

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι μέσω του δυϊκού

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι μέσω του Δυϊκού

Πρωτεύον

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Δυϊκό

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ & A^\top y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι όποτε το ένα από τα δύο είναι επιλύσιμο τότε και το άλλο είναι και $(\text{κόστος πρωτεύοντος}) = (\text{κέρδος δυϊκού})$.

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι μέσω του Δυϊκού

Πρωτεύον

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Δυϊκό

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ & A^\top y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι όποτε το ένα από τα δύο είναι επιλύσιμο τότε και το άλλο είναι και (κόστος πρωτεύοντος) = (κέρδος δυϊκού).

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την ιδιότητα ώστε να σχεδιάσουμε προσεγγιστικούς αλγορίθμους?

Δοθέντων συνόλων $S_1, S_2, \dots, S_m$ με $U := S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$, ζητείται να βρεθεί ένα υποσύνολο $S \subseteq [m]$ ελάχιστης πληθικότητας έτσι ώστε

$$\bigcup_{j \in S} S_j = U.$$

Πρόβλημα Καλύμματος Συνόλου

Δοθέντων συνόλων $S_1, S_2, \dots, S_m$ με $U := S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$, ζητείται να βρεθεί ένα υποσύνολο $S \subseteq [m]$ ελάχιστης πληθικότητας έτσι ώστε

$$\bigcup_{j \in S} S_j = U.$$

Γενική περίπτωση του προβλήματος καλύμματος κορυφών:
κορυφές $\Rightarrow S_j$, ακμές $\Rightarrow i \in U$

Άπληστος Αλγόριθμος για Κάλυμμα Συνόλου

Ο αλγόριθμος επιλέγει κάθε φορά το σύνολο εκείνο το οποίο ελαχιστοποιεί τον λόγο κόστος δια πλήθος στοιχείων τα οποία καλύπτει.

```
1:  $S \leftarrow \emptyset$ 
2:  $X \leftarrow U$  //Σύνολο μη καλυμμένων στοιχείων
3: Όσο  $X \neq \emptyset$ 
4:   Βρες  $j$  ώστε  $\frac{c(S_j)}{|S_j \cap X|}$  να ελαχιστοποιείται
5:    $S \leftarrow S \cup \{j\}$ 
6:    $X \leftarrow X \setminus S_j$ .
7: Επέστρεψε το  $S$ 
```

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου.

Ας αναλύσουμε πρώτα την περίπτωση όπου $c(S_j) = 1$ για κάθε $c(S_j)$,

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου.

Ας αναλύσουμε πρώτα την περίπτωση όπου $c(S_j) = 1$ για κάθε $c(S_j)$,
κοινώς κάθε φορά παίρνουμε το σύνολο S_{j^*} που μεγιστοποιεί το
 $|S_j \cap X|$.

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου.

Ας αναλύσουμε πρώτα την περίπτωση όπου $c(S_j) = 1$ για κάθε $c(S_j)$, κοινώς κάθε φορά παίρνουμε το σύνολο S_{j^*} που μεγιστοποιεί το $|S_j \cap X|$.

Έστω $\text{OPT} = k$.

- Στο πρώτο βήμα το S_{j^*} καλύπτει τουλάχιστον $\frac{|U|}{k}$ στοιχεία.

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου.

Ας αναλύσουμε πρώτα την περίπτωση όπου $c(S_j) = 1$ για κάθε $c(S_j)$, κοινώς κάθε φορά παίρνουμε το σύνολο S_{j^*} που μεγιστοποιεί το $|S_j \cap X|$.

Έστω $\text{OPT} = k$.

- Στο πρώτο βήμα το S_{j^*} καλύπτει τουλάχιστον $\frac{|U|}{k}$ στοιχεία.
- Αυτό όμως ισχύει σε κάθε βήμα, δηλαδή $|S_{j^*} \cap X| \geq \frac{|X|}{k}$ (γιατί?).

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου.

Ας αναλύσουμε πρώτα την περίπτωση όπου $c(S_j) = 1$ για κάθε $c(S_j)$, κοινώς κάθε φορά παίρνουμε το σύνολο S_{j^*} που μεγιστοποιεί το $|S_j \cap X|$.

Έστω $\text{OPT} = k$.

- Στο πρώτο βήμα το S_{j^*} καλύπτει τουλάχιστον $\frac{|U|}{k}$ στοιχεία.
- Αυτό όμως ισχύει σε κάθε βήμα, δηλαδή $|S_{j^*} \cap X| \geq \frac{|X|}{k}$ (γιατί?).
- Άρα μετά από ℓ βήματα έχουμε $|X| \leq (1 - \frac{1}{k})^\ell |U|$.

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου.

Ας αναλύσουμε πρώτα την περίπτωση όπου $c(S_j) = 1$ για κάθε $c(S_j)$, κοινώς κάθε φορά παίρνουμε το σύνολο S_{j^*} που μεγιστοποιεί το $|S_j \cap X|$.

Έστω $\text{OPT} = k$.

- Στο πρώτο βήμα το S_{j^*} καλύπτει τουλάχιστον $\frac{|U|}{k}$ στοιχεία.
- Αυτό όμως ισχύει σε κάθε βήμα, δηλαδή $|S_{j^*} \cap X| \geq \frac{|X|}{k}$ (γιατί?).
- Άρα μετά από ℓ βήματα έχουμε $|X| \leq (1 - \frac{1}{k})^\ell |U|$.
- Άρα για $\ell = k \cdot \ln n$ ισχύει ότι $|X| < 1$,

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου.

Ας αναλύσουμε πρώτα την περίπτωση όπου $c(S_j) = 1$ για κάθε $c(S_j)$, κοινώς κάθε φορά παίρνουμε το σύνολο S_{j^*} που μεγιστοποιεί το $|S_j \cap X|$.

Έστω $\text{OPT} = k$.

- Στο πρώτο βήμα το S_{j^*} καλύπτει τουλάχιστον $\frac{|U|}{k}$ στοιχεία.
- Αυτό όμως ισχύει σε κάθε βήμα, δηλαδή $|S_{j^*} \cap X| \geq \frac{|X|}{k}$ (γιατί?).
- Άρα μετά από ℓ βήματα έχουμε $|X| \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^\ell |U|$.
- Άρα για $\ell = k \cdot \ln n$ ισχύει ότι $|X| < 1$, άρα όλα τα στοιχεία καλύφθηκαν.
- Ο αλγόριθμος είναι $\ln n$ -προσεγγιστικός.

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου στη γενική περίπτωση.

```
1:  $S \leftarrow \emptyset$ 
2:  $X \leftarrow U$  //Σύνολο μη καλυμμένων στοιχείων
3: Όσο  $X \neq \emptyset$ 
4:   Βρες  $j$  ώστε  $\frac{c(S_j)}{|S_j \cap X|}$  να ελαχιστοποιείται
5:    $S \leftarrow S \cup \{j\}$ 
6:    $X \leftarrow X \setminus S_j$ .
7: Επέστρεψε το  $S$ 
```

Έστω ότι ο βρόγχος τρέχει r φορές και έστω ότι ονοματίζουμε ξανά τα σύνολα ώστε S_i το σύνολο το οποίο επιλέγεται στην i -οστή επανάληψη.

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου στη γενική περίπτωση.

```
1:  $S \leftarrow \emptyset$ 
2:  $X \leftarrow U$  //Σύνολο μη καλυμμένων στοιχείων
3: Όσο  $X \neq \emptyset$ 
4:   Βρες  $j$  ώστε  $\frac{c(S_j)}{|S_j \cap X|}$  να ελαχιστοποιείται
5:    $S \leftarrow S \cup \{j\}$ 
6:    $X \leftarrow X \setminus S_j$ .
7: Επέστρεψε το  $S$ 
```

Έστω ότι ο βρόγχος τρέχει r φορές και έστω ότι ονοματίζουμε ξανά τα σύνολα ώστε S_i το σύνολο το οποίο επιλέγεται στην i -οστή επανάληψη. Έστω τα σύνολα $O_1, O_2, \dots, O_\ell$ της βέλτιστης λύσης.

$$ALG := \sum_{i=1}^r c(S_i) \quad , \quad OPT := \sum_{j=1}^{\ell} c(O_j)$$

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου στη γενική περίπτωση.

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος είναι ένας H_n -προσεγγιστικός αλγόριθμος, όπου $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ είναι ο n -οστός αρμονικός αριθμός.

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου στη γενική περίπτωση.

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος είναι ένας H_n -προσεγγιστικός αλγόριθμος, όπου $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ είναι ο n -οστός αρμονικός αριθμός.

Έστω X_i το σύνολο των ακάλυπτων στοιχείων πριν τον βρόγχο i .

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου στη γενική περίπτωση.

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος είναι ένας H_n -προσεγγιστικός αλγόριθμος, όπου $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ είναι ο n -οστός αρμονικός αριθμός.

Έστω X_i το σύνολο των ακάλυπτων στοιχείων πριν τον βρόγχο i . Γνωρίζουμε ότι για κάθε $i \in [r]$ ισχύει

$$\forall j \in [\ell], \frac{c(S_i)}{|S_i \cap X_i|} \leq \frac{c(O_j)}{|O_j \cap X_i|}$$

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου στη γενική περίπτωση.

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος είναι ένας H_n -προσεγγιστικός αλγόριθμος, όπου $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ είναι ο n -οστός αρμονικός αριθμός.

Έστω X_i το σύνολο των ακάλυπτων στοιχείων πριν τον βρόγχο i . Γνωρίζουμε ότι για κάθε $i \in [r]$ ισχύει

$$\forall j \in [\ell], \frac{c(S_i)}{|S_i \cap X_i|} \leq \frac{c(O_j)}{|O_j \cap X_i|}.$$

Οπότε μπορούμε να πάρουμε το εξής για κάθε $i \in [r]$

$$\frac{c(S_i)}{|S_i \cap X_i|} \leq \frac{\sum_{j=1}^{\ell} c(O_j)}{\sum_{j=1}^{\ell} |O_j \cap X_i|}$$

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου στη γενική περίπτωση.

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος είναι ένας H_n -προσεγγιστικός αλγόριθμος, όπου $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ είναι ο n -οστός αρμονικός αριθμός.

Έστω X_i το σύνολο των ακάλυπτων στοιχείων πριν τον βρόγχο i . Γνωρίζουμε ότι για κάθε $i \in [r]$ ισχύει

$$\forall j \in [\ell], \frac{c(S_i)}{|S_i \cap X_i|} \leq \frac{c(O_j)}{|O_j \cap X_i|}.$$

Οπότε μπορούμε να πάρουμε το εξής για κάθε $i \in [r]$

$$\frac{c(S_i)}{|S_i \cap X_i|} \leq \frac{\sum_{j=1}^{\ell} c(O_j)}{\sum_{j=1}^{\ell} |O_j \cap X_i|} \leq \frac{OPT}{|X_i|}.$$

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου στη γενική περίπτωση.

Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ανισότητες

$$\frac{c(S_i)}{|S_i \cap X_i|} \leq \frac{OPT}{|X_i|},$$

για να φράξουμε το κόστος του αλγόριθμου ως

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου στη γενική περίπτωση.

Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ανισότητες

$$\frac{c(S_i)}{|S_i \cap X_i|} \leq \frac{OPT}{|X_i|},$$

για να φράξουμε το κόστος του αλγόριθμου ως

$$ALG = \sum_{i=1}^r c(S_i)$$

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου στη γενική περίπτωση.

Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ανισότητες

$$\frac{c(S_i)}{|S_i \cap X_i|} \leq \frac{OPT}{|X_i|},$$

για να φράξουμε το κόστος του αλγόριθμου ως

$$ALG = \sum_{i=1}^r c(S_i) \leq \sum_{i=1}^r |S_i \cap X_i| \cdot \frac{OPT}{|X_i|} =$$

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου στη γενική περίπτωση.

Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ανισότητες

$$\frac{c(S_i)}{|S_i \cap X_i|} \leq \frac{OPT}{|X_i|},$$

για να φράξουμε το κόστος του αλγόριθμου ως

$$ALG = \sum_{i=1}^r c(S_i) \leq \sum_{i=1}^r |S_i \cap X_i| \cdot \frac{OPT}{|X_i|} = \underbrace{\sum_{i=1}^r \frac{|S_i \cap X_i|}{|X_i|}}_{\text{λόγος προσέγγισης}} \cdot OPT.$$

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου στη γενική περίπτωση.

Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ανισότητες

$$\frac{c(S_i)}{|S_i \cap X_i|} \leq \frac{OPT}{|X_i|},$$

για να φράξουμε το κόστος του αλγόριθμου ως

$$ALG = \sum_{i=1}^r c(S_i) \leq \sum_{i=1}^r |S_i \cap X_i| \cdot \frac{OPT}{|X_i|} = \underbrace{\sum_{i=1}^r \frac{|S_i \cap X_i|}{|X_i|}}_{\text{λόγος προσέγγισης}} \cdot OPT.$$

Όμως

$$\sum_{i=1}^r \frac{|S_i \cap X_i|}{|X_i|} = \sum_{i=1}^r \frac{|X_i| - |X_{i+1}|}{|X_i|}$$

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου στη γενική περίπτωση.

Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ανισότητες

$$\frac{c(S_i)}{|S_i \cap X_i|} \leq \frac{OPT}{|X_i|},$$

για να φράξουμε το κόστος του αλγόριθμου ως

$$ALG = \sum_{i=1}^r c(S_i) \leq \sum_{i=1}^r |S_i \cap X_i| \cdot \frac{OPT}{|X_i|} = \underbrace{\sum_{i=1}^r \frac{|S_i \cap X_i|}{|X_i|}}_{\text{λόγος προσέγγισης}} \cdot OPT.$$

Όμως

$$\sum_{i=1}^r \frac{|S_i \cap X_i|}{|X_i|} = \sum_{i=1}^r \frac{|X_i| - |X_{i+1}|}{|X_i|} \leq \frac{1}{|U|} + \frac{1}{|U|-1} + \dots + 1 = H_n.$$

Μία διαφορετική αλλά χρήσιμη ανάλυση.

Έστω ξανά $\{S_1, S_2, \dots, S_r\}$ τα σύνολα που διαλέχθηκαν στην βέλτιστη λύση.

Μία διαφορετική αλλά χρήσιμη ανάλυση.

Έστω ξανά $\{S_1, S_2, \dots, S_r\}$ τα σύνολα που διαλέχθηκαν στην βέλτιστη λύση.

Για κάθε **νεο-καλυμμένο** στοιχείο j στην επανάληψη i , δηλαδή για κάθε $j \in S_i \cap X_i$

Μία διαφορετική αλλά χρήσιμη ανάλυση.

Έστω ξανά $\{S_1, S_2, \dots, S_r\}$ τα σύνολα που διαλέχθηκαν στην βέλτιστη λύση.

Για κάθε **νεο-καλυμμένο** στοιχείο j στην επανάληψη i , δηλαδή για κάθε $j \in S_i \cap X_i$, ορίζουμε το 'χρέος' του α_i ως $\alpha_i = \frac{c(S_i)}{|S_i \cap X_i|}$.

Μία διαφορετική αλλά χρήσιμη ανάλυση.

Έστω ξανά $\{S_1, S_2, \dots, S_r\}$ τα σύνολα που διαλέχθηκαν στην βέλτιστη λύση.

Για κάθε **νεο-καλυμμένο** στοιχείο j στην επανάληψη i , δηλαδή για κάθε $j \in S_i \cap X_i$, ορίζουμε το 'χρέος' του α_i ως $\alpha_i = \frac{c(S_i)}{|S_i \cap X_i|}$.

$$c(S_i) = \sum_{j \in S_i \cap X_i} \alpha_j \quad , \quad ALG = \sum_{j \in U} \alpha_j.$$

Μία διαφορετική αλλά χρήσιμη ανάλυση.

Έστω ξανά $\{S_1, S_2, \dots, S_r\}$ τα σύνολα που διαλέχθηκαν στην βέλτιστη λύση.

Για κάθε **νεο-καλυμμένο** στοιχείο j στην επανάληψη i , δηλαδή για κάθε $j \in S_i \cap X_i$, ορίζουμε το 'χρέος' του α_i ως $\alpha_i = \frac{c(S_i)}{|S_i \cap X_i|}$.

$$c(S_i) = \sum_{j \in S_i \cap X_i} \alpha_j \quad , \quad ALG = \sum_{j \in U} \alpha_j.$$

Λήμμα

Για κάθε σύνολο O από τα αρχικά με $\leq d$ στοιχεία, ισχύει ότι

$$\sum_{j \in O} \alpha_j \leq H_d \cdot c(O).$$

Απόδειξη με βάση το Λήμμα.

Λήμμα

Για κάθε σύνολο O από τα αρχικά με $\leq d$ στοιχεία, ισχύει ότι

$$\sum_{j \in O} \alpha_j \leq H_d \cdot c(O).$$

Απόδειξη με βάση το Λήμμα.

Λήμμα

Για κάθε σύνολο O από τα αρχικά με $\leq d$ στοιχεία, ισχύει ότι

$$\sum_{j \in O} \alpha_j \leq H_d \cdot c(O).$$

Έστω $O_1, O_2, \dots, O_\ell$ μια βέλτιστη λύση. Τότε

$$ALG = \sum_{j \in U} \alpha_j \leq$$

Απόδειξη με βάση το Λήμμα.

Λήμμα

Για κάθε σύνολο O από τα αρχικά με $\leq d$ στοιχεία, ισχύει ότι

$$\sum_{j \in O} \alpha_j \leq H_d \cdot c(O).$$

Έστω $O_1, O_2, \dots, O_\ell$ μια βέλτιστη λύση. Τότε

$$ALG = \sum_{j \in U} \alpha_j \leq \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j \in O_i} \alpha_j$$

Απόδειξη με βάση το Λήμμα.

Λήμμα

Για κάθε σύνολο O από τα αρχικά με $\leq d$ στοιχεία, ισχύει ότι

$$\sum_{j \in O} \alpha_j \leq H_d \cdot c(O).$$

Έστω $O_1, O_2, \dots, O_\ell$ μια βέλτιστη λύση. Τότε

$$ALG = \sum_{j \in U} \alpha_j \leq \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j \in O_i} \alpha_j \leq \sum_{i=1}^{\ell} c(O_i) \cdot H_d = H_d \cdot OPT.$$

Απόδειξη με βάση το Λήμμα.

Λήμμα

Για κάθε σύνολο O από τα αρχικά με $\leq d$ στοιχεία, ισχύει ότι

$$\sum_{j \in O} \alpha_j \leq H_d \cdot c(O).$$

Έστω $O_1, O_2, \dots, O_\ell$ μια βέλτιστη λύση. Τότε

$$ALG = \sum_{j \in U} \alpha_j \leq \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j \in O_i} \alpha_j \leq \sum_{i=1}^{\ell} c(O_i) \cdot H_d = H_d \cdot OPT.$$

Η απόδειξη του Λήμματος παραλείπεται από τις διαφάνειες.

Γραμμικό Πρόγραμμα Καλύμματος Συνόλου

Πρωτεύον

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{j=1}^m c(S_j)x_j \\ & \sum_{j:i \in S_j} x_j \geq, \forall i \in U \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Δυϊκό

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \sum_{i \in U} y_i \\ & \sum_{i \in S_j} y_i \leq c(S_j) \\ & y_i \geq 0 \end{aligned}$$

Επιστροφή στον άπληστο αλγόριθμο.

Ας θυμηθούμε τα χρέη α_i τα οποίο ικανοποιούν $\sum_{j \in O} \alpha_j \leq H_d \cdot c(O)$ για κάθε σύνολο O .

Επιστροφή στον άπληστο αλγόριθμο.

Ας θυμηθούμε τα χρέη α_i τα οποίο ικανοποιούν $\sum_{j \in O} \alpha_j \leq H_d \cdot c(O)$ για κάθε σύνολο O .

Δυϊκό

$$\text{maximize } \sum_{i \in U} y_i$$

$$\sum_{i \in S_j} y_i \leq c(S_j)$$

$$y_i \geq 0$$

Ας θέσουμε

$$y_i = \frac{\alpha_i}{H_d}.$$

$$y_i \geq 0$$

Επιστροφή στον άπληστο αλγόριθμο.

Ας θυμηθούμε τα χρέη α_i τα οποίο ικανοποιούν $\sum_{j \in O} \alpha_j \leq H_d \cdot c(O)$ για κάθε σύνολο O .

Δυϊκό

$$\text{maximize } \sum_{i \in U} y_i$$

$$\sum_{i \in S_j} y_i \leq c(S_j)$$

$$y_i \geq 0$$

Ας θέσουμε

$$y_i = \frac{\alpha_i}{H_d}.$$

$$y_i \geq 0$$

$$\frac{ALG}{H_d} \leq OPT_{LP} \Rightarrow ALG \leq H_d \cdot OPT_{LP}$$

Επιστροφή στον άπληστο αλγόριθμο.

Ας θυμηθούμε τα χρέη α_i τα οποίο ικανοποιούν $\sum_{j \in O} \alpha_j \leq H_d \cdot c(O)$ για κάθε σύνολο O .

Δυϊκό

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \sum_{i \in U} y_i \\ &\quad \sum_{i \in S_j} y_i \leq c(S_j) \\ &\quad y_i \geq 0 \end{aligned}$$

Ας θέσουμε

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{\alpha_i}{H_d}. \\ y_i &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{ALG}{H_d} \leq OPT_{LP} \Rightarrow ALG \leq H_d \cdot OPT_{LP} \leq H_d \cdot OPT.$$

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου μέσω του δυϊκού.

Στην ανάλυση του άπληστου αλγόριθμου εφήυραμε μια ποσότητα α_i για κάθε στοιχείο ώστε

$$\sum_{i:i \in S_j} \alpha_i \leq c(S_j) \cdot H_d, \forall j \in [m] \quad \text{ALG} = \sum_{i \in U} \alpha_i.$$

Ανάλυση άπληστου αλγόριθμου μέσω του δυϊκού.

Στην ανάλυση του άπληστου αλγόριθμου εφήυραμε μια ποσότητα α_i για κάθε στοιχείο ώστε

$$\sum_{i:i \in S_j} \alpha_i \leq c(S_j) \cdot H_d, \forall j \in [m] \quad \text{ALG} = \sum_{i \in U} \alpha_i.$$

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $y_i = \frac{\alpha_i}{H_d}$ τότε τα y είναι μια έγκυρη λύση στο δυϊκό πρόγραμμα.

Γενική μορφή αλγοριθμικού σχήματος.

Το προσεγγιστικό σχήμα πρωτεύοντος-δυϊκού ακολουθεί τα εξής βήματα:

Γενική μορφή αλγοριθμικού σχήματος.

Το προσεγγιστικό σχήμα πρωτεύοντος-δυϊκού ακολουθεί τα εξής βήματα:

- 1 Ξεκινάμε με μια **δυϊκού** προβλήματος, συνήθως την κενή λύση, και ένα κενό σύνολο C , το οποίο στο τέλος εκτέλεσης του αλγόριθμου θα είναι λύση του **πρωτεύοντος**.

Γενική μορφή αλγοριθμικού σχήματος.

Το προσεγγιστικό σχήμα πρωτεύοντος-δυϊκού ακολουθεί τα εξής βήματα:

- 1 Ξεκινάμε με μια **δυϊκού** προβλήματος, συνήθως την κενή λύση, και ένα κενό σύνολο C , το οποίο στο τέλος εκτέλεσης του αλγόριθμου θα είναι λύση του **πρωτεύοντος**.
- 2 Αυξάνουμε ένα υποσύνολο των **δυϊκών μεταβλητών** έως ότου κάποιος **δυϊκός** περιορισμός γίνει ισότητα.

Γενική μορφή αλγοριθμικού σχήματος.

Το προσεγγιστικό σχήμα πρωτεύοντος-δυϊκού ακολουθεί τα εξής βήματα:

- 1 Ξεκινάμε με μια **δυϊκού** προβλήματος, συνήθως την κενή λύση, και ένα κενό σύνολο C , το οποίο στο τέλος εκτέλεσης του αλγόριθμου θα είναι λύση του **πρωτεύοντος**.
- 2 Αυξάνουμε ένα υποσύνολο των **δυϊκών μεταβλητών** έως ότου κάποιος **δυϊκός** περιορισμός γίνει ισότητα.
- 3 Σύμφωνα με την ιδιότητα της συμπληρωματικής χαλαρότητας, επιλέγουμε την αντίστοιχη μεταβλητή του **πρωτεύοντος** και την προσθέτουμε στο C .
- 4 Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να μην μπορούμε να αυξήσουμε περαιτέρω τις **δυϊκές** μεταβλητές ή μέχρι να αποκτήσουμε μια εφικτή λύση για το **πρωτεύον**.

Γενική μορφή αλγοριθμικού σχήματος.

Το προσεγγιστικό σχήμα πρωτεύοντος-δυϊκού ακολουθεί τα εξής βήματα:

- 1 Ξεκινάμε με μια **δυϊκού** προβλήματος, συνήθως την κενή λύση, και ένα κενό σύνολο C , το οποίο στο τέλος εκτέλεσης του αλγόριθμου θα είναι λύση του **πρωτεύοντος**.
- 2 Αυξάνουμε ένα υποσύνολο των **δυϊκών μεταβλητών** έως ότου κάποιος **δυϊκός** περιορισμός γίνει ισότητα.
- 3 Σύμφωνα με την ιδιότητα της συμπληρωματικής χαλαρότητας, επιλέγουμε την αντίστοιχη μεταβλητή του **πρωτεύοντος** και την προσθέτουμε στο C .
- 4 Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να μην μπορούμε να αυξήσουμε περαιτέρω τις **δυϊκές** μεταβλητές ή μέχρι να αποκτήσουμε μια εφικτή λύση για το **πρωτεύον**.
- 5 (Ενδεχομένως ακολουθεί ένα μετα-επεξεργαστικό βήμα).

Αλγόριθμος για το πρόβλημα Καλύμματος Κορυφών.

- 1: $y_e \leftarrow 0, \forall e \in E$
- 2: $C \leftarrow \emptyset$ //Ακέραια λύση του πρωτεύοντος
- 3: $A \leftarrow E$ //ακμές των οποίων το y_e μπορώ ακόμη να αυξήσω
- 4: Όσο $A \neq \emptyset$
- 5: Αύξησε τα y_e για κάθε $e \in A$ ώστε κάποιος περιορισμός του
 δυϊκού να γίνει ισότητα. Έστω u^* η αντίστοιχη κορυφή.
- 6: //Εκείνη τη στιγμή $\sum_{e: u^* \in e} y_e = c(u^*)$.
- 7: $C \leftarrow C \cup \{u\}, A \leftarrow A \setminus N(u)$
- 8: Επέστρεψε το (C, y)

Ορθότητα και ανάλυση λόγου προσέγγισης.

Για κάθε $u \in C$ ισχύει ότι $\sum_{e:u \in e} y_e = c(u)$.

Ορθότητα και ανάλυση λόγου προσέγγισης.

Για κάθε $u \in C$ ισχύει ότι $\sum_{e:u \in e} y_e = c(u)$.

Στο τέλος δεν μπορώ να αυξήσω το y_e για καμία ακμή $\Rightarrow$

Ορθότητα και ανάλυση λόγου προσέγγισης.

Για κάθε $u \in C$ ισχύει ότι $\sum_{e:u \in e} y_e = c(u)$.

Στο τέλος δεν μπορώ να αυξήσω το y_e για καμία ακμή $\Rightarrow$

κάθε y_e συμμετέχει σε κάποιον περιορισμό του δυϊκού με ισότητα $\Rightarrow$

Ορθότητα και ανάλυση λόγου προσέγγισης.

Για κάθε $u \in C$ ισχύει ότι $\sum_{e:u \in e} y_e = c(u)$.

Στο τέλος δεν μπορώ να αυξήσω το y_e για καμία ακμή $\Rightarrow$

κάθε y_e συμμετέχει σε κάποιον περιορισμό του δυϊκού με ισότητα $\Rightarrow$

αυτός ο περιορισμός του δυϊκού αντιστοιχεί σε μια κορυφή η οποία μπήκε στο C , άρα η e καλύπτεται!

Ορθότητα και ανάλυση λόγου προσέγγισης.

Για κάθε $u \in C$ ισχύει ότι $\sum_{e:u \in e} y_e = c(u)$.

Στο τέλος δεν μπορώ να αυξήσω το y_e για καμία ακμή $\Rightarrow$

κάθε y_e συμμετέχει σε κάποιον περιορισμό του δυϊκού με ισότητα $\Rightarrow$

αυτός ο περιορισμός του δυϊκού αντιστοιχεί σε μια κορυφή η οποία μπήκε στο C , άρα η e καλύπτεται!

Το κόστος του καλύμματος είναι

$$\sum_{u \in C} c(u) =$$

Ορθότητα και ανάλυση λόγου προσέγγισης.

Για κάθε $u \in C$ ισχύει ότι $\sum_{e:u \in e} y_e = c(u)$.

Στο τέλος δεν μπορώ να αυξήσω το y_e για καμία ακμή $\Rightarrow$

κάθε y_e συμμετέχει σε κάποιον περιορισμό του δυϊκού με ισότητα $\Rightarrow$

αυτός ο περιορισμός του δυϊκού αντιστοιχεί σε μια κορυφή η οποία μπήκε στο C , άρα η e καλύπτεται!

Το κόστος του καλύμματος είναι

$$\sum_{u \in C} c(u) = \sum_{u \in C} \sum_{e: u \in e} y_e$$

Ορθότητα και ανάλυση λόγου προσέγγισης.

Για κάθε $u \in C$ ισχύει ότι $\sum_{e:u \in e} y_e = c(u)$.

Στο τέλος δεν μπορώ να αυξήσω το y_e για καμία ακμή $\Rightarrow$

κάθε y_e συμμετέχει σε κάποιον περιορισμό του δυϊκού με ισότητα $\Rightarrow$

αυτός ο περιορισμός του δυϊκού αντιστοιχεί σε μια κορυφή η οποία μπήκε στο C , άρα η e καλύπτεται!

Το κόστος του καλύμματος είναι

$$\sum_{u \in C} c(u) = \sum_{u \in C} \sum_{e: u \in e} y_e \leq \sum_{e \in E} |C \cap e| y_e$$

Ορθότητα και ανάλυση λόγου προσέγγισης.

Για κάθε $u \in C$ ισχύει ότι $\sum_{e:u \in e} y_e = c(u)$.

Στο τέλος δεν μπορώ να αυξήσω το y_e για καμία ακμή $\Rightarrow$

κάθε y_e συμμετέχει σε κάποιον περιορισμό του δυϊκού με ισότητα $\Rightarrow$

αυτός ο περιορισμός του δυϊκού αντιστοιχεί σε μια κορυφή η οποία μπήκε στο C , άρα η e καλύπτεται!

Το κόστος του καλύμματος είναι

$$\sum_{u \in C} c(u) = \sum_{u \in C} \sum_{e: u \in e} y_e \leq \sum_{e \in E} |C \cap e| y_e \leq 2 \sum_{e \in E} y_e \leq 2 \cdot OPT.$$