

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι μέσω του δυϊκού: Μέρος II

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι μέσω του Δυϊκού

Πρωτεύον

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Δυϊκό

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ & A^\top y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι όποτε το ένα από τα δύο είναι επιλύσιμο τότε και το άλλο είναι και (κόστος πρωτεύοντος) = (κέρδος δυϊκού).

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι μέσω του Δυϊκού

Πρωτεύον

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Δυϊκό

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ & A^\top y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι όποτε το ένα από τα δύο είναι επιλύσιμο τότε και το άλλο είναι και (κόστος πρωτεύοντος) = (κέρδος δυϊκού).

Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι μέσω σχήματος πρωτεύοντος-δυϊκού.

Γενική μορφή αλγοριθμικού σχήματος.

Το προσεγγιστικό σχήμα πρωτεύοντος-δυϊκού ακολουθεί τα εξής βήματα:

Γενική μορφή αλγοριθμικού σχήματος.

Το προσεγγιστικό σχήμα πρωτεύοντος-δυϊκού ακολουθεί τα εξής βήματα:

- 1 Ξεκινάμε με μια λύση του **δυϊκού** προβλήματος, συνήθως την κενή λύση, και ένα κενό σύνολο S , το οποίο στο τέλος εκτέλεσης του αλγόριθμου θα είναι λύση του **πρωτεύοντος**.

Γενική μορφή αλγοριθμικού σχήματος.

Το προσεγγιστικό σχήμα πρωτεύοντος-δυϊκού ακολουθεί τα εξής βήματα:

- 1 Ξεκινάμε με μια λύση του **δυϊκού** προβλήματος, συνήθως την κενή λύση, και ένα κενό σύνολο S , το οποίο στο τέλος εκτέλεσης του αλγόριθμου θα είναι λύση του **πρωτεύοντος**.
- 2 Αυξάνουμε ένα υποσύνολο των **δυϊκών μεταβλητών** έως ότου κάποιος **δυϊκός** περιορισμός γίνει ισότητα.

Γενική μορφή αλγοριθμικού σχήματος.

Το προσεγγιστικό σχήμα πρωτεύοντος-δυϊκού ακολουθεί τα εξής βήματα:

- 1 Ξεκινάμε με μια λύση του **δυϊκού** προβλήματος, συνήθως την κενή λύση, και ένα κενό σύνολο S , το οποίο στο τέλος εκτέλεσης του αλγόριθμου θα είναι λύση του **πρωτεύοντος**.
- 2 Αυξάνουμε ένα υποσύνολο των **δυϊκών μεταβλητών** έως ότου κάποιος **δυϊκός** περιορισμός γίνει ισότητα.
- 3 Σύμφωνα με την ιδιότητα της συμπληρωματικής χαλαρότητας, επιλέγουμε την αντίστοιχη μεταβλητή του **πρωτεύοντος** και την προσθέτουμε στο S .
- 4 Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να μην μπορούμε να αυξήσουμε περαιτέρω τις **δυϊκές** μεταβλητές ή μέχρι να αποκτήσουμε μια εφικτή λύση για το **πρωτεύον**.

Γενική μορφή αλγοριθμικού σχήματος.

Το προσεγγιστικό σχήμα πρωτεύοντος-δυϊκού ακολουθεί τα εξής βήματα:

- 1 Ξεκινάμε με μια λύση του **δυϊκού** προβλήματος, συνήθως την κενή λύση, και ένα κενό σύνολο S , το οποίο στο τέλος εκτέλεσης του αλγόριθμου θα είναι λύση του **πρωτεύοντος**.
- 2 Αυξάνουμε ένα υποσύνολο των **δυϊκών μεταβλητών** έως ότου κάποιος **δυϊκός** περιορισμός γίνει ισότητα.
- 3 Σύμφωνα με την ιδιότητα της συμπληρωματικής χαλαρότητας, επιλέγουμε την αντίστοιχη μεταβλητή του **πρωτεύοντος** και την προσθέτουμε στο S .
- 4 Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να μην μπορούμε να αυξήσουμε περαιτέρω τις **δυϊκές** μεταβλητές ή μέχρι να αποκτήσουμε μια εφικτή λύση για το **πρωτεύον**.
- 5 (Ενδεχομένως ακολουθεί ένα μετα-επεξεργαστικό βήμα).

Πρόβλημα Χωροθέτησης Υπηρεσιών

Δίνονται δύο σύνολα C, F σε ένα χώρο με μετρική την απόσταση d . Σε κάθε θέση του C υπάρχει ένας πελάτης. Σε κάθε $i \in F$ μπορούμε να ανοίξουμε μια υπηρεσία με κόστος f_i .

Πρόβλημα Χωροθέτησης Υπηρεσιών

Δίνονται δύο σύνολα C, F σε ένα χώρο με μετρική την απόσταση d . Σε κάθε θέση του C υπάρχει ένας πελάτης. Σε κάθε $i \in F$ μπορούμε να ανοίξουμε μια υπηρεσία με κόστος f_i .

★ Θέλουμε να ανοίξουμε κάποιες υπηρεσίες $F' \subseteq F$ και να αναθέσουμε κάθε πελάτη $j \in C$ σε κάποια υπηρεσία $\sigma(j) \in F'$: το κόστος είναι $d_{\sigma(j),j}$ για την ανάθεση.

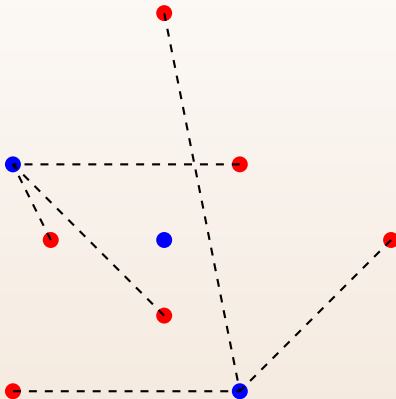
Πρόβλημα Χωροθέτησης Υπηρεσιών

Δίνονται δύο σύνολα C, F σε ένα χώρο με μετρική την απόσταση d . Σε κάθε θέση του C υπάρχει ένας πελάτης. Σε κάθε $i \in F$ μπορούμε να ανοίξουμε μια υπηρεσία με κόστος f_i .

★ Θέλουμε να ανοίξουμε κάποιες υπηρεσίες $F' \subseteq F$ και να αναθέσουμε κάθε πελάτη $j \in C$ σε κάποια υπηρεσία $\sigma(j) \in F'$: το κόστος είναι $d_{\sigma(j),j}$ για την ανάθεση.

$$C_{ALG} = \underbrace{\sum_{j \in F'} f_i}_{\text{κόστος ανοίγματος}} + \underbrace{\sum_{i \in C} d_{\sigma(j),j}}_{\text{κόστος ανάθεσης}}$$

Στο παρακάτω στιγμιότυπο τα κόκκινα σημεία αντιστοιχούν στους πελάτες και τα μπλε στις πιθανές υπηρεσίες. Είναι ανοικτές ακριβώς δύο υπηρεσίες.



Πρωτεύον και Δυϊκό για Πρόβλημα Χωροθέτησης Υπηρεσιών

Πρωτεύον

$$\text{minimize } \sum_{i \in F} y_i + \sum_{i \in F, j \in C} d_{i,j} x_{i,j}$$

$$\sum_{i \in F} x_{ij} \geq 1, \forall j \in C$$

$$y_i \geq x_{ij}, \forall i \in F, j \in C$$

$$x_{ij}, y_i \geq 0$$

Δυϊκό

$$\text{maximize } \sum_{j \in C} \alpha_j$$

$$\sum_{j \in C} \beta_{ij} \leq f_i, \forall i \in F$$

$$\alpha_j - \beta_{ij} \leq d_{i,j}, \forall i \in F, j \in C$$

$$\alpha_j, \beta_{ij} \geq 0$$

Είδη μεταβλητών στο πρωτεύον και στο δυϊκό

- Πρωτεύουσες μεταβλητές y_i εκφράζουν αν ανοίξαμε υπηρεσία στο $i \in F$.
- Πρωτεύουσες μεταβλητές x_{ij} εκφράζουν αν αναθέσαμε υπηρεσία j στο i .

Είδη μεταβλητών στο πρωτεύον και στο δυϊκό

- Πρωτεύουσες μεταβλητές y_i εκφράζουν αν ανοίξαμε υπηρεσία στο $i \in F$.
- Πρωτεύουσες μεταβλητές x_{ij} εκφράζουν αν αναθέσαμε υπηρεσία j στο i .
- Δυϊκές μεταβλητές α_j εκφράζουν 'χρέος' για τον πελάτη $j \in C$.

Είδη μεταβλητών στο πρωτεύον και στο δυϊκό

- Πρωτεύουσες μεταβλητές y_i εκφράζουν αν ανοίξαμε υπηρεσία στο $i \in F$.
- Πρωτεύουσες μεταβλητές x_{ij} εκφράζουν αν αναθέσαμε υπηρεσία j στο i .
- Δυϊκές μεταβλητές α_j εκφράζουν 'χρέος' για τον πελάτη $j \in C$.
- Δυϊκές μεταβλητές β_{ij} εκφράζουν 'ελλάτωση χρεους' (έκπτωση) για την ανάθεση $i \rightarrow j$

Είδη μεταβλητών στο πρωτεύον και στο δυϊκό

- Πρωτεύουσες μεταβλητές y_i εκφράζουν αν ανοίξαμε υπηρεσία στο $i \in F$.
 - Πρωτεύουσες μεταβλητές x_{ij} εκφράζουν αν αναθέσαμε υπηρεσία j στο i .
 - Δυϊκές μεταβλητές α_j εκφράζουν 'χρέος' για τον πελάτη $j \in C$.
 - Δυϊκές μεταβλητές β_{ij} εκφράζουν 'ελλάτωση χρεους' (έκπτωση) για την ανάθεση $i \rightarrow j$.
- ★ Ο περιορισμός $\alpha_j - \beta_{ij} \leq d_{i,j}$ εκφράζει ότι το συνολικό χρέος για την ανάθεση $j \rightarrow i$ πρέπει να είναι $\leq d_{i,j}$.

Είδη μεταβλητών στο πρωτεύον και στο δυϊκό

- Πρωτεύουσες μεταβλητές y_i εκφράζουν αν ανοίξαμε υπηρεσία στο $i \in F$.
 - Πρωτεύουσες μεταβλητές x_{ij} εκφράζουν αν αναθέσαμε υπηρεσία j στο i .
 - Δυϊκές μεταβλητές α_j εκφράζουν 'χρέος' για τον πελάτη $j \in C$.
 - Δυϊκές μεταβλητές β_{ij} εκφράζουν 'ελλάτωση χρεους' (έκπτωση) για την ανάθεση $i \rightarrow j$.
- ★ Ο περιορισμός $\alpha_j - \beta_{ij} \leq d_{i,j}$ εκφράζει ότι το συνολικό χρέος για την ανάθεση $j \rightarrow i$ πρέπει να είναι $\leq d_{i,j}$.
- ★ Ο περιορισμός $\sum_{j \in C} \beta_{ij} \leq f_i$ εκφράζει ότι για κάθε υπηρεσία έχω μια συγκεκριμένη συνολική ελάττωση χρέους που έχω να κατανείμω.

Αλγόριθμος: Στάδιο Ι

- 1: $\alpha_j \leftarrow 0, \beta_{ij} \leftarrow 0, \forall i \in F, j \in C$
- 2: $A \leftarrow C; X \leftarrow \emptyset; \Pi \leftarrow \emptyset$ // Π κρατάει ζεύγη $(i, j) \in F \times C$
- 3: Όσο $A \neq \emptyset$
- 4: Για $j \in A$ και κάθε $(i, j) \in \Pi$, αύξησε α_j και β_{ij} ομοιόμορφα
 εώς όπου ένα από τα ακόλουθα να συμβαίνει:

Αλγόριθμος: Στάδιο Ι

- 1: $\alpha_j \leftarrow 0, \beta_{ij} \leftarrow 0, \forall i \in F, j \in C$
- 2: $A \leftarrow C; X \leftarrow \emptyset; \Pi \leftarrow \emptyset$ // Π κρατάει ζεύγη $(i, j) \in F \times C$
- 3: Όσο $A \neq \emptyset$
- 4: Για $j \in A$ και κάθε $(i, j) \in \Pi$, αύξησε α_j και β_{ij} ομοιόμορφα
 εώς όπου ένα από τα ακόλουθα να συμβαίνει:
 (α) Ένα νέο ζεύγος (i, j) δημιουργεί ισότητα: $\alpha_j = d_{i,j}$:

Αλγόριθμος: Στάδιο Ι

- 1: $\alpha_j \leftarrow 0, \beta_{ij} \leftarrow 0, \forall i \in F, j \in C$
- 2: $A \leftarrow C; X \leftarrow \emptyset; \Pi \leftarrow \emptyset$ // Π κρατάει ζεύγη $(i, j) \in F \times C$
- 3: Όσο $A \neq \emptyset$
- 4: Για $j \in A$ και κάθε $(i, j) \in \Pi$, αύξησε α_j και β_{ij} ομοιόμορφα
εώς όπου ένα από τα ακόλουθα να συμβαίνει:
(α) Ένα νέο ζεύγος (i, j) δημιουργεί ισότητα: $\alpha_j = d_{i,j}$:
 - $\Pi \leftarrow \Pi \cup \{(i, j)\}$
 - Αν $i \in X$ τότε $\sigma(j) \leftarrow i, A \leftarrow A \setminus \{j\}$

Αλγόριθμος: Στάδιο Ι

- 1: $\alpha_j \leftarrow 0, \beta_{ij} \leftarrow 0, \forall i \in F, j \in C$
- 2: $A \leftarrow C; X \leftarrow \emptyset; \Pi \leftarrow \emptyset$ // Π κρατάει ζεύγη $(i, j) \in F \times C$
- 3: Όσο $A \neq \emptyset$
- 4: Για $j \in A$ και κάθε $(i, j) \in \Pi$, αύξησε α_j και β_{ij} ομοιόμορφα
εώς όπου ένα από τα ακόλουθα να συμβαίνει:
 - (α) Ένα νέο ζεύγος (i, j) δημιουργεί ισότητα: $\alpha_j = d_{i,j}$:
 - $\Pi \leftarrow \Pi \cup \{(i, j)\}$
 - Αν $i \in X$ τότε $\sigma(j) \leftarrow i, A \leftarrow A \setminus \{j\}$
 - (β) Για κάποιο $i \in F \setminus X, \sum_{j \in C} \beta_{ij} = f_i$:

Αλγόριθμος: Στάδιο Ι

- 1: $\alpha_j \leftarrow 0, \beta_{ij} \leftarrow 0, \forall i \in F, j \in C$
- 2: $A \leftarrow C; X \leftarrow \emptyset; \Pi \leftarrow \emptyset$ // Π κρατάει ζεύγη $(i, j) \in F \times C$
- 3: Όσο $A \neq \emptyset$
- 4: Για $j \in A$ και κάθε $(i, j) \in \Pi$, αύξησε α_j και β_{ij} ομοιόμορφα
εώς όπου ένα από τα ακόλουθα να συμβαίνει:
 - (α) Ένα νέο ζεύγος (i, j) δημιουργεί ισότητα: $\alpha_j = d_{i,j}$:
 - $\Pi \leftarrow \Pi \cup \{(i, j)\}$
 - Αν $i \in X$ τότε $\sigma(j) \leftarrow i, A \leftarrow A \setminus \{j\}$
 - (β) Για κάποιο $i \in F \setminus X, \sum_{j \in C} \beta_{ij} = f_i$:
 - Για κάθε $j \in A$ με $(i, j) \in \Pi$:
 - $A \leftarrow A \setminus \{j\}, \sigma(j) \leftarrow i$
- 5: Επέστρεψε (X, σ, β)

Αλγόριθμος: Στάδιο Ι

- 1: $\alpha_j \leftarrow 0, \beta_{ij} \leftarrow 0, \forall i \in F, j \in C$
- 2: $A \leftarrow C; X \leftarrow \emptyset; \Pi \leftarrow \emptyset$ // Π κρατάει ζεύγη $(i, j) \in F \times C$
- 3: Όσο $A \neq \emptyset$
- 4: Για $j \in A$ και κάθε $(i, j) \in \Pi$, αύξησε α_j και β_{ij} ομοιόμορφα
έως ότου ένα από τα ακόλουθα να συμβαίνει:
 - (α) Ένα νέο ζεύγος (i, j) δημιουργεί ισότητα: $\alpha_j = d_{i,j}$:
 - $\Pi \leftarrow \Pi \cup \{(i, j)\}$
 - Αν $i \in X$ τότε $\sigma(j) \leftarrow i, A \leftarrow A \setminus \{j\}$
 - (β) Για κάποιο $i \in F \setminus X, \sum_{j \in C} \beta_{ij} = f_i$:
 - Για κάθε $j \in A$ με $(i, j) \in \Pi$:
 - $A \leftarrow A \setminus \{j\}, \sigma(j) \leftarrow i$
- 5: Επέστρεψε (X, σ, β)

Παρατηρούμε τις εξής δύο αναλλοίωτες

- 1 Όταν ένας $j \in C$ βγαίνει από το A ανατίθεται στο $\sigma(j) \in X$, και επιπλέον $d_{\sigma(j),j} = \alpha_j - \beta_{i,j}$.

Παρατηρούμε τις εξής δύο αναλλοίωτες

- 1 Όταν ένας $j \in C$ βγαίνει από το A ανατίθεται στο $\sigma(j) \in X$, και επιπλέον $d_{\sigma(j),j} = \alpha_j - \beta_{i,j}$.
- 2 Όταν μία υπηρεσία i μπαίνει στο X ικανοποιεί $\sum_{j \in C} \beta_{ij} = f_i$.

Παρατηρούμε τις εξής δύο αναλλοίωτες

- 1 Όταν ένας $j \in C$ βγαίνει από το A ανατίθεται στο $\sigma(j) \in X$, και επιπλέον $d_{\sigma(j),j} = \alpha_j - \beta_{i,j}$.
- 2 Όταν μία υπηρεσία i μπαίνει στο X ικανοποιεί $\sum_{j \in C} \beta_{ij} = f_i$.

Θέλουμε να εκφράσουμε το κόστος του αλγορίθμου = (κόστος ανοίγματος) + (κόστος ανάθεσης) σαν συνάρτηση του $\sum_{j \in C} \alpha_j$, το οποίο είναι το κέρδος της δυϊκής λύσης την οποίας φτιάξαμε.

Το συνολικό κόστος του αλγορίθμου ισούται με

$$\sum_{i \in X} f_i + \sum_{j \in C} d_{\sigma(j), i}$$

Το συνολικό κόστος του αλγορίθμου ισούται με

$$\sum_{i \in X} f_i + \sum_{j \in C} d_{\sigma(j),i} = \sum_{i \in X, j \in C} \beta_{i,j} + \sum_{j \in C} (\alpha_j - \beta_{\sigma(j),j}).$$

Ανάλυση κόστους.

Το συνολικό κόστος του αλγορίθμου ισούται με

$$\sum_{i \in X} f_i + \sum_{j \in C} d_{\sigma(j),i} = \sum_{i \in X, j \in C} \beta_{i,j} + \sum_{j \in C} (\alpha_j - \beta_{\sigma(j),j}).$$

Μπορούμε να το ξαναγράψουμε ως

$$\underbrace{\sum_{j \in C} \alpha_j}_{\text{κόστος δυϊκού}} + \sum_{i \in X} \left(\sum_{j \in C} \beta_{ij} - \sum_{j \in C: \sigma(j)=i} \beta_{ij} \right).$$

Ανάλυση κόστους.

Το συνολικό κόστος του αλγορίθμου ισούται με

$$\sum_{i \in X} f_i + \sum_{j \in C} d_{\sigma(j),i} = \sum_{i \in X, j \in C} \beta_{i,j} + \sum_{j \in C} (\alpha_j - \beta_{\sigma(j),j}).$$

Μπορούμε να το ξαναγράψουμε ως

$$\underbrace{\sum_{j \in C} \alpha_j}_{\text{κόστος δυϊκού}} + \sum_{i \in X} \left(\sum_{j \in C} \beta_{ij} - \sum_{j \in C: \sigma(j)=i} \beta_{ij} \right).$$

Θα θέλαμε να χρεώσουμε το παραπάνω κόστος στο κέρδος της λύσης του δυϊκού $\sum_{j \in C} \alpha_j$,

Ανάλυση κόστους.

Το συνολικό κόστος του αλγορίθμου ισούται με

$$\sum_{i \in X} f_i + \sum_{j \in C} d_{\sigma(j),i} = \sum_{i \in X, j \in C} \beta_{i,j} + \sum_{j \in C} (\alpha_j - \beta_{\sigma(j),j}).$$

Μπορούμε να το ξαναγράψουμε ως

$$\underbrace{\sum_{j \in C} \alpha_j}_{\text{κόστος δυϊκού}} + \sum_{i \in X} \left(\sum_{j \in C} \beta_{ij} - \sum_{j \in C: \sigma(j)=i} \beta_{ij} \right).$$

Θα θέλαμε να χρεώσουμε το παραπάνω κόστος στο κέρδος της λύσης του δυϊκού $\sum_{j \in C} \alpha_j$, αλλά ενδέχεται ο όρος

$\sum_{i \in X} \left(\sum_{j \in C} \beta_{ij} - \sum_{j \in C: \sigma(j)=i} \beta_{ij} \right)$ να είναι πολύ μεγαλύτερος.

Αλγόριθμος: Στάδιο II

- 1: Τρέξε το Στάδιο I για να πάρεις τα (X, σ, β) .
- 2: Κατασκεύασε γράφο $G(X, E)$ με $(i, i') \in E$ αν και μόνο αν υπάρχει $j \in C$ με $\beta_{ij} > 0$ και $\beta_{i'j} > 0$.
- 3: Βρες ένα μεγιστοτικά ανεξάρτητο σύνολο I του G .
- 4: Επέστρεψε το I ως το τελικό σύνολο όπου θα ανοίξουν οι υπηρεσίες.

Ιδέα ανάλυσης.

Αλγόριθμος: Στάδιο II

- 1: Τρέξε το Στάδιο I για να πάρεις τα (X, σ, β) .
- 2: Κατασκεύασε γράφο $G(X, E)$ με $(i, i') \in E$ αν και μόνο αν υπάρχει $j \in C$ με $\beta_{ij} > 0$ και $\beta_{i'j} > 0$.
- 3: Βρες ένα μεγιστοτικά ανεξάρτητο σύνολο I του G .
- 4: Επέστρεψε το I ως το τελικό σύνολο όπου θα ανοίξουν οι υπηρεσίες.

Ιδέα ανάλυσης. Κάθε $j \in C$ θα ανατεθεί στην πλησιέστερη υπηρεσία στο I . Θα αποδείξουμε ένα φράγμα στο κόστος ανάθεσης δείχνοντας μία (ενδεχομένως υπο-βέλτιστη) ανάθεση $\sigma : C \rightarrow I$.

- Για κάθε $i \in X$ ορίζουμε $\Gamma(i) := \{j : (i, j) \in \Pi\}$, τα οποία είναι οι πελάτες για τους οποίους ισχύει ισότητα στην (i, j) ανισότητα του δυϊκού.

Ανάθεση πελατών σε υπηρεσίες στο I .

- Για κάθε $i \in X$ ορίζουμε $\Gamma(i) := \{j : (i, j) \in \Pi\}$, τα οποία είναι οι πελάτες για τους οποίους ισχύει ισότητα στην (i, j) ανισότητα του δυϊκού.
- Για κάθε $T \subseteq X$ ορίζουμε $\Gamma(T) := \bigcup_{i \in T} \Gamma(i)$.

Ανάθεση πελατών σε υπηρεσίες στο I .

- Για κάθε $i \in X$ ορίζουμε $\Gamma(i) := \{j : (i, j) \in \Pi\}$, τα οποία είναι οι πελάτες για τους οποίους ισχύει ισότητα στην (i, j) ανισότητα του δυϊκού.
- Για κάθε $T \subseteq X$ ορίζουμε $\Gamma(T) := \bigcup_{i \in T} \Gamma(i)$.
- Αν j μπορεί να ανατεθεί σε κάποιο $i \in I$ (δηλαδή η ανισότητα (i, j) του δυϊκού είναι ισότητα και $\beta_{i,j} > 0$) τότε $\sigma(j) \leftarrow i$.

Ανάθεση πελατών σε υπηρεσίες στο I .

- Για κάθε $i \in X$ ορίζουμε $\Gamma(i) := \{j : (i, j) \in \Pi\}$, τα οποία είναι οι πελάτες για τους οποίους ισχύει ισότητα στην (i, j) ανισότητα του δυϊκού.
- Για κάθε $T \subseteq X$ ορίζουμε $\Gamma(T) := \bigcup_{i \in T} \Gamma(i)$.
- Αν j μπορεί να ανατεθεί σε κάποιο $i \in I$ (δηλαδή η ανισότητα (i, j) του δυϊκού είναι ισότητα και $\beta_{i,j} > 0$) τότε $\sigma(j) \leftarrow i$.
- Επειδή το I είναι ανεξάρτητο σύνολο του G , κάθε πελάτης $j \in C$ ανατίθεται στο πολύ μία υπηρεσία.

Ανάθεση πελατών σε υπηρεσίες στο I .

- Για κάθε $i \in X$ ορίζουμε $\Gamma(i) := \{j : (i, j) \in \Pi\}$, τα οποία είναι οι πελάτες για τους οποίους ισχύει ισότητα στην (i, j) ανισότητα του δυϊκού.
- Για κάθε $T \subseteq X$ ορίζουμε $\Gamma(T) := \bigcup_{i \in T} \Gamma(i)$.
- Αν j μπορεί να ανατεθεί σε κάποιο $i \in I$ (δηλαδή η ανισότητα (i, j) του δυϊκού είναι ισότητα και $\beta_{i,j} > 0$) τότε $\sigma(j) \leftarrow i$.
- Επειδή το I είναι ανεξάρτητο σύνολο του G , κάθε πελάτης $j \in C$ ανατίθεται στο πολύ μία υπηρεσία.
- Ενδεχομένως κάποιοι $j \in C$ να μην ανατέθηκαν. Τι κάνουμε με αυτούς?

Ανάθεση πελατών σε υπηρεσίες στο I .

Απομένει να αναθέσουμε τους πελάτες $j \in C \setminus \Gamma(I)$.

Ανάθεση πελατών σε υπηρεσίες στο I .

Απομένει να αναθέσουμε τους πελάτες $j \in C \setminus \Gamma(I)$.

Εφόσον $j \notin \Gamma(I)$ τότε

- 1 υπάρχει $i \in X \setminus I$ ώστε $\beta_{ij} > 0$.
- 2 υπάρχει ακμή $(i, i') \in G$ με $i' \in I$

Ανάθεση πελατών σε υπηρεσίες στο I .

Απομένει να αναθέσουμε τους πελάτες $j \in C \setminus \Gamma(I)$.

Εφόσον $j \notin \Gamma(I)$ τότε

- 1 υπάρχει $i \in X \setminus I$ ώστε $\beta_{ij} > 0$.
- 2 υπάρχει ακμή $(i, i') \in G$ με $i' \in I$
(και άρα πελάτης j' ώστε $\beta_{ij'}, \beta_{i'j'} > 0$).

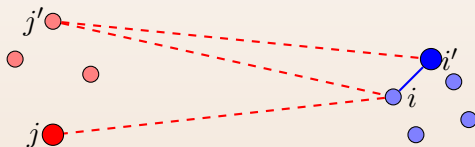
Ανάθεση πελατών σε υπηρεσίες στο I .

Απομένει να αναθέσουμε τους πελάτες $j \in C \setminus \Gamma(I)$.

Εφόσον $j \notin \Gamma(I)$ τότε

- 1 υπάρχει $i \in X \setminus I$ ώστε $\beta_{ij} > 0$.
- 2 υπάρχει ακμή $(i, i') \in G$ με $i' \in I$
(και άρα πελάτης j' ώστε $\beta_{ij'}, \beta_{i'j'} > 0$).

Αναθέτουμε τον j στο i' , δηλαδή $\sigma(j) := i'$.



Θεώρημα

Το κόστος ανοίγματος και ανάθεσης είναι το πολύ

$$\sum_{j \in C} d_{\sigma(j),j} + 3 \cdot \sum_{i \in I} f_i \leq 3 \underbrace{\sum_{j \in C} \alpha_j}_{\text{κόστος δυϊκού}} .$$

Θεώρημα

Το κόστος ανοίγματος και ανάθεσης είναι το πολύ

$$\sum_{j \in C} d_{\sigma(j),j} + 3 \cdot \sum_{i \in I} f_i \leq 3 \underbrace{\sum_{j \in C} \alpha_j}_{\text{κόστος δυϊκού}} .$$

Κόστος ανοίγματος υπηρεσιών:

$$\sum_{i \in I} f_i =$$

Θεώρημα

Το κόστος ανοίγματος και ανάθεσης είναι το πολύ

$$\sum_{j \in C} d_{\sigma(j),j} + 3 \cdot \sum_{i \in I} f_i \leq 3 \underbrace{\sum_{j \in C} \alpha_j}_{\text{κόστος δυϊκού}} .$$

Κόστος ανοίγματος υπηρεσιών:

$$\sum_{i \in I} f_i = \sum_{i \in I} \sum_{j \in C} \beta_{ij} =$$

Θεώρημα

Το κόστος ανοίγματος και ανάθεσης είναι το πολύ

$$\sum_{j \in C} d_{\sigma(j),j} + 3 \cdot \sum_{i \in I} f_i \leq 3 \underbrace{\sum_{j \in C} \alpha_j}_{\text{κόστος δυϊκού}} .$$

Κόστος ανοίγματος υπηρεσιών:

$$\sum_{i \in I} f_i = \sum_{i \in I} \sum_{j \in C} \beta_{ij} = \sum_{j \in \Gamma(I)} \sum_{i \in I: \beta_{ij} > 0} \beta_{ij} =$$

Θεώρημα

Το κόστος ανοίγματος και ανάθεσης είναι το πολύ

$$\sum_{j \in C} d_{\sigma(j),j} + 3 \cdot \sum_{i \in I} f_i \leq 3 \underbrace{\sum_{j \in C} \alpha_j}_{\text{κόστος δυϊκού}}.$$

Κόστος ανοίγματος υπηρεσιών:

$$\sum_{i \in I} f_i = \sum_{i \in I} \sum_{j \in C} \beta_{ij} = \sum_{j \in \Gamma(I)} \sum_{i \in I: \beta_{ij} > 0} \beta_{ij} = \sum_{j \in \Gamma(I)} \beta_{\sigma(j),j}.$$

Όμως, λόγω της ισότητας στο δυϊκό έχουμε $\beta_{\sigma(j),j} = \alpha_j - d_{\sigma(j),j}$.

Ας δούμε τα δύο κόστη.

$$(\star) \text{ Ανοίγματος υπηρεσιών : } \sum_{j \in \Gamma(I)} (\alpha_j - d_{\sigma(j),j}).$$

Ας δούμε τα δύο κόστη.

$$(\star) \text{ Ανοίγματος υπηρεσιών: } \sum_{j \in \Gamma(I)} (\alpha_j - d_{\sigma(j),j}).$$

$$(\dagger) \text{ Ανάθεσης: } \sum_{j \in C} d_{\sigma(j),j} =$$

Ας δούμε τα δύο κόστη.

$$(\star) \text{ Ανοίγματος υπηρεσιών: } \sum_{j \in \Gamma(I)} (\alpha_j - d_{\sigma(j),j}).$$

$$(\dagger) \text{ Ανάθεσης: } \sum_{j \in C} d_{\sigma(j),j} = \sum_{j \in \Gamma(I)} d_{\sigma(j),j} + \sum_{j \in C \setminus \Gamma(I)} d_{\sigma(j),j}$$

$$(\star) + (\dagger): \sum_{j \in \Gamma(I)} \alpha_j + \sum_{j \in C \setminus \Gamma(I)} d_{\sigma(j),j}.$$

Άρα το συνολικό κόστος είναι φραγμένο από

$$\sum_{j \in \Gamma(I)} \alpha_j + \sum_{j \in C \setminus \Gamma(I)} d_{\sigma(j), j}.$$

Άρα το συνολικό κόστος είναι φραγμένο από

$$\sum_{j \in \Gamma(I)} \alpha_j + \sum_{j \in C \setminus \Gamma(I)} d_{\sigma(j),j}.$$

Ο πρώτος όρος μπορεί να χρεωθεί στο κέρδος του δυϊκού, αλλά ο δεύτερος όρος όχι ακόμη. Αποδεικνύουμε το εξής Λήμμα.

Άρα το συνολικό κόστος είναι φραγμένο από

$$\sum_{j \in \Gamma(I)} \alpha_j + \sum_{j \in C \setminus \Gamma(I)} d_{\sigma(j),j}.$$

Ο πρώτος όρος μπορεί να χρεωθεί στο κέρδος του δυϊκού, αλλά ο δεύτερος όρος όχι ακόμη. Αποδεικνύουμε το εξής Λήμμα.

Λήμμα

Για κάθε $j \in C \setminus \Gamma(I)$ ισχύει $d_{\sigma(j),j} \leq 3\alpha_j$.

Άρα το συνολικό κόστος είναι φραγμένο από

$$\sum_{j \in \Gamma(I)} \alpha_j + \sum_{j \in C \setminus \Gamma(I)} d_{\sigma(j),j}.$$

Ο πρώτος όρος μπορεί να χρεωθεί στο κέρδος του δυϊκού, αλλά ο δεύτερος όρος όχι ακόμη. Αποδεικνύουμε το εξής Λήμμα.

Λήμμα

Για κάθε $j \in C \setminus \Gamma(I)$ ισχύει $d_{\sigma(j),j} \leq 3\alpha_j$.

Με δεδομένο το Λήμμα παίρνουμε ότι το κόστος είναι το πολύ

$$\sum_{j \in \Gamma(I)} \alpha_j + \sum_{j \in C \setminus \Gamma(I)} d_{\sigma(j),j}$$

Άρα το συνολικό κόστος είναι φραγμένο από

$$\sum_{j \in \Gamma(I)} \alpha_j + \sum_{j \in C \setminus \Gamma(I)} d_{\sigma(j),j}.$$

Ο πρώτος όρος μπορεί να χρεωθεί στο κέρδος του δυϊκού, αλλά ο δεύτερος όρος όχι ακόμη. Αποδεικνύουμε το εξής Λήμμα.

Λήμμα

Για κάθε $j \in C \setminus \Gamma(I)$ ισχύει $d_{\sigma(j),j} \leq 3\alpha_j$.

Με δεδομένο το Λήμμα παίρνουμε ότι το κόστος είναι το πολύ

$$\sum_{j \in \Gamma(I)} \alpha_j + \sum_{j \in C \setminus \Gamma(I)} d_{\sigma(j),j} \leq 3 \cdot \sum_{j \in C} \alpha_j \leq 3OPT.$$

Απόδειξη του Λήμματος.

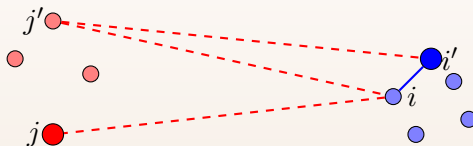
Λήμμα

Για κάθε $j \in C \setminus \Gamma(I)$ ισχύει $d_{\sigma(j),j} \leq 3\alpha_j$.

Απόδειξη του Λήμματος.

Λήμμα

Για κάθε $j \in C \setminus \Gamma(I)$ ισχύει $d_{\sigma(j),j} \leq 3\alpha_j$.

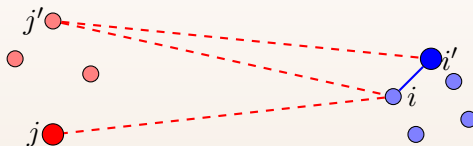


Έστω i η υπηρεσία στην οποία ανατέθηκε ο j στο Στάδιο 1 και $i' = \sigma(j)$.

Απόδειξη του Λήμματος.

Λήμμα

Για κάθε $j \in C \setminus \Gamma(I)$ ισχύει $d_{\sigma(j),j} \leq 3\alpha_j$.



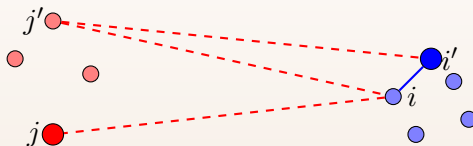
Έστω i η υπηρεσία στην οποία ανατέθηκε ο j στο Στάδιο 1 και $i' = \sigma(j)$.

$$d_{i',j} \leq d_{i',j'} + d_{i,j'} + d_{i,j}$$

Απόδειξη του Λήμματος.

Λήμμα

Για κάθε $j \in C \setminus \Gamma(I)$ ισχύει $d_{\sigma(j),j} \leq 3\alpha_j$.



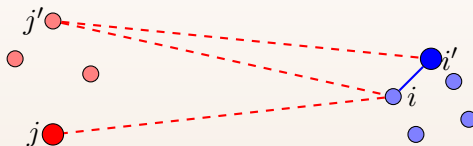
Έστω i η υπηρεσία στην οποία ανατέθηκε ο j στο Στάδιο 1 και $i' = \sigma(j)$.

$$d_{i',j} \leq d_{i',j'} + d_{i,j'} + d_{i,j} \leq \alpha_{j'} + \alpha_{j'} + \alpha_j$$

Απόδειξη του Λήμματος.

Λήμμα

Για κάθε $j \in C \setminus \Gamma(I)$ ισχύει $d_{\sigma(j),j} \leq 3\alpha_j$.



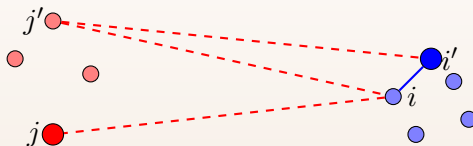
Έστω i η υπηρεσία στην οποία ανατέθηκε ο j στο Στάδιο 1 και $i' = \sigma(j)$.

$$d_{i',j} \leq d_{i',j'} + d_{i,j'} + d_{i,j} \leq \alpha_{j'} + \alpha_{j'} + \alpha_j \leq 3\alpha_j,$$

Απόδειξη του Λήμματος.

Λήμμα

Για κάθε $j \in C \setminus \Gamma(I)$ ισχύει $d_{\sigma(j),j} \leq 3\alpha_j$.



Έστω i η υπηρεσία στην οποία ανατέθηκε ο j στο Στάδιο 1 και $i' = \sigma(j)$.

$$d_{i',j} \leq d_{i',j'} + d_{i,j'} + d_{i,j} \leq \alpha_{j'} + \alpha_{j'} + \alpha_j \leq 3\alpha_j,$$

όπου η προτελευταία ανισότητα προκύπτει διότι $(i', j), (i', j'), (i, j) \in \Pi$, και η τελευταία διότι $\alpha_{j'} \leq \alpha_j$ (γιατί?).