πίνακας ενός γραφήματος: αν το γράφημα είναι d -κανονικό με πίνακα γειτνίασης A ο πίνακας είναι ο $L = dI - A$.

Ημι-ορισμένος προγραμματισμός.

Σε ένα ημι-ορισμένο πρόγραμμα υπάρχουν $\binom{n+1}{2}$ μεταβλητές οι οποίες είναι οργανωμένες σε έναν συμμετρικό $n \times n$ πίνακα X .

Ημι-ορισμένος προγραμματισμός.

Σε ένα ημι-ορισμένο πρόγραμμα υπάρχουν $\binom{n+1}{2}$ μεταβλητές οι οποίες είναι οργανωμένες σε έναν συμμετρικό $n \times n$ πίνακα X .

Στο παρακάτω τα $c, a_1, a_2, \dots, a_m : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γραμμικές βαθμωτές συναρτήσεις πάνω σε πίνακες.

Ημι-ορισμένος προγραμματισμός.

Σε ένα ημι-ορισμένο πρόγραμμα υπάρχουν $\binom{n+1}{2}$ μεταβλητές οι οποίες είναι οργανωμένες σε έναν συμμετρικό $n \times n$ πίνακα X .

Στο παρακάτω τα $c, a_1, a_2, \dots, a_m : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **γραμμικές** βαθμωτές συναρτήσεις πάνω σε πίνακες.

$$\text{minimize } c(X)$$

$$a_i(X) \geq b_i, \quad \forall 1 \leq i \leq [m]$$

$$X \succeq 0$$

Χωρίς τον περιορισμό $X \succeq 0$ θα είχαμε γραμμικό πρόγραμμα, αλλά αυτός ο περιορισμός αλλάζει όλο το τοπίο και είναι ο 'κύριος χαρακτήρας' όλου του ημι-ορισμένου προγράμματος.

Θεώρημα

Για ένα ημι-ορισμένο πρόγραμμα υπάρχει ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου ο οποίος επιστρέφει μια $(1 + \epsilon)$ -προσεγγιστική λύση σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς n και $1/\epsilon$.

Θεώρημα

Για ένα ημι-ορισμένο πρόγραμμα υπάρχει ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου ο οποίος επιστρέφει μια $(1 + \epsilon)$ -προσεγγιστική λύση σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς n και $1/\epsilon$.

Ο αλγόριθμος είναι μια παραλλαγή του ελλειψοειδούς. Σε κάθε βήμα,

- 1 πρέπει να γίνει έλεγχος αν το κέντρο του τρέχοντος ελλειψοειδούς περιέχεται μέσα στο σύνολο

$$\{X : a_i(X) \geq b_i, \quad \forall 1 \leq i \leq m\} \cap \{X : X \succeq 0\}.$$

Θεώρημα

Για ένα ημι-ορισμένο πρόγραμμα υπάρχει ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου ο οποίος επιστρέφει μια $(1 + \epsilon)$ -προσεγγιστική λύση σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς n και $1/\epsilon$.

Ο αλγόριθμος είναι μια παραλλαγή του ελλειψοειδούς. Σε κάθε βήμα,

- 1 πρέπει να γίνει έλεγχος αν το κέντρο του τρέχοντος ελλειψοειδούς περιέχεται μέσα στο σύνολο

$$\{X : a_i(X) \geq b_i, \quad \forall 1 \leq i \leq m\} \cap \{X : X \succeq 0\}.$$

Το βασικό ζήτημα είναι ο περιορισμός $X \succeq 0$ ο οποίος ελέγχεται με Cholesky παραγοντοποίηση σε $O(n^3)$ χρόνο.

Θεώρημα

Για ένα ημι-ορισμένο πρόγραμμα υπάρχει ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου ο οποίος επιστρέφει μια $(1 + \epsilon)$ -προσεγγιστική λύση σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς n και $1/\epsilon$.

Ο αλγόριθμος είναι μια παραλλαγή του ελλειψοειδούς. Σε κάθε βήμα,

- 1 πρέπει να γίνει έλεγχος αν το κέντρο του τρέχοντος ελλειψοειδούς περιέχεται μέσα στο σύνολο

$$\{X : a_i(X) \geq b_i, \quad \forall 1 \leq i \leq m\} \cap \{X : X \succeq 0\}.$$

Το βασικό ζήτημα είναι ο περιορισμός $X \succeq 0$ ο οποίος ελέγχεται με Cholesky παραγοντοποίηση σε $O(n^3)$ χρόνο.

- 2 Πρέπει να βρεθεί ένα διαχωριστικού υπερ-επιπέδο h : αυτό επιτυγχάνεται μέσω μίας γρήγορης ρουτίνας η οποία βρίσκει ένα 'πιστοποιητικό μη ημι-ορισμενότητας' του X , δηλαδή ένα v ώστε $v^T X v < 0$.

Το πρόβλημα Μέγιστης Τομής.

★ Στο πρόβλημα Μέγιστης Τομής μας δίνεται έναν μη κατευθυνόμενο γράφος $G(V, E)$ με βάρη w_e στις ακμές, και θέλουμε να βρούμε ένα $S \subseteq V$ ώστε $w(\partial S) = \sum_{e \in \partial S} w_e$ να μεγιστοποιείται.

Το πρόβλημα Μέγιστης Τομής.

★ Στο πρόβλημα Μέγιστης Τομής μας δίνεται έναν μη κατευθυνόμενο γράφος $G(V, E)$ με βάρη w_e στις ακμές, και θέλουμε να βρούμε ένα $S \subseteq V$ ώστε $w(\partial S) = \sum_{e \in \partial S} w_e$ να μεγιστοποιείται.

Στο πρώτο πρόγραμμα παρακάτω έχουμε μεταβλητές $x_u \in \{-1, +1\}$ για κάθε κορυφή,

Το πρόβλημα Μέγιστης Τομής.

★ Στο πρόβλημα Μέγιστης Τομής μας δίνεται έναν μη κατευθυνόμενο γράφος $G(V, E)$ με βάρη w_e στις ακμές, και θέλουμε να βρούμε ένα $S \subseteq V$ ώστε $w(\partial S) = \sum_{e \in \partial S} w_e$ να μεγιστοποιείται.

Στο πρώτο πρόγραμμα παρακάτω έχουμε μεταβλητές $x_u \in \{-1, +1\}$ για κάθε κορυφή, ενώ στο δεύτερο βάζουμε μία μεταβλητή για ζεύγος (u, v) , πακετάροντάς τες σε έναν πίνακα X .

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2} \cdot \sum_{e=(u,v) \in E} w_e (1 - x_u x_v) \\ & x_u^2 = 1, \forall u \in V \end{aligned}$$

Το πρόβλημα Μέγιστης Τομής.

★ Στο πρόβλημα Μέγιστης Τομής μας δίνεται έναν μη κατευθυνόμενο γράφος $G(V, E)$ με βάρη w_e στις ακμές, και θέλουμε να βρούμε ένα $S \subseteq V$ ώστε $w(\partial S) = \sum_{e \in \partial S} w_e$ να μεγιστοποιείται.

Στο πρώτο πρόγραμμα παρακάτω έχουμε μεταβλητές $x_u \in \{-1, +1\}$ για κάθε κορυφή, ενώ στο δεύτερο βάζουμε μία μεταβλητή για ζεύγος (u, v) , πακετάροντάς τες σε έναν πίνακα X .

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2} \cdot \sum_{e=(u,v) \in E} w_e(1 - x_u x_v) \\ & x_u^2 = 1, \forall u \in V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2} \cdot \sum_{e=(u,v) \in E} w_e(1 - X_{uv}) \\ & X_{uu} = 1, \forall i \in V \\ & \exists x \in \mathbb{R}^n : X = xx^T \end{aligned}$$

Παίρνοντας ένα ημι-ορισμένο πρόγραμμα.

Χαλαρώνουμε περαιτέρω το πρόγραμμα, μετατρέποντας τον περιορισμό $\exists x \in \mathbb{R}^n : X = xx^T$ στον περιορισμό $X \succeq 0$.

Παίρνοντας ένα ημι-ορισμένο πρόγραμμα.

Χαλαρώνουμε περαιτέρω το πρόγραμμα, μετατρέποντας τον περιορισμό ' $\exists x \in \mathbb{R}^n : X = xx^T$ ' στον περιορισμό ' $X \succeq 0$ '.

$$\max \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \sum_{e=(u,v) \in E} w_e (1 - X_{uv})}_{OPT}$$

$$X_{uu} = 1, \forall u \in V$$

$$\exists x \in \mathbb{R}^n : X = xx^T$$

Παίρνοντας ένα ημι-ορισμένο πρόγραμμα.

Χαλαρώνουμε περαιτέρω το πρόγραμμα, μετατρέποντας τον περιορισμό ' $\exists x \in \mathbb{R}^n : X = xx^T$ ' στον περιορισμό ' $X \succeq 0$ '.

$$\max \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \sum_{e=(u,v) \in E} w_e(1 - X_{uv})}_{OPT}$$

$$X_{uu} = 1, \forall u \in V$$

$$\exists x \in \mathbb{R}^n : X = xx^T$$

$$\max \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \sum_{e=(u,v) \in E} w_e(1 - X_{uv})}_{sdp}$$

$$X_{ii} = 1, \forall i \in V$$

$$X \succeq 0$$

Εφόσον το εφικτό σύνολο στο δεύτερου προγράμματος είναι υπερ-σύνολο του εφικτού συνόλου του πρώτου προγράμματος έχουμε $sdp \geq OPT$.

Προς μία στρογγυλοποίηση της λύσης του ημι-ορισμένου προγράμματος.

Πως από ένα αντικείμενο X το οποίο ικανοποιεί την μάλλον αλλόκοτη συνθήκη $X \gtrsim 0$ μπορεί κανείς να πάρει μία τομή του γράφου G ;

Προς μία στρογγυλοποίηση της λύσης του ημι-ορισμένου προγράμματος.

Πως από ένα αντικείμενο X το οποίο ικανοποιεί την μάλλον αλλόκοτη συνθήκη $X \succeq 0$ μπορεί κανείς να πάρει μία τομή του γράφου G ;

Θεώρημα

Έστω $X \succeq 0$ ένας $n \times n$ πίνακας. Τότε κάποιος μπορεί γρήγορα να βρει έναν πίνακα $V \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times n}$ ώστε $X = V^T V$ με $\tilde{r} := \text{rank}(X)$. Με άλλα λόγια, $X_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ όπου v_i η i -οστή στήλη του V .

Προς μία στρογγυλοποίηση της λύσης του ημι-ορισμένου προγράμματος.

Πως από ένα αντικείμενο X το οποίο ικανοποιεί την μάλλον αλλόκοτη συνθήκη $X \succeq 0$ μπορεί κανείς να πάρει μία τομή του γράφου G ;

Θεώρημα

Έστω $X \succeq 0$ ένας $n \times n$ πίνακας. Τότε κάποιος μπορεί γρήγορα να βρει έναν πίνακα $V \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times n}$ ώστε $X = V^T V$ με $\tilde{r} := \text{rank}(X)$. Με άλλα λόγια, $X_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ όπου v_i η i -οστή στήλη του V .

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^T = U \Lambda U^T$ με $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$.

Προς μία στρογγυλοποίηση της λύσης του ημι-ορισμένου προγράμματος.

Πως από ένα αντικείμενο X το οποίο ικανοποιεί την μάλλον αλλόκοτη συνθήκη $X \succeq 0$ μπορεί κανείς να πάρει μία τομή του γράφου G ;

Θεώρημα

Έστω $X \succeq 0$ ένας $n \times n$ πίνακας. Τότε κάποιος μπορεί γρήγορα να βρει έναν πίνακα $V \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times n}$ ώστε $X = V^T V$ με $\tilde{r} := \text{rank}(X)$. Με άλλα λόγια, $X_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ όπου v_i η i -οστή στήλη του V .

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^T = U \Lambda U^T$ με $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$. Επιπρόσθετα, το πλήθος των μη μηδενικών ιδιοτιμών είναι $\tilde{r} := \text{rank}(X)$.

Προς μία στρογγυλοποίηση της λύσης του ημι-ορισμένου προγράμματος.

Πως από ένα αντικείμενο X το οποίο ικανοποιεί την μάλλον αλλόκοτη συνθήκη $X \succeq 0$ μπορεί κανείς να πάρει μία τομή του γράφου G ;

Θεώρημα

Έστω $X \succeq 0$ ένας $n \times n$ πίνακας. Τότε κάποιος μπορεί γρήγορα να βρει έναν πίνακα $V \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times n}$ ώστε $X = V^T V$ με $\tilde{r} := \text{rank}(X)$. Με άλλα λόγια, $X_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ όπου v_i η i -οστή στήλη του V .

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^T = U \Lambda U^T$ με $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$. Επιπρόσθετα, το πλήθος των μη μηδενικών ιδιοτιμών είναι $\tilde{r} := \text{rank}(X)$.

Όμως

$$X = U \Lambda U^T = (U \sqrt{\Lambda})(\sqrt{\Lambda} U^T).$$

Προς μία στρογγυλοποίηση της λύσης του ημι-ορισμένου προγράμματος.

Πως από ένα αντικείμενο X το οποίο ικανοποιεί την μάλλον αλλόκοτη συνθήκη $X \succeq 0$ μπορεί κανείς να πάρει μία τομή του γράφου G ;

Θεώρημα

Έστω $X \succeq 0$ ένας $n \times n$ πίνακας. Τότε κάποιος μπορεί γρήγορα να βρει έναν πίνακα $V \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times n}$ ώστε $X = V^T V$ με $\tilde{r} := \text{rank}(X)$. Με άλλα λόγια, $X_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ όπου v_i η i -οστή στήλη του V .

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^T = U \Lambda U^T$ με $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$. Επιπρόσθετα, το πλήθος των μη μηδενικών ιδιοτιμών είναι $\tilde{r} := \text{rank}(X)$.

Όμως

$$X = U \Lambda U^T = (U \sqrt{\Lambda})(\sqrt{\Lambda} U^T).$$

Ο πίνακας $V = \sqrt{\Lambda} U^T$ είναι ο επιθυμητός πίνακας αφού πετάξω τις μηδενικές του στήλες (δηλαδή αυτές που αντιστοιχούν στις μηδενικές ιδιοτιμές).

Εφόσον λύσαμε το ημι-ορισμένο πρόγραμμα πήραμε έναν πίνακα X και με βάση το προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να βρούμε $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{\tilde{r}}$ ώστε $X_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$.

Εφόσον λύσαμε το ημι-ορισμένο πρόγραμμα πήραμε έναν πίνακα X και με βάση το προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να βρούμε $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{\tilde{r}}$ ώστε $X_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Αν είχαμε $r = 1$ τότε κάθε $v_i \in \{-1, +1\}$ άρα θα μπορούσαμε να 'διαβάσουμε' μια τομή'.

Εφόσον λύσαμε το ημι-ορισμένο πρόγραμμα πήραμε έναν πίνακα X και με βάση το προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να βρούμε $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{\tilde{r}}$ ώστε $X_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Αν είχαμε $r = 1$ τότε κάθε $v_i \in \{-1, +1\}$ άρα θα μπορούσαμε να 'διαβάσουμε' μια τομή.

Αλγόριθμος Goemans-Williamson

- 1: Λύσε το ημι-ορισμένο πρόγραμμα του προβλήματος Μέγιστης τομής και πάρε $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- 2: Γράψε $X = V^T V$ με $V \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times n}$ και $v_1, v_2, \dots, v_n$ οι στήλες του V .
- 3: Πάρε $r \in \mathbb{R}^{\tilde{r}}$ με $\|r\|_2 = 1$.
- 4: $S := \{i : \langle v_i, r \rangle \geq 0\}$
- 5: Επέστρεψε $(S, V \setminus S)$

Θεώρημα

Το αναμενόμενο κόστος της τομής που επιστρέφει ο αλγόριθμος είναι

$$\underbrace{\frac{2}{\pi} \min_{z \in [-1,1]} \frac{\arccos z}{1-z}}_{\alpha_{GW}} \cdot \text{sdp} \approx 0.87856 \cdot \text{sdp}.$$

Ανάλυση αλγόριθμου.

Θεώρημα

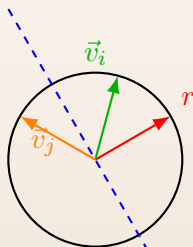
Το αναμενόμενο κόστος της τομής που επιστρέφει ο αλγόριθμος είναι

$$\underbrace{\frac{2}{\pi} \min_{z \in [-1,1]} \frac{\arccos z}{1-z}}_{\alpha_{GW}} \cdot \text{sdp} \approx 0.87856 \cdot \text{sdp}.$$

$$\begin{aligned} \Pr[(i, j) \in \partial S] &= \frac{\arccos(\langle v_i, v_j \rangle)}{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\arccos \langle v_i, v_j \rangle}{1 - \langle v_i, v_j \rangle} \cdot \frac{1}{2} (1 - \langle v_i, v_j \rangle) \geq \\ &= \alpha_{GW} \cdot \frac{1}{2} (1 - \langle v_i, v_j \rangle). \end{aligned}$$

Άρα, μέσο κόστος αλγορίθμου
είναι τουλάχιστον

$$\alpha_{GW} \sum_{e \in E} \frac{1}{2} (1 - \langle v_i, v_j \rangle) \geq \alpha_{GW} \text{OPT}.$$



Χρωματισμός Γραφήματος.

Δοθέντος ενός μη κατευθυνόμενου γράφου $G(V, E)$ θα θέλαμε να βάψουμε τις κορυφές με το ελάχιστο αριθμό χρωμάτων $\chi(G)$ ώστε οποιαδήποτε ακμή να είναι διχρωματική.

Χρωματισμός Γραφήματος.

Δοθέντος ενός μη κατευθυνόμενου γράφου $G(V, E)$ θα θέλαμε να βάψουμε τις κορυφές με το ελάχιστο αριθμό χρωμάτων $\chi(G)$ ώστε οποιαδήποτε ακμή να είναι *διχρωματική*.

Ισοδύναμη διατύπωση: Παρατηρούμε ότι οι κορυφές με το ίδιο χρώμα σε έναν έγκυρο χρωματισμό πρέπει να είναι *ανεξάρτητο* σύνολο. Να αποσυνθεθεί ο γράφος στο *ελάχιστο* πλήθος ανεξάρτητων συνόλων $I_1, I_2, \dots, I_{\chi(G)}$.

Χρωματισμός Γραφήματος.

Δοθέντος ενός μη κατευθυνόμενου γράφου $G(V, E)$ θα θέλαμε να βάψουμε τις κορυφές με το ελάχιστο αριθμό χρωμάτων $\chi(G)$ ώστε οποιαδήποτε ακμή να είναι *διχρωματική*.

Ισοδύναμη διατύπωση: Παρατηρούμε ότι οι κορυφές με το ίδιο χρώμα σε έναν έγκυρο χρωματισμό πρέπει να είναι *ανεξάρτητο* σύνολο. Να αποσυνθεθεί ο γράφος στο *ελάχιστο* πλήθος ανεξάρτητων συνόλων $I_1, I_2, \dots, I_{\chi(G)}$.

$\star \chi(G) = 2$ ισοδύναμο με το γράφος να είναι διμερής.

Χρωματισμός Γραφήματος.

Δοθέντος ενός μη κατευθυνόμενου γράφου $G(V, E)$ θα θέλαμε να βάψουμε τις κορυφές με το ελάχιστο αριθμό χρωμάτων $\chi(G)$ ώστε οποιαδήποτε ακμή να είναι *διχρωματική*.

Ισοδύναμη διατύπωση: Παρατηρούμε ότι οι κορυφές με το ίδιο χρώμα σε έναν έγκυρο χρωματισμό πρέπει να είναι *ανεξάρτητο* σύνολο. Να αποσυνθεθεί ο γράφος στο *ελάχιστο* πλήθος ανεξάρτητων συνόλων $I_1, I_2, \dots, I_{\chi(G)}$.

$\star \chi(G) = 2$ ισοδύναμο με το γράφος να είναι διμερής.

$\star \chi(G) = 3 \Rightarrow$ το πρόβλημα είναι NP-δύσκολο.

Χρωματισμός Γραφήματος.

Δοθέντος ενός μη κατευθυνόμενου γράφου $G(V, E)$ θα θέλαμε να βάψουμε τις κορυφές με το ελάχιστο αριθμό χρωμάτων $\chi(G)$ ώστε οποιαδήποτε ακμή να είναι *διχρωματική*.

Ισοδύναμη διατύπωση: Παρατηρούμε ότι οι κορυφές με το ίδιο χρώμα σε έναν έγκυρο χρωματισμό πρέπει να είναι *ανεξάρτητο* σύνολο. Να αποσυνθεθεί ο γράφος στο *ελάχιστο* πλήθος ανεξάρτητων συνόλων $I_1, I_2, \dots, I_{\chi(G)}$.

* $\chi(G) = 2$ ισοδύναμο με το γράφος να είναι διμερής.

* $\chi(G) = 3 \Rightarrow$ το πρόβλημα είναι NP-δύσκολο.

* Αν κάποιος μας δώσει μία 'υπόσχεση' ότι $\chi(G) = 3$, το να χρωματίσουμε το γράφημα σε τρία χρώματα $\Rightarrow$ NP-δύσκολο.

Χρωματισμός Γραφήματος.

Δοθέντος ενός μη κατευθυνόμενου γράφου $G(V, E)$ θα θέλαμε να βάψουμε τις κορυφές με το ελάχιστο αριθμό χρωμάτων $\chi(G)$ ώστε οποιαδήποτε ακμή να είναι *διχρωματική*.

Ισοδύναμη διατύπωση: Παρατηρούμε ότι οι κορυφές με το ίδιο χρώμα σε έναν έγκυρο χρωματισμό πρέπει να είναι *ανεξάρτητο* σύνολο. Να αποσυνθεθεί ο γράφος στο *ελάχιστο* πλήθος ανεξάρτητων συνόλων $I_1, I_2, \dots, I_{\chi(G)}$.

* $\chi(G) = 2$ ισοδύναμο με το γράφος να είναι διμερής.

* $\chi(G) = 3 \Rightarrow$ το πρόβλημα είναι NP-δύσκολο.

* Αν κάποιος μας δώσει μία 'υπόσχεση' ότι $\chi(G) = 3$, το να χρωματίσουμε το γράφημα σε τρία χρώματα $\Rightarrow$ NP-δύσκολο.

* Αν κάποιος μας δώσει την ίδια υπόσχεση, μπορούμε να το χρωματίσουμε με όσο το δυνατό λιγότερα χρώματα;

Χρωματισμός Γραφήματος και Ημι-Ορισμένος Προγραμματισμός.

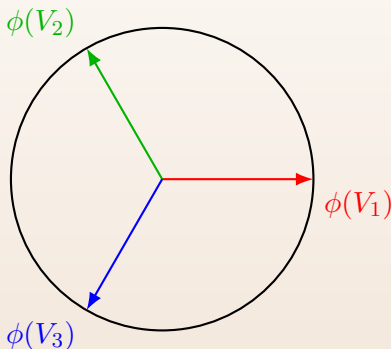
Αν το G είναι 3-χρωματίσιμο τότε $V = I_1 \cup I_2 \cup I_3$

Χρωματισμός Γραφήματος και Ημι-Ορισμένος Προγραμματισμός.

Αν το G είναι 3-χρωματίσιμο τότε $V = I_1 \cup I_2 \cup I_3$ και μπορούμε να εμβαπτίσουμε τις κορυφές στο μοναδιαίο κύκλο μέσω απεικόνισης $\phi : V \rightarrow R^2$

Χρωματισμός Γραφήματος και Ημι-Ορισμένος Προγραμματισμός.

Αν το G είναι 3-χρωματίσιμο τότε $V = I_1 \cup I_2 \cup I_3$ και μπορούμε να εμβαπτίσουμε τις κορυφές στο μοναδιαίο κύκλο μέσω απεικόνισης $\phi : V \rightarrow R^2$ ώστε $(i, j) \in E \Rightarrow \phi(i), \phi(j)$ έχουν γωνία $\frac{2\pi}{3}$.



Χρωματισμός Γραφήματος και Ημι-Ορισμένος Προγραμματισμός.

Οπότε, αν G είναι 3-χρωματίσιμο τότε $\exists u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}^2$ με $\|u_i\|_2 = 1$ και $\langle u_i, u_j \rangle = -\frac{1}{2}, \forall (i, j) \in E$.

Χρωματισμός Γραφήματος και Ημι-Ορισμένος Προγραμματισμός.

Οπότε, αν G είναι 3-χρωματίσιμο τότε $\exists u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}^2$ με $\|u_i\|_2 = 1$ και $\langle u_i, u_j \rangle = -\frac{1}{2}, \forall (i, j) \in E$.

Παρατηρώντας ότι ο πίνακας X με $X_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$ είναι ημι-ορισμένος πίνακας, αν το G είναι 3-χρωματίσιμο τότε

$$\left\{ X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X_{ii} = 1, \quad X_{ij} = -\frac{1}{2}, \forall (i, j) \in E, \quad X \succeq 0 \right\} \neq \emptyset.$$

Χρωματισμός Γραφήματος και Ημι-Ορισμένος Προγραμματισμός.

Οπότε, αν G είναι 3-χρωματίσιμο τότε $\exists u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}^2$ με $\|u_i\|_2 = 1$ και $\langle u_i, u_j \rangle = -\frac{1}{2}, \forall (i, j) \in E$.

Παρατηρώντας ότι ο πίνακας X με $X_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$ είναι ημι-ορισμένος πίνακας, αν το G είναι 3-χρωματίσιμο τότε

$$\left\{ X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X_{ii} = 1, \quad X_{ij} = -\frac{1}{2}, \forall (i, j) \in E, \quad X \succeq 0 \right\} \neq \emptyset.$$

Δοθέντος ενός ημι-ορισμένου πίνακα X μπορούμε να πάρουμε n διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^r$ ώστε $\langle v_i, v_j \rangle = -\frac{1}{2}$. Πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα v_i ώστε να πάρουμε ένα ανεξάρτητο σύνολο;

Χρωματισμός Γραφήματος και Ημι-Ορισμένος Προγραμματισμός.

Στρογγυλοποίηση Karger-Motwani-Sudan

- 1: Βρίσκουμε $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $X_{ii} = 1$, $X_{ij} = -\frac{1}{2}, \forall (i, j) \in E$, $X \succeq 0$
- 2: Βρίσκουμε διανύσματα $v_i \in \mathbb{R}^r$ ώστε $X_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$.
- 3: Έστω $g_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ για $1 \leq i \leq r$ και $g = (g_1, \dots, g_r)$
- 4: $I' = \{i \in V : \langle v_i, g \rangle \geq c\}$
- 5: $//c$ θα τεθεί ως $\sqrt{\frac{2\ln(2d)}{3}}$
- 6: $D = \{i \in V \mid (i, -) \in E \cap (I' \times I')\}$
- 7: Επέστρεψε $I := I' \setminus D$

Θεώρημα

Χρωματισμός Γραφήματος και Ημι-Ορισμένος Προγραμματισμός.

Στρογγυλοποίηση Karger-Motwani-Sudan

- 1: Βρίσκουμε $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $X_{ii} = 1$, $X_{ij} = -\frac{1}{2}, \forall (i, j) \in E$, $X \succeq 0$
- 2: Βρίσκουμε διανύσματα $v_i \in \mathbb{R}^r$ ώστε $X_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$.
- 3: Έστω $g_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ για $1 \leq i \leq r$ και $g = (g_1, \dots, g_r)$
- 4: $I' = \{i \in V : \langle v_i, g \rangle \geq c\}$
- 5: $//c$ θα τεθεί ως $\sqrt{\frac{2\ln(2d)}{3}}$
- 6: $D = \{i \in V \mid (i, -) \in E \cap (I' \times I')\}$
- 7: Επέστρεψε $I := I' \setminus D$

Θεώρημα

Αν G έχει μέγιστο βαθμό d και $c = \sqrt{\frac{2\ln(2d)}{3}}$ τότε ο αλγόριθμος επιστρέφει ανεξάρτητο σύνολο με αναμενόμενο μέγεθος $\Omega\left(\frac{n}{d^{\frac{1}{3}}\sqrt{\ln d}}\right)$.

Δύο εργαλεία και μία παρατήρηση.

Θα χρησιμοποιήσουμε δύο εργαλεία σχετικά με την κανονική κατανομή.

Δύο εργαλεία και μία παρατήρηση.

Θα χρησιμοποιήσουμε δύο εργαλεία σχετικά με την κανονική κατανομή.

- 1 (Το άθροισμα ανεξαρτητων μεταβλητών από κανονική κατανομή κατανέμεται ανάλογα) Αν $g \sim \mathcal{N}(0, I)$ τυχαία γκαουσιανή στον $\mathbb{R}^d$ και $v \in \mathbb{R}^d$ τότε $v^T g \sim \mathcal{N}(0, \|v\|_2)$.

Δύο εργαλεία και μία παρατήρηση.

Θα χρησιμοποιήσουμε δύο εργαλεία σχετικά με την κανονική κατανομή.

- 1 (Το άθροισμα ανεξαρτητων μεταβλητών από κανονική κατανομή κατανέμεται ανάλογα) Αν $g \sim \mathcal{N}(0, I)$ τυχαία γκαουσιανή στον $\mathbb{R}^d$ και $v \in \mathbb{R}^d$ τότε $v^T g \sim \mathcal{N}(0, \|v\|_2)$.
- 2 (Η ουρά μιας γκαουσιανής πέφτει γρήγορα)
 $\Pr_{g \sim \mathcal{N}(0,1)}[g \geq z] \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}t} e^{-t^2/2}.$

Δύο εργαλεία και μία παρατήρηση.

Θα χρησιμοποιήσουμε δύο εργαλεία σχετικά με την κανονική κατανομή.

- 1 (Το άθροισμα ανεξαρτητων μεταβλητών από κανονική κατανομή κατανέμεται ανάλογα) Αν $g \sim \mathcal{N}(0, I)$ τυχαία γκαουσιανή στον $\mathbb{R}^d$ και $v \in \mathbb{R}^d$ τότε $v^T g \sim \mathcal{N}(0, \|v\|_2)$.

- 2 (Η ουρά μιας γκαουσιανής πέφτει γρήγορα)

$$\Pr_{g \sim \mathcal{N}(0,1)}[g \geq z] \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t^2/2}.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι για κάθε $(i, j) \in E$ έχουμε

$$\|v_i + v_j\|_2^2 = \underbrace{\|v_i\|_2^2}_1 + \underbrace{\|v_j\|_2^2}_1 + 2 \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{-\frac{1}{2}} = 1.$$

$$(\star) \quad E[|I'|] = \sum_{i \in V} \Pr[i \in I'] =$$

$$(\star) \quad E[|I'|] = \sum_{i \in V} \Pr[i \in I'] = \sum_{i \in V} \Pr[\underbrace{v_i^T g}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \geq c] \approx n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} e^{-c^2/2} \checkmark$$

Ανάλυση αναμενόμενου μεγέθους.

$$(\star) \quad E[|I'|] = \sum_{i \in V} \Pr[i \in I'] = \sum_{i \in V} \Pr[\underbrace{v_i^T g}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \geq c] \approx n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} e^{-c^2/2} \checkmark$$

$$(\dagger) \quad E[|D|] \leq 2 \cdot \sum_{(i,j) \in E} \Pr[i \in I', j \in I']$$

Ανάλυση αναμενόμενου μεγέθους.

$$(\star) \quad E[|I'|] = \sum_{i \in V} \Pr[i \in I'] = \sum_{i \in V} \Pr[\underbrace{v_i^T g}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \geq c] \approx n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} e^{-c^2/2} \checkmark$$

$$(\dagger) \quad E[|D|] \leq 2 \cdot \sum_{(i,j) \in E} \Pr[i \in I', j \in I'] = 2 \cdot \sum_{(i,j) \in E} \Pr[v_i^T g \geq c, v_j^T g \geq c]$$

$$(\star) \quad E[|I'|] = \sum_{i \in V} \Pr[i \in I'] = \sum_{i \in V} \Pr[\underbrace{v_i^T g}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \geq c] \approx n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} e^{-c^2/2} \checkmark$$

$$(\dagger) \quad E[|D|] \leq 2 \cdot \sum_{(i,j) \in E} \Pr[i \in I', j \in I'] = 2 \cdot \sum_{(i,j) \in E} \Pr[v_i^T g \geq c, v_j^T g \geq c]$$

$$\leq 2 \cdot \sum_{(i,j) \in E} \Pr\left[\underbrace{(v_i + v_j)^T g}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \geq 2c\right]$$

$$(\star) \quad E[|I'|] = \sum_{i \in V} \Pr[i \in I'] = \sum_{i \in V} \Pr[\underbrace{v_i^T g}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \geq c] \approx n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}c} e^{-c^2/2} \checkmark$$

$$(\dagger) \quad E[|D|] \leq 2 \cdot \sum_{(i,j) \in E} \Pr[i \in I', j \in I'] = 2 \cdot \sum_{(i,j) \in E} \Pr[v_i^T g \geq c, v_j^T g \geq c]$$

$$\leq 2 \cdot \sum_{(i,j) \in E} \Pr\left[\underbrace{(v_i + v_j)^T g}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \geq 2c\right] \leq n \cdot d \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2c} e^{-2c^2}$$

$$E[|I|] \geq (\star) - (\dagger) \geq_{c=\sqrt{\frac{2}{3}\ln d}} \Omega\left(\frac{n}{d^{\frac{1}{3}}\sqrt{\ln d}}\right) \checkmark$$

$$E[|I|] \geq (\star) - (\dagger) \geq_{c=\sqrt{\frac{2}{3}\ln d}} \Omega\left(\frac{n}{d^{\frac{1}{3}}\sqrt{\ln d}}\right) \checkmark$$

- Ο απλός πιθανοτικός αλγόριθμος ο οποίος διαλέγει κάθε κορυφή ανεξάρτητα με πιθανότητα p θα έδινε $E[|I'|] = np$, $E[|D|] \leq ndp^2$ άρα ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους $\approx np - ndp^2 \Rightarrow_{p \approx \frac{1}{d}} \Theta\left(\frac{n}{d}\right)$.

$$E[|I|] \geq (\star) - (\dagger) \geq_{c=\sqrt{\frac{2}{3}\ln d}} \Omega\left(\frac{n}{d^{\frac{1}{3}}\sqrt{\ln d}}\right) \checkmark$$

- Ο απλός πιθανοτικός αλγόριθμος ο οποίος διαλέγει κάθε κορυφή ανεξάρτητα με πιθανότητα p θα έδινε $E[|I'|] = np$, $E[|D|] \leq ndp^2$ άρα ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους $\approx np - ndp^2 \Rightarrow_{p \approx \frac{1}{d}} \Theta(\frac{n}{d})$.
- Ο αλγόριθμος που σχεδιάσαμε χρησιμοποιεί *εξαρτημένη* δειγματοληψία.

$$E[|I|] \geq (\star) - (\dagger) \geq_{c=\sqrt{\frac{2}{3}\ln d}} \Omega\left(\frac{n}{d^{\frac{1}{3}}\sqrt{\ln d}}\right) \checkmark$$

- Ο απλός πιθανοτικός αλγόριθμος ο οποίος διαλέγει κάθε κορυφή ανεξάρτητα με πιθανότητα p θα έδινε $E[|I'|] = np$, $E[|D|] \leq ndp^2$ άρα ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους $\approx np - ndp^2 \Rightarrow_{p \approx \frac{1}{d}} \Theta(\frac{n}{d})$.
- Ο αλγόριθμος που σχεδιάσαμε χρησιμοποιεί *εξαρτημένη* δειγματοληψία. Κάθε κορυφή μπαίνει στο I' με πιθανότητα $p \approx e^{-c^2/2}$ και κάθε ακμή έχει και τα δύο τις άκρα στο I' με πιθανότητα $p^4 \approx e^{-2c^2}$ αντί για p^2 που είχαμε πριν.

$$E[|I|] \geq (\star) - (\dagger) \geq_{c=\sqrt{\frac{2}{3}\ln d}} \Omega\left(\frac{n}{d^{\frac{1}{3}}\sqrt{\ln d}}\right) \checkmark$$

- Ο απλός πιθανοτικός αλγόριθμος ο οποίος διαλέγει κάθε κορυφή ανεξάρτητα με πιθανότητα p θα έδινε $E[|I'|] = np$, $E[|D|] \leq ndp^2$ άρα ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους $\approx np - ndp^2 \Rightarrow_{p \approx \frac{1}{d}} \Theta(\frac{n}{d})$.
- Ο αλγόριθμος που σχεδιάσαμε χρησιμοποιεί *εξαρτημένη* δειγματοληψία. Κάθε κορυφή μπαίνει στο I' με πιθανότητα $p \approx e^{-c^2/2}$ και κάθε ακμή έχει και τα δύο τις άκρα στο I' με πιθανότητα $p^4 \approx e^{-2c^2}$ αντί για p^2 που είχαμε πριν. Για την ακρίβεια, υπάρχει *αρνητική* συσχέτιση μεταξύ των ενδεχομένων $i \in I'$ και $j \in I'$. Και αυτό είναι που δίνει τη βελτίωση από την ανεξάρτητη δειγματοληψία.