

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι μέσω Πιθανοτικής Στρογγυλοποίησης: Μέρος II

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Πρόβληματα τομής.

Δοθέντος ενός μη κατευθυνόμενου γράφου $G(V, E)$ με μη αρνητικά κόστη $c(e)$ στις ακμές, ο στόχος είναι να βρεθεί ένα σύνολο $F \subseteq E$ ελάχιστου κόστους $c(F) = \sum_{e \in F} c(e)$ έτσι ώστε στον γράφο $\tilde{G}(V, E \setminus F)$ συγκεκριμένα ζεύγη κορυφών να είναι αποσυνδεδεμένα.

Πρόβληματα τομής.

Δοθέντος ενός μη κατευθυνόμενου γράφου $G(V, E)$ με μη αρνητικά κόστη $c(e)$ στις ακμές, ο στόχος είναι να βρεθεί ένα σύνολο $F \subseteq E$ ελάχιστου κόστους $c(F) = \sum_{e \in F} c(e)$ έτσι ώστε στον γράφο $\tilde{G}(V, E \setminus F)$ συγκεκριμένα ζεύγη κορυφών να είναι αποσυνδεδεμένα.

★ Πρόβλημα ελάχιστης τομής. Δίνεται ένα ζεύγος (s, t) και θέλουμε να είναι αποσυνδεδεμένο.

Πρόβληματα τομής.

Δοθέντος ενός μη κατευθυνόμενου γράφου $G(V, E)$ με μη αρνητικά κόστη $c(e)$ στις ακμές, ο στόχος είναι να βρεθεί ένα σύνολο $F \subseteq E$ ελάχιστου κόστους $c(F) = \sum_{e \in F} c(e)$ έτσι ώστε στον γράφο $\tilde{G}(V, E \setminus F)$ συγκεκριμένα ζεύγη κορυφών να είναι αποσυνδεδεμένα.

★ Πρόβλημα ελάχιστης τομής. Δίνεται ένα ζεύγος (s, t) και θέλουμε να είναι αποσυνδεδεμένο.

★ Πρόβλημα τομής με πολλές κορυφές. Δίνονται k κορυφές $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ και θέλουμε στο $\tilde{G}(V, E \setminus F)$ όλα τα ζεύγη (s_i, s_j) να είναι αποσυνδεδεμένα.

Πρόβληματομή.

Δοθέντος ενός μη κατευθυνόμενου γράφου $G(V, E)$ με μη αρνητικά κόστη $c(e)$ στις ακμές, ο στόχος είναι να βρεθεί ένα σύνολο $F \subseteq E$ ελάχιστου κόστους $c(F) = \sum_{e \in F} c(e)$ έτσι ώστε στον γράφο $\tilde{G}(V, E \setminus F)$ συγκεκριμένα ζεύγη κορυφών να είναι αποσυνδεδεμένα.

★ Πρόβλημα ελάχιστης τομής. Δίνεται ένα ζεύγος (s, t) και θέλουμε να είναι αποσυνδεδεμένο.

★ Πρόβλημα τομής με πολλές κορυφές. Δίνονται k κορυφές $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ και θέλουμε στο $\tilde{G}(V, E \setminus F)$ όλα τα ζεύγη (s_i, s_j) να είναι αποσυνδεδεμένα.

★ Πρόβλημα πολλαπλών τομών. Δίνονται k ζεύγη κορυφών $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_k, t_k)$ και θέλουμε στο $\tilde{G}(V, E \setminus F)$ όλα τα ζεύγη (s_i, t_i) να είναι αποσυνδεδεμένα.

Πρόβληματομή.

Δοθέντος ενός μη κατευθυνόμενου γράφου $G(V, E)$ με μη αρνητικά κόστη $c(e)$ στις ακμές, ο στόχος είναι να βρεθεί ένα σύνολο $F \subseteq E$ ελάχιστου κόστους $c(F) = \sum_{e \in F} c(e)$ έτσι ώστε στον γράφο $\tilde{G}(V, E \setminus F)$ συγκεκριμένα ζεύγη κορυφών να είναι αποσυνδεδεμένα.

★ Πρόβλημα ελάχιστης τομής. Δίνεται ένα ζεύγος (s, t) και θέλουμε να είναι αποσυνδεδεμένο.

★ Πρόβλημα τομής με πολλές κορυφές. Δίνονται k κορυφές $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ και θέλουμε στο $\tilde{G}(V, E \setminus F)$ όλα τα ζεύγη (s_i, s_j) να είναι αποσυνδεδεμένα.

★ Πρόβλημα πολλαπλών τομών. Δίνονται k ζεύγη κορυφών $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_k, t_k)$ και θέλουμε στο $\tilde{G}(V, E \setminus F)$ όλα τα ζεύγη (s_i, t_i) να είναι αποσυνδεδεμένα.

Γραμμικό Πρόγραμμα για την $s - t$ τομή.

Θα χρησιμοποιήσουμε μεταβλητές x_e αν πήραμε ή όχι ακμή e .

Γραμμικό Πρόγραμμα για την $s - t$ τομή.

Θα χρησιμοποιήσουμε μεταβλητές x_e αν πήραμε ή όχι ακμή e .

(!) Θέλουμε για κάθε $s - t$ μονοπάτι P να έχουμε $x_e = 1$ για κάποια $e \in P$.

Γραμμικό Πρόγραμμα για την $s - t$ τομή.

Θα χρησιμοποιήσουμε μεταβλητές x_e αν πήραμε ή όχι ακμή e .

(!) Θέλουμε για κάθε $s - t$ μονοπάτι P να έχουμε $x_e = 1$ για κάποια $e \in P$.

(!) Μπορούμε να σκεφτούμε το x_e σαν 'μήκος' της ακμής,

Γραμμικό Πρόγραμμα για την $s - t$ τομή.

Θα χρησιμοποιήσουμε μεταβλητές x_e αν πήραμε ή όχι ακμή e .

(!) Θέλουμε για κάθε $s - t$ μονοπάτι P να έχουμε $x_e = 1$ για κάποια $e \in P$.

(!) Μπορούμε να σκεφτούμε το x_e σαν 'μήκος' της ακμής, να ορίσουμε την μεταβλητή d_{uv} ως το μήκος του $u - v$ μονοπατιού,

Γραμμικό Πρόγραμμα για την $s - t$ τομή.

Θα χρησιμοποιήσουμε μεταβλητές x_e αν πήραμε ή όχι ακμή e .

(!) Θέλουμε για κάθε $s - t$ μονοπάτι P να έχουμε $x_e = 1$ για κάποια $e \in P$.

(!) Μπορούμε να σκεφτούμε το x_e σαν 'μήκος' της ακμής, να ορίσουμε την μεταβλητή d_{uv} ως το μήκος του $u - v$ μονοπατιού, και να απαιτήσουμε $d_{st} \geq 1$.

Γραμμικό Πρόγραμμα για την $s - t$ τομή.

Θα χρησιμοποιήσουμε μεταβλητές x_e αν πήραμε ή όχι ακμή e .

(!) Θέλουμε για κάθε $s - t$ μονοπάτι P να έχουμε $x_e = 1$ για κάποια $e \in P$.

(!) Μπορούμε να σκεφτούμε το x_e σαν 'μήκος' της ακμής, να ορίσουμε την μεταβλητή d_{uv} ως το μήκος του $u - v$ μονοπατιού, και να απαιτήσουμε $d_{st} \geq 1$.

$$\text{minimize } \sum_{e \in E} c(e)x_e$$

$$d_{uv} \leq x_e, \forall e = (u, v) \in E$$

$$d_{uw} \leq d_{uv} + d_{vw}, \forall \{u, v, w\} \subseteq V$$

$$d_{vv} = 0, \forall v \in V$$

$$d_{st} \geq 1$$

$$x_e, d_{uv} \geq 0$$

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για $s - t$ Τομή

- 1: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα και παίρνουμε μεταβλητές x_e, d_{uv} .
- 2: Παίρνουμε $r \in (0, 1)$ στην τύχη.
- 3: $S := \{u : d_{su} \leq r\}$
- 4: Επέστρεψε $F := \partial S$. // $\partial S := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in \bar{S}\}$

Θα δούμε τη μέση συνεισφορά μιας ακμής $e = (u, v)$

$$\Pr [(u, v) \in F] =$$

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για $s - t$ Τομή

- 1: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα και παίρνουμε μεταβλητές x_e, d_{uv} .
- 2: Παίρνουμε $r \in (0, 1)$ στην τύχη.
- 3: $S := \{u : d_{su} \leq r\}$
- 4: Επέστρεψε $F := \partial S$. // $\partial S := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in \bar{S}\}$

Θα δούμε τη μέση συνεισφορά μιας ακμής $e = (u, v)$

$$\Pr[(u, v) \in F] = \Pr[d_{su} \leq r \text{ and } d_{sv} > r] + \Pr[d_{sv} \leq r \text{ and } d_{su} > r]$$

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για $s - t$ Τομή

- 1: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα και παίρνουμε μεταβλητές x_e, d_{uv} .
- 2: Παίρνουμε $r \in (0, 1)$ στην τύχη.
- 3: $S := \{u : d_{su} \leq r\}$
- 4: Επέστρεψε $F := \partial S$. // $\partial S := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in \bar{S}\}$

Θα δούμε τη μέση συνεισφορά μιας ακμής $e = (u, v)$

$$\Pr[(u, v) \in F] = \Pr[d_{su} \leq r \text{ and } d_{sv} > r] + \Pr[d_{sv} \leq r \text{ and } d_{su} > r]$$

$$\Pr[(u, v) \in F] = \Pr[r \in [d_{su}, d_{sv}]] + \Pr[r \in [d_{sv}, d_{su}]] =$$

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για $s - t$ Τομή

- 1: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα και παίρνουμε μεταβλητές x_e, d_{uv} .
- 2: Παίρνουμε $r \in (0, 1)$ στην τύχη.
- 3: $S := \{u : d_{su} \leq r\}$
- 4: Επέστρεψε $F := \partial S$. // $\partial S := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in \bar{S}\}$

Θα δούμε τη μέση συνεισφορά μιας ακμής $e = (u, v)$

$$\Pr[(u, v) \in F] = \Pr[d_{su} \leq r \text{ and } d_{sv} > r] + \Pr[d_{sv} \leq r \text{ and } d_{su} > r]$$

$$\Pr[(u, v) \in F] = \Pr[r \in [d_{su}, d_{sv}]] + \Pr[r \in [d_{sv}, d_{su}]] = |d_{su} - d_{sv}| \leq x_e.$$

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για $s - t$ Τομή

- 1: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα και παίρνουμε μεταβλητές x_e, d_{uv} .
- 2: Παίρνουμε $r \in (0, 1)$ στην τύχη.
- 3: $S := \{u : d_{su} \leq r\}$
- 4: Επέστρεψε $F := \partial S$. // $\partial S := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in \bar{S}\}$

Θα δούμε τη μέση συνεισφορά μιας ακμής $e = (u, v)$

$$\Pr[(u, v) \in F] = \Pr[d_{su} \leq r \text{ and } d_{sv} > r] + \Pr[d_{sv} \leq r \text{ and } d_{su} > r]$$

$$\Pr[(u, v) \in F] = \Pr[r \in [d_{su}, d_{sv}]] + \Pr[r \in [d_{sv}, d_{su}]] = |d_{su} - d_{sv}| \leq x_e.$$

$$\text{Άρα } E[c(F)] =$$

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για $s - t$ Τομή

- 1: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα και παίρνουμε μεταβλητές x_e, d_{uv} .
- 2: Παίρνουμε $r \in (0, 1)$ στην τύχη.
- 3: $S := \{u : d_{su} \leq r\}$
- 4: Επέστρεψε $F := \partial S$. // $\partial S := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in \bar{S}\}$

Θα δούμε τη μέση συνεισφορά μιας ακμής $e = (u, v)$

$$\Pr[(u, v) \in F] = \Pr[d_{su} \leq r \text{ and } d_{sv} > r] + \Pr[d_{sv} \leq r \text{ and } d_{su} > r]$$

$$\Pr[(u, v) \in F] = \Pr[r \in [d_{su}, d_{sv}]] + \Pr[r \in [d_{sv}, d_{su}]] = |d_{su} - d_{sv}| \leq x_e.$$

$$\text{Άρα } E[c(F)] = \sum_{e \in E} \Pr[e \in F] \cdot c(e) =$$

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για $s - t$ Τομή

- 1: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα και παίρνουμε μεταβλητές x_e, d_{uv} .
- 2: Παίρνουμε $r \in (0, 1)$ στην τύχη.
- 3: $S := \{u : d_{su} \leq r\}$
- 4: Επέστρεψε $F := \partial S$. // $\partial S := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in \bar{S}\}$

Θα δούμε τη μέση συνεισφορά μιας ακμής $e = (u, v)$

$$\Pr[(u, v) \in F] = \Pr[d_{su} \leq r \text{ and } d_{sv} > r] + \Pr[d_{sv} \leq r \text{ and } d_{su} > r]$$

$$\Pr[(u, v) \in F] = \Pr[r \in [d_{su}, d_{sv}]] + \Pr[r \in [d_{sv}, d_{su}]] = |d_{su} - d_{sv}| \leq x_e.$$

$$\text{Άρα } E[c(F)] = \sum_{e \in E} \Pr[e \in F] \cdot c(e) = \sum_{e \in E} c_e x_e = OPT_{LP}.$$

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για $s - t$ Τομή

- 1: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα και παίρνουμε μεταβλητές x_e, d_{uv} .
- 2: Παίρνουμε $r \in (0, 1)$ στην τύχη.
- 3: $S := \{u : d_{su} \leq r\}$
- 4: Επέστρεψε $F := \partial S$. // $\partial S := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in \bar{S}\}$

Θα δούμε τη μέση συνεισφορά μιας ακμής $e = (u, v)$

$$\Pr[(u, v) \in F] = \Pr[d_{su} \leq r \text{ and } d_{sv} > r] + \Pr[d_{sv} \leq r \text{ and } d_{su} > r]$$

$$\Pr[(u, v) \in F] = \Pr[r \in [d_{su}, d_{sv}]] + \Pr[r \in [d_{sv}, d_{su}]] = |d_{su} - d_{sv}| \leq x_e.$$

$$\text{Άρα } E[c(F)] = \sum_{e \in E} \Pr[e \in F] \cdot c(e) = \sum_{e \in E} c_e x_e = OPT_{LP}.$$

Βρήκαμε μια ακέραια έγκυρη τομή με κόστος OPT_{LP} , άρα υπάρχει μια βέλτιστη ακέραια λύση του γραμμικού προγράμματος!

Πρόβλημα Τομής με πολλές κορυφές.

★ Πρόβλημα τομής με πολλές κορυφές. Δίνονται k κορυφές $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ και θέλουμε στο $\tilde{G}(V, E \setminus F)$ όλα τα ζεύγη (s_i, s_j) να είναι αποσυνδεδεμένα.

Πρόβλημα Τομής με πολλές κορυφές.

★ Πρόβλημα τομής με πολλές κορυφές. Δίνονται k κορυφές $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ και θέλουμε στο $\tilde{G}(V, E \setminus F)$ όλα τα ζεύγη (s_i, s_j) να είναι αποσυνδεδεμένα.

$$\text{minimize } \sum_{e \in E} c(e)x_e$$

$$d_{uv} \leq x_e, \forall e = (u, v) \in E$$

$$d_{uw} \leq d_{uv} + d_{vw}, \forall \{u, v, w\} \subseteq V$$

$$d_{vv} = 0, \forall v \in V$$

$$d_{s_i s_j} \geq 1, \forall i, j \in [k], i \neq j$$

$$x_e, d_{uv} \geq 0$$

Πρόβλημα Τομής με πολλές κορυφές: στρογγυλοποίηση

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για Πρόβλημα Τομής με πολλαπλές κορυφές

- 1: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα και παίρνουμε μεταβλητές x_e, d_{uv} .
- 2: Παίρνουμε $r \in (0, \frac{1}{2})$ στην τύχη.
- 3: Για $i \in [k]$ $S_i := \{u : d_{s_i u} \leq r\}$
- 4: Επέστρεψε $F := \bigcup_{i=1}^k \partial S$.

Θεώρημα

Πρόβλημα Τομής με πολλές κορυφές: στρογγυλοποίηση

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για Πρόβλημα Τομής με πολλαπλές κορυφές

- 1: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα και παίρνουμε μεταβλητές x_e, d_{uv} .
- 2: Παίρνουμε $r \in (0, \frac{1}{2})$ στην τύχη.
- 3: Για $i \in [k]$ $S_i := \{u : d_{s_i u} \leq r\}$
- 4: Επέστρεψε $F := \bigcup_{i=1}^k \partial S$.

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος παράγει μία έγκυρη τομή F με $E[c(F)] = 2OPT_{LP}$.

Πρόβλημα Τομής με πολλές κορυφές: στρογγυλοποίηση

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για Πρόβλημα Τομής με πολλαπλές κορυφές

- 1: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα και παίρνουμε μεταβλητές x_e, d_{uv} .
- 2: Παίρνουμε $r \in (0, \frac{1}{2})$ στην τύχη.
- 3: Για $i \in [k]$ $S_i := \{u : d_{s_i u} \leq r\}$
- 4: Επέστρεψε $F := \bigcup_{i=1}^k \partial S$.

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος παράγει μία έγκυρη τομή F με $E[c(F)] = 2OPT_{LP}$.

Η τομή είναι έγκυρη διότι για οποιαδήποτε δύο s_i, s_j δεν μπορώ να έχω ένα μονοπάτι από το s_i στο s_j καθώς για κάποιο κόμβο u στο μονοπάτι αυτό θα μας έδινε

$$d_{s_i s_j} \leq$$

Πρόβλημα Τομής με πολλές κορυφές: στρογγυλοποίηση

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για Πρόβλημα Τομής με πολλαπλές κορυφές

- 1: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα και παίρνουμε μεταβλητές x_e, d_{uv} .
- 2: Παίρνουμε $r \in (0, \frac{1}{2})$ στην τύχη.
- 3: Για $i \in [k]$ $S_i := \{u : d_{s_i u} \leq r\}$
- 4: Επέστρεψε $F := \bigcup_{i=1}^k \partial S$.

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος παράγει μία έγκυρη τομή F με $E[c(F)] = 2OPT_{LP}$.

Η τομή είναι έγκυρη διότι για οποιαδήποτε δύο s_i, s_j δεν μπορώ να έχω ένα μονοπάτι από το s_i στο s_j καθώς για κάποιο κόμβο u στο μονοπάτι αυτό θα μας έδινε

$$d_{s_i s_j} \leq d_{s_i u} + d_{s_j u} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \text{ άτοπο!}$$

Πρόβλημα Τομής με πολλές κορυφές: ανάλυση στρογγυλοποίησης

Παρατήρηση. Για κάθε $u \in V$ μπορεί να υπάρχει το πολύ μία κορυφή s_j ώστε $d_{us_i} \leq \frac{1}{2}$. Έστω $\phi(u)$ αυτή η κορυφή.

Πρόβλημα Τομής με πολλές κορυφές: ανάλυση στρογγυλοποίησης

Παρατήρηση. Για κάθε $u \in V$ μπορεί να υπάρχει το πολύ μία κορυφή s_j ώστε $d_{us_i} \leq \frac{1}{2}$. Έστω $\phi(u)$ αυτή η κορυφή.

Θα αναλύσουμε τη μέση συνεισφορά των ακμών με βάση αυτή την παρατήρηση. Το μόνο που χρειαζόμαστε είναι το $\Pr[e \in F]$.

Πρόβλημα Τομής με πολλές κορυφές: ανάλυση στρογγυλοποίησης

Παρατήρηση. Για κάθε $u \in V$ μπορεί να υπάρχει το πολύ μία κορυφή s_j ώστε $d_{us_i} \leq \frac{1}{2}$. Έστω $\phi(u)$ αυτή η κορυφή.

Θα αναλύσουμε τη μέση συνεισφορά των ακμών με βάση αυτή την παρατήρηση. Το μόνο που χρειαζόμαστε είναι το $\Pr[e \in F]$.

Ακμές Τύπου I. Αν $e = (u, v)$ ικανοποιούν $\phi(u) = \phi(v)$.

Πρόβλημα Τομής με πολλές κορυφές: ανάλυση στρογγυλοποίησης

Παρατήρηση. Για κάθε $u \in V$ μπορεί να υπάρχει το πολύ μία κορυφή s_j ώστε $d_{us_i} \leq \frac{1}{2}$. Έστω $\phi(u)$ αυτή η κορυφή.

Θα αναλύσουμε τη μέση συνεισφορά των ακμών με βάση αυτή την παρατήρηση. Το μόνο που χρειαζόμαστε είναι το $\Pr[e \in F]$.

Ακμές Τύπου I. Αν $e = (u, v)$ ικανοποιούν $\phi(u) = \phi(v)$. Τότε $\Pr[e \in F] \leq 2x_e$, ανάλογα με πριν.

Πρόβλημα Τομής με πολλές κορυφές: ανάλυση στρογγυλοποίησης

Παρατήρηση. Για κάθε $u \in V$ μπορεί να υπάρχει το πολύ μία κορυφή s_j ώστε $d_{us_i} \leq \frac{1}{2}$. Έστω $\phi(u)$ αυτή η κορυφή.

Θα αναλύσουμε τη μέση συνεισφορά των ακμών με βάση αυτή την παρατήρηση. Το μόνο που χρειαζόμαστε είναι το $\Pr[e \in F]$.

Ακμές Τύπου I. Αν $e = (u, v)$ ικανοποιούν $\phi(u) = \phi(v)$. Τότε $\Pr[e \in F] \leq 2x_e$, ανάλογα με πριν.

Ακμές Τύπου II. Αν $e = (u, v)$ ικανοποιούν $\phi(u) = i, \phi(v) = j, i \neq j$.

Πρόβλημα Τομής με πολλές κορυφές: ανάλυση στρογγυλοποίησης

Παρατήρηση. Για κάθε $u \in V$ μπορεί να υπάρχει το πολύ μία κορυφή s_j ώστε $d_{us_i} \leq \frac{1}{2}$. Έστω $\phi(u)$ αυτή η κορυφή.

Θα αναλύσουμε τη μέση συνεισφορά των ακμών με βάση αυτή την παρατήρηση. Το μόνο που χρειαζόμαστε είναι το $\Pr[e \in F]$.

Ακμές Τύπου I. Αν $e = (u, v)$ ικανοποιούν $\phi(u) = \phi(v)$. Τότε $\Pr[e \in F] \leq 2x_e$, ανάλογα με πριν.

Ακμές Τύπου II. Αν $e = (u, v)$ ικανοποιούν $\phi(u) = i, \phi(v) = j, i \neq j$.

$$\Pr[e \in F] \leq \Pr[u \in S_i] + \Pr[v \in S_j]$$

Πρόβλημα Τομής με πολλές κορυφές: ανάλυση στρογγυλοποίησης

Παρατήρηση. Για κάθε $u \in V$ μπορεί να υπάρχει το πολύ μία κορυφή s_j ώστε $d_{us_i} \leq \frac{1}{2}$. Έστω $\phi(u)$ αυτή η κορυφή.

Θα αναλύσουμε τη μέση συνεισφορά των ακμών με βάση αυτή την παρατήρηση. Το μόνο που χρειαζόμαστε είναι το $\Pr[e \in F]$.

Ακμές Τύπου I. Αν $e = (u, v)$ ικανοποιούν $\phi(u) = \phi(v)$. Τότε $\Pr[e \in F] \leq 2x_e$, ανάλογα με πριν.

Ακμές Τύπου II. Αν $e = (u, v)$ ικανοποιούν $\phi(u) = i, \phi(v) = j, i \neq j$.

$$\Pr[e \in F] \leq \Pr[u \in S_i] + \Pr[v \in S_j] = \Pr[d_{s_i u} \leq r] + \Pr[d_{s_j v} \leq r] =$$

Πρόβλημα Τομής με πολλές κορυφές: ανάλυση στρογγυλοποίησης

Παρατήρηση. Για κάθε $u \in V$ μπορεί να υπάρχει το πολύ μία κορυφή s_j ώστε $d_{us_i} \leq \frac{1}{2}$. Έστω $\phi(u)$ αυτή η κορυφή.

Θα αναλύσουμε τη μέση συνεισφορά των ακμών με βάση αυτή την παρατήρηση. Το μόνο που χρειαζόμαστε είναι το $\Pr[e \in F]$.

Ακμές Τύπου I. Αν $e = (u, v)$ ικανοποιούν $\phi(u) = \phi(v)$. Τότε $\Pr[e \in F] \leq 2x_e$, ανάλογα με πριν.

Ακμές Τύπου II. Αν $e = (u, v)$ ικανοποιούν $\phi(u) = i, \phi(v) = j, i \neq j$.

$$\Pr[e \in F] \leq \Pr[u \in S_i] + \Pr[v \in S_j] = \Pr[d_{s_i u} \leq r] + \Pr[d_{s_j v} \leq r] =$$

$$\frac{\frac{1}{2} - d_{s_i u}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} - d_{s_j v}}{\frac{1}{2}} = 2(1 - d_{s_i u} - d_{s_j v})$$

Πρόβλημα Τομής με πολλές κορυφές: ανάλυση στρογγυλοποίησης

Παρατήρηση. Για κάθε $u \in V$ μπορεί να υπάρχει το πολύ μία κορυφή s_j ώστε $d_{us_i} \leq \frac{1}{2}$. Έστω $\phi(u)$ αυτή η κορυφή.

Θα αναλύσουμε τη μέση συνεισφορά των ακμών με βάση αυτή την παρατήρηση. Το μόνο που χρειαζόμαστε είναι το $\Pr[e \in F]$.

Ακμές Τύπου I. Αν $e = (u, v)$ ικανοποιούν $\phi(u) = \phi(v)$. Τότε $\Pr[e \in F] \leq 2x_e$, ανάλογα με πριν.

Ακμές Τύπου II. Αν $e = (u, v)$ ικανοποιούν $\phi(u) = i, \phi(v) = j, i \neq j$.

$$\Pr[e \in F] \leq \Pr[u \in S_i] + \Pr[v \in S_j] = \Pr[d_{s_i u} \leq r] + \Pr[d_{s_j v} \leq r] =$$

$$\frac{\frac{1}{2} - d_{s_i u}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} - d_{s_j v}}{\frac{1}{2}} = 2(1 - d_{s_i u} - d_{s_j v}) \leq 2d_{uv}$$

Πρόβλημα Τομής με πολλές κορυφές: ανάλυση στρογγυλοποίησης

Παρατήρηση. Για κάθε $u \in V$ μπορεί να υπάρχει το πολύ μία κορυφή s_j ώστε $d_{us_i} \leq \frac{1}{2}$. Έστω $\phi(u)$ αυτή η κορυφή.

Θα αναλύσουμε τη μέση συνεισφορά των ακμών με βάση αυτή την παρατήρηση. Το μόνο που χρειαζόμαστε είναι το $\Pr[e \in F]$.

Ακμές Τύπου I. Αν $e = (u, v)$ ικανοποιούν $\phi(u) = \phi(v)$. Τότε $\Pr[e \in F] \leq 2x_e$, ανάλογα με πριν.

Ακμές Τύπου II. Αν $e = (u, v)$ ικανοποιούν $\phi(u) = i, \phi(v) = j, i \neq j$.

$$\Pr[e \in F] \leq \Pr[u \in S_i] + \Pr[v \in S_j] = \Pr[d_{s_i u} \leq r] + \Pr[d_{s_j v} \leq r] =$$

$$\frac{\frac{1}{2} - d_{s_i u}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} - d_{s_j v}}{\frac{1}{2}} = 2(1 - d_{s_i u} - d_{s_j v}) \leq 2d_{uv} \leq 2x_e.$$

Πρόβλημα πολλαπλών τομών.

★ Δίνονται k ζεύγη κορυφών $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_k, t_k)$ και θέλουμε στο $\tilde{G}(V, E \setminus F)$ όλα τα ζεύγη (s_i, t_i) να είναι αποσυνδεδεμένα.

Πρόβλημα πολλαπλών τομών.

★ Δίνονται k ζεύγη κορυφών $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_k, t_k)$ και θέλουμε στο $\tilde{G}(V, E \setminus F)$ όλα τα ζεύγη (s_i, t_i) να είναι αποσυνδεδεμένα.

$$\text{minimize } \sum_{e \in E} c(e)x_e$$

$$d_{uv} \leq x_e, \forall e = (u, v) \in E$$

$$d_{uw} \leq d_{uv} + d_{vw}, \forall \{u, v, w\} \subseteq V$$

$$d_{vv} = 0, \forall v \in V$$

$$d_{s_i t_i} \geq 1, \forall i \in [k]$$

$$x_e, d_{uv} \geq 0$$

Πρόβλημα πολλαπλών τομών: στρογγυλοποίηση

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για Πρόβλημα Τομής με πολλαπλές κορυφές

- 1: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα και παίρνουμε μεταβλητές x_e, d_{uv} .
- 2: Παίρνουμε $r \in (0, \frac{1}{2})$ στην τύχη.
- 3: Παίρνουμε μια μετάθεση σ του $[k]$
- 4: Έστω $S_i := \{u : d_{s_i u} \leq r\}$ και $E[S_i] = \{(u, v) \in S_i\}$.
- 5: Για $i \in [k]$ κάνε $F := F \cup \left(\partial S_{\sigma(i)} \setminus \bigcup_{j < i} E[S_{\sigma(j)}] \right)$
- 6: Επέστρεψε F .

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος παράγει μία έγκυρη τομή με αναμενόμενο κόστος $E[c(F)] = 2H_k \cdot OPT_{LP}$, όπου H_k ο k -οστός αρμονικός αριθμός.

Ανάλυση πιθανοτικής στρογγυλοποίησης.

Απόδειξη Ορθότητας. Στο $E \setminus F$ όλα τα ζεύγη (s_i, t_i) διαχωρίζονται.

Ανάλυση πιθανοτικής στρογγυλοποίησης.

Απόδειξη Ορθότητας. Στο $E \setminus F$ όλα τα ζεύγη (s_i, t_i) διαχωρίζονται.

Για τον ίδιο λόγο με πριν, δεν γίνεται για κάποιο i τα s_j, t_j να ανήκουν στο ίδιο σύνολο S_i ($\dagger$).

Ανάλυση πιθανοτικής στρογγυλοποίησης.

Απόδειξη Ορθότητας. Στο $E \setminus F$ όλα τα ζεύγη (s_i, t_i) διαχωρίζονται.

Για τον ίδιο λόγο με πριν, δεν γίνεται για κάποιο i τα s_j, t_j να ανήκουν στο ίδιο σύνολο S_i ($\dagger$).

Δεδομένου ότι το $\partial S_{\sigma(i)} \setminus \bigcup_{j < i} E[S_{\sigma(j)}]$ προστίθεται στο F στην i -οστή επανάληψη του βήματος 5, έχουμε ότι

Ανάλυση πιθανοτικής στρογγυλοποίησης.

Απόδειξη Ορθότητας. Στο $E \setminus F$ όλα τα ζεύγη (s_i, t_i) διαχωρίζονται.

Για τον ίδιο λόγο με πριν, δεν γίνεται για κάποιο i τα s_j, t_j να ανήκουν στο ίδιο σύνολο S_i ($\dagger$).

Δεδομένου ότι το $\partial S_{\sigma(i)} \setminus \bigcup_{j < i} E[S_{\sigma(j)}]$ προστίθεται στο F στην i -οστή επανάληψη του βήματος 5, έχουμε ότι

- 1 Η κορυφή $s_{\sigma(i)}$ είναι αποκομμένη από κορυφές έξω από το $S_{\sigma(i)}$,

Ανάλυση πιθανοτικής στρογγυλοποίησης.

Απόδειξη Ορθότητας. Στο $E \setminus F$ όλα τα ζεύγη (s_i, t_i) διαχωρίζονται.

Για τον ίδιο λόγο με πριν, δεν γίνεται για κάποιο i τα s_j, t_j να ανήκουν στο ίδιο σύνολο S_i ($\dagger$).

Δεδομένου ότι το $\partial S_{\sigma(i)} \setminus \bigcup_{j < i} E[S_{\sigma(j)}]$ προστίθεται στο F στην i -οστή επανάληψη του βήματος 5, έχουμε ότι

- ❶ Η κορυφή $s_{\sigma(i)}$ είναι αποκομμένη από κορυφές έξω από το $S_{\sigma(i)}$, εκτός ενδεχομένως από τα $S_{\sigma(j)} : j < i$ το οποίο περιείχε την κορυφή $s_{\sigma(i)}$.
- ❷ Όμως τέτοια σύνολα $S_{\sigma(j)}$ δεν περιέχουν το $t_{\sigma(i)}$ από την Παρατήρηση ($\dagger$).

Απόδειξη Ορθότητας. Στο $E \setminus F$ όλα τα ζεύγη (s_i, t_i) διαχωρίζονται.

Για τον ίδιο λόγο με πριν, δεν γίνεται για κάποιο i τα s_j, t_j να ανήκουν στο ίδιο σύνολο S_i ($\dagger$).

Δεδομένου ότι το $\partial S_{\sigma(i)} \setminus \bigcup_{j < i} E[S_{\sigma(j)}]$ προστίθεται στο F στην i -οστή επανάληψη του βήματος 5, έχουμε ότι

- ❶ Η κορυφή $s_{\sigma(i)}$ είναι αποκομμένη από κορυφές έξω από το $S_{\sigma(i)}$, εκτός ενδεχομένως από τα $S_{\sigma(j)} : j < i$ το οποίο περιείχε την κορυφή $s_{\sigma(i)}$.
- ❷ Όμως τέτοια σύνολα $S_{\sigma(j)}$ δεν περιέχουν το $t_{\sigma(i)}$ από την Παρατήρηση ($\dagger$).
- ❸ Άρα το $s_{\sigma(i)}$ δεν συνδέεται με το $t_{\sigma(i)}$.

Λόγος προσέγγισης.

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε (u, v) ισχύει $\Pr[(u, v) \in F] \leq 2H_k \cdot d_{uv}$.

Λόγος προσέγγισης.

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε (u, v) ισχύει $\Pr[(u, v) \in F] \leq 2H_k \cdot d_{uv}$.

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

- 1 $\mathcal{E}_i(u, v) :=$ ακριβώς ένα από τα δύο είναι στο S_i

Λόγος προσέγγισης.

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε (u, v) ισχύει $\Pr[(u, v) \in F] \leq 2H_k \cdot d_{uv}$.

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

- 1 $\mathcal{E}_i(u, v) :=$ ακριβώς ένα από τα δύο είναι στο $S_i \Rightarrow \min\{d_{s_i u}, d_{s_i v}\} \leq r < \max\{d_{s_i u}, d_{s_i v}\}$

Λόγος προσέγγισης.

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε (u, v) ισχύει $\Pr[(u, v) \in F] \leq 2H_k \cdot d_{uv}$.

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

- ❶ $\mathcal{E}_i(u, v) :=$ ακριβώς ένα από τα δύο είναι στο $S_i \Rightarrow \min\{d_{s_i u}, d_{s_i v}\} \leq r < \max\{d_{s_i u}, d_{s_i v}\}$
- ❷ $\mathcal{E}'_i(u, v) :=$ κανένα από τα δύο είναι στο S_i

Λόγος προσέγγισης.

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε (u, v) ισχύει $\Pr[(u, v) \in F] \leq 2H_k \cdot d_{uv}$.

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

- ❶ $\mathcal{E}_i(u, v) :=$ ακριβώς ένα από τα δύο είναι στο $S_i \Rightarrow \min\{d_{s_i u}, d_{s_i v}\} \leq r < \max\{d_{s_i u}, d_{s_i v}\}$
- ❷ $\mathcal{E}'_i(u, v) :=$ κανένα από τα δύο είναι στο $S_i \Rightarrow r < \min\{d_{s_i u}, d_{s_i v}\}$

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε (u, v) ισχύει $\Pr[(u, v) \in F] \leq 2H_k \cdot d_{uv}$.

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

- ❶ $\mathcal{E}_i(u, v) :=$ ακριβώς ένα από τα δύο είναι στο $S_i \Rightarrow \min\{d_{s_i u}, d_{s_i v}\} \leq r < \max\{d_{s_i u}, d_{s_i v}\}$
- ❷ $\mathcal{E}'_i(u, v) :=$ κανένα από τα δύο είναι στο $S_i \Rightarrow r < \min\{d_{s_i u}, d_{s_i v}\}$

$$\Pr[(u, v) \in F] = \Pr \left[\exists i : \mathcal{E}_{\sigma(i)}(u, v) \text{ and } \mathcal{E}'_{\sigma(j)}(u, v) \forall j < i \right]$$

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε (u, v) ισχύει $\Pr[(u, v) \in F] \leq 2H_k \cdot d_{uv}$.

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

- ❶ $\mathcal{E}_i(u, v) :=$ ακριβώς ένα από τα δύο είναι στο $S_i \Rightarrow \min\{d_{s_i u}, d_{s_i v}\} \leq r < \max\{d_{s_i u}, d_{s_i v}\}$
- ❷ $\mathcal{E}'_i(u, v) :=$ κανένα από τα δύο είναι στο $S_i \Rightarrow r < \min\{d_{s_i u}, d_{s_i v}\}$

$$\Pr[(u, v) \in F] = \Pr \left[\exists i : \mathcal{E}_{\sigma(i)}(u, v) \text{ and } \mathcal{E}'_{\sigma(j)}(u, v) \forall j < i \right]$$

$$\sum_{i=1}^k \Pr \left[r \in [d_{s_{\sigma(i)} u}, d_{s_{\sigma(i)} v}] \text{ and } d_{s_{\sigma(i)} u} < d_{s_{\sigma(j)} u} \forall j < i \right],$$

υποθέτωντας ότι $d_{\sigma(i)u} < d_{\sigma(i)v}$ χωρίς βλάβη της γενικότητας.

$$\sum_{i=1}^k \Pr \left[r \in [d_{s_{\sigma(i)u}}, d_{s_{\sigma(i)v}}] \text{ and } d_{s_{\sigma(i)u}} < d_{s_{\sigma(j)u}} \forall j < i \right]$$
$$\sum_{i=1}^k \underbrace{\Pr \left[r \in [d_{s_{\sigma(i)u}}, d_{s_{\sigma(i)v}}] \right]}_{\pi_1(i)} \cdot \underbrace{\Pr_{\sigma} \left[d_{s_{\sigma(i)u}} < d_{s_{\sigma(j)u}} \forall j < i \right]}_{\pi_2(i)}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{i=1}^k \Pr \left[r \in [d_{s_{\sigma(i)u}}, d_{s_{\sigma(i)v}}] \text{ and } d_{s_{\sigma(i)u}} < d_{s_{\sigma(j)u}} \forall j < i \right]$$
$$\sum_{i=1}^k \underbrace{\Pr \left[r \in [d_{s_{\sigma(i)u}}, d_{s_{\sigma(i)v}}] \right]}_{\pi_1(i)} \cdot \underbrace{\Pr_{\sigma} \left[d_{s_{\sigma(i)u}} < d_{s_{\sigma(j)u}} \forall j < i \right]}_{\pi_2(i)}$$

Γνωρίζουμε ότι $\pi_1(i) = \frac{1}{2} \left(d_{s_{\sigma(i)v}} - d_{s_{\sigma(i)u}} \right) \leq 2d_{uv} \leq 2x_e$.

$$\sum_{i=1}^k \Pr \left[r \in [d_{s_{\sigma(i)u}}, d_{s_{\sigma(i)v}}] \text{ and } d_{s_{\sigma(i)u}} < d_{s_{\sigma(j)u}} \forall j < i \right]$$

$$\sum_{i=1}^k \underbrace{\Pr \left[r \in [d_{s_{\sigma(i)u}}, d_{s_{\sigma(i)v}}] \right]}_{\pi_1(i)} \cdot \underbrace{\Pr_{\sigma} \left[d_{s_{\sigma(i)u}} < d_{s_{\sigma(j)u}} \forall j < i \right]}_{\pi_2(i)}$$

Γνωρίζουμε ότι $\pi_1(i) = \frac{1}{2} \left(d_{s_{\sigma(i)v}} - d_{s_{\sigma(i)u}} \right) \leq 2d_{uv} \leq 2x_e$.

Το $\pi_2(i)$ ζητάει την πιθανότητα ανάμεσα σε μία μετάθεση k αποστάσεων η i -οστή θα είναι η μεγαλύτερη ανάμεσα στις i πρώτες,

$$\sum_{i=1}^k \Pr \left[r \in [d_{s_{\sigma(i)u}}, d_{s_{\sigma(i)v}}] \text{ and } d_{s_{\sigma(i)u}} < d_{s_{\sigma(j)u}} \forall j < i \right]$$

$$\sum_{i=1}^k \underbrace{\Pr \left[r \in [d_{s_{\sigma(i)u}}, d_{s_{\sigma(i)v}}] \right]}_{\pi_1(i)} \cdot \underbrace{\Pr_{\sigma} \left[d_{s_{\sigma(i)u}} < d_{s_{\sigma(j)u}} \forall j < i \right]}_{\pi_2(i)}$$

Γνωρίζουμε ότι $\pi_1(i) = \frac{1}{2} \left(d_{s_{\sigma(i)v}} - d_{s_{\sigma(i)u}} \right) \leq 2d_{uv} \leq 2x_e$.

Το $\pi_2(i)$ ζητάει την πιθανότητα ανάμεσα σε μία μετάθεση k αποστάσεων η i -οστή θα είναι η μεγαλύτερη ανάμεσα στις i πρώτες, το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{1}{i}$.

$$\sum_{i=1}^k \Pr \left[r \in [d_{s_{\sigma(i)u}}, d_{s_{\sigma(i)v}}] \text{ and } d_{s_{\sigma(i)u}} < d_{s_{\sigma(j)u}} \forall j < i \right]$$

$$\sum_{i=1}^k \underbrace{\Pr \left[r \in [d_{s_{\sigma(i)u}}, d_{s_{\sigma(i)v}}] \right]}_{\pi_1(i)} \cdot \underbrace{\Pr_{\sigma} \left[d_{s_{\sigma(i)u}} < d_{s_{\sigma(j)u}} \forall j < i \right]}_{\pi_2(i)}$$

Γνωρίζουμε ότι $\pi_1(i) = \frac{1}{2} \left(d_{s_{\sigma(i)v}} - d_{s_{\sigma(i)u}} \right) \leq 2d_{uv} \leq 2x_e$.

Το $\pi_2(i)$ ζητάει την πιθανότητα ανάμεσα σε μία μετάθεση k αποστάσεων η i -οστή θα είναι η μεγαλύτερη ανάμεσα στις i πρώτες, το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{1}{i}$.

Συνολικά,

$$\Pr[(u, v) \in F] \leq \sum_{i=1}^k \frac{2x_e}{i} = 2H_k \cdot x_e \checkmark$$