COMBINATORIAL OPTIMIZATION

$< s , f >$: an instance

s : Solutions Set

$f : s \rightarrow \Re$ Cost function to minimize (Max)

Find $s^* \in S$ s.t.

$f(s^*) \leq f(s), \forall s \in S$ (MIN)

<u>or</u>

$f(s^*) \geq f(s), \forall s \in S$ (MAX)

Escape from local optima

" How to escape from a local optimum ? "

Simulated annealing (SA)

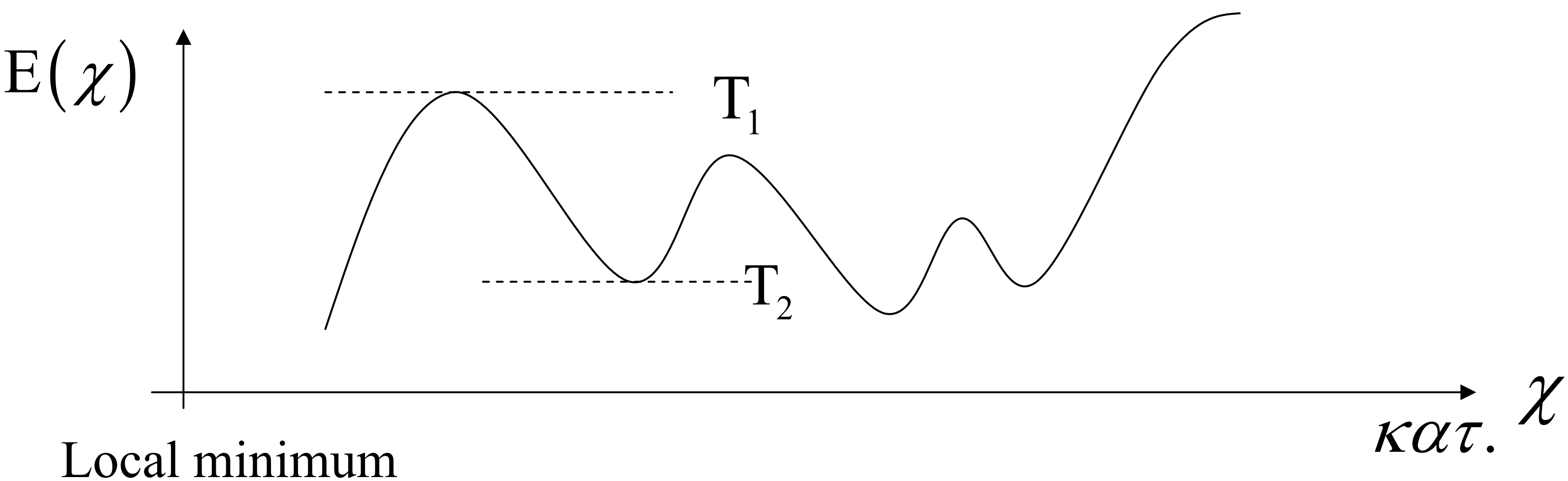
Kirkpatrick " 83

Cerny " 83

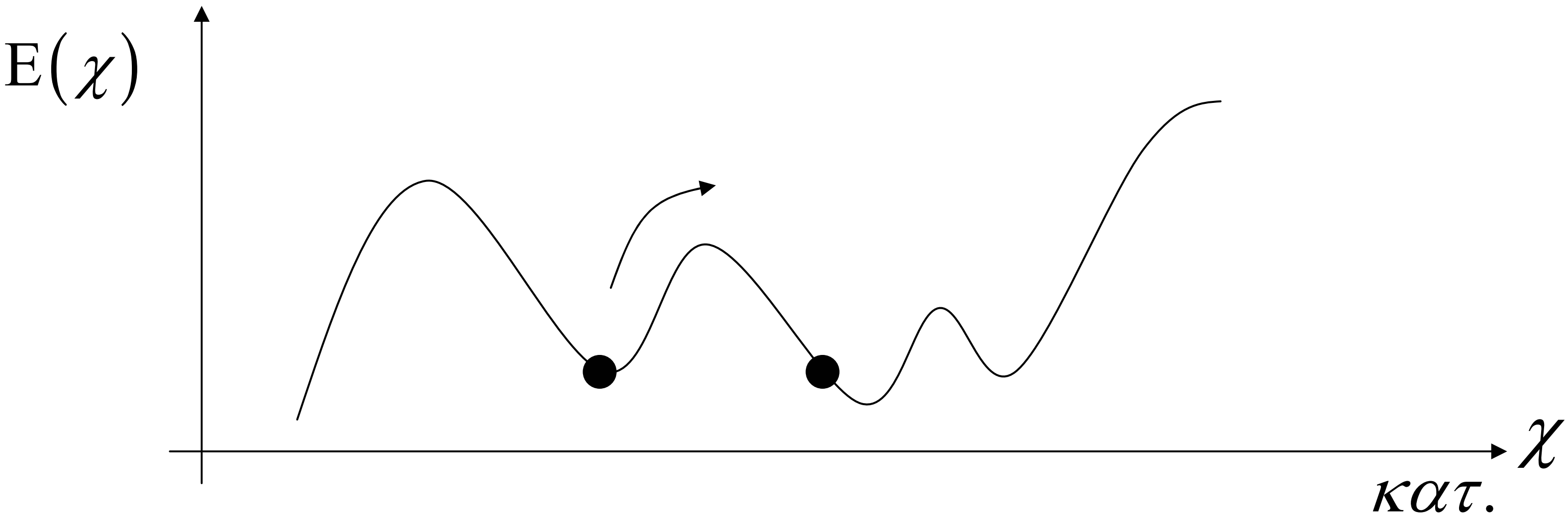
- VLSI
- Inspiration
  - LS $\longrightarrow$ minimal energy
  - SA $\longrightarrow$ minimum energy

Διαδικασία Φυσική

- Θερμοκρασία ↗ (υγρή κατάσταση)
- Προοδευτική ↘ (κατ. Καλά δομημ.)
- Κατ. Υγρή : τυχαία τακτοποίηση
- Τελική κατ. : κανονική μορφή (ελάχ. ενέργεια)



Annealing



T ↗ διαφυγή

Metropolis Algorithm
(Monte Carlo techniques)

- Προσομοίωση της εξέλιξης της ύλης

  (θερμική ισοροπία)

- Τρέχουσα κατάσταση i (E_i)

$$\xrightarrow{\textit{διαταραχή} \quad (1\ \sigma\eta\mu.)}$$

$\kappa\alpha\tau.$ j (E_i)

Metropolis (1952)

$$\Delta E = E_j - E_i \begin{cases} \leq 0 \text{ , j } \textit{αποδεκτὴ} \\ > 0 \text{ , i } \textit{αποδεκτὴ} \end{cases}$$

$$\textit{με πιθανὸτητα } P_i(j) = e^{-\frac{\Delta E}{K_B T}}$$

$$K_B : \textit{ σταθερὰ } \text{Boltzmann}$$

Combinatorial optimization

Χρησιμ. Στη Συνδ. Βελτιστοπ.

Αναλογία

- λύσεις $\longrightarrow$ κατ. φυσικού συστήμ.
- ματαβλητές $\longrightarrow$ σωματίδιο
- συνάρτηση κόστους $\longrightarrow$ ενέργεια μίας κατάστ.

Αλγόριθμος Simulated Annealing (προσομοιωμένη ανόπτωση)

$\Downarrow$

Επανάληψη αλγορίθμων

Metropolis

Με T $\searrow$

- Δομή γειτονιάς
- Μηχανισμός γένεσης νέων λύσεων

Συνδιαστική Βελτιστοποίηση

- (S, f) στιγμιότυπο προβλ. P
- i, j λύσεις
- $f(i), f(j)$ κόστος

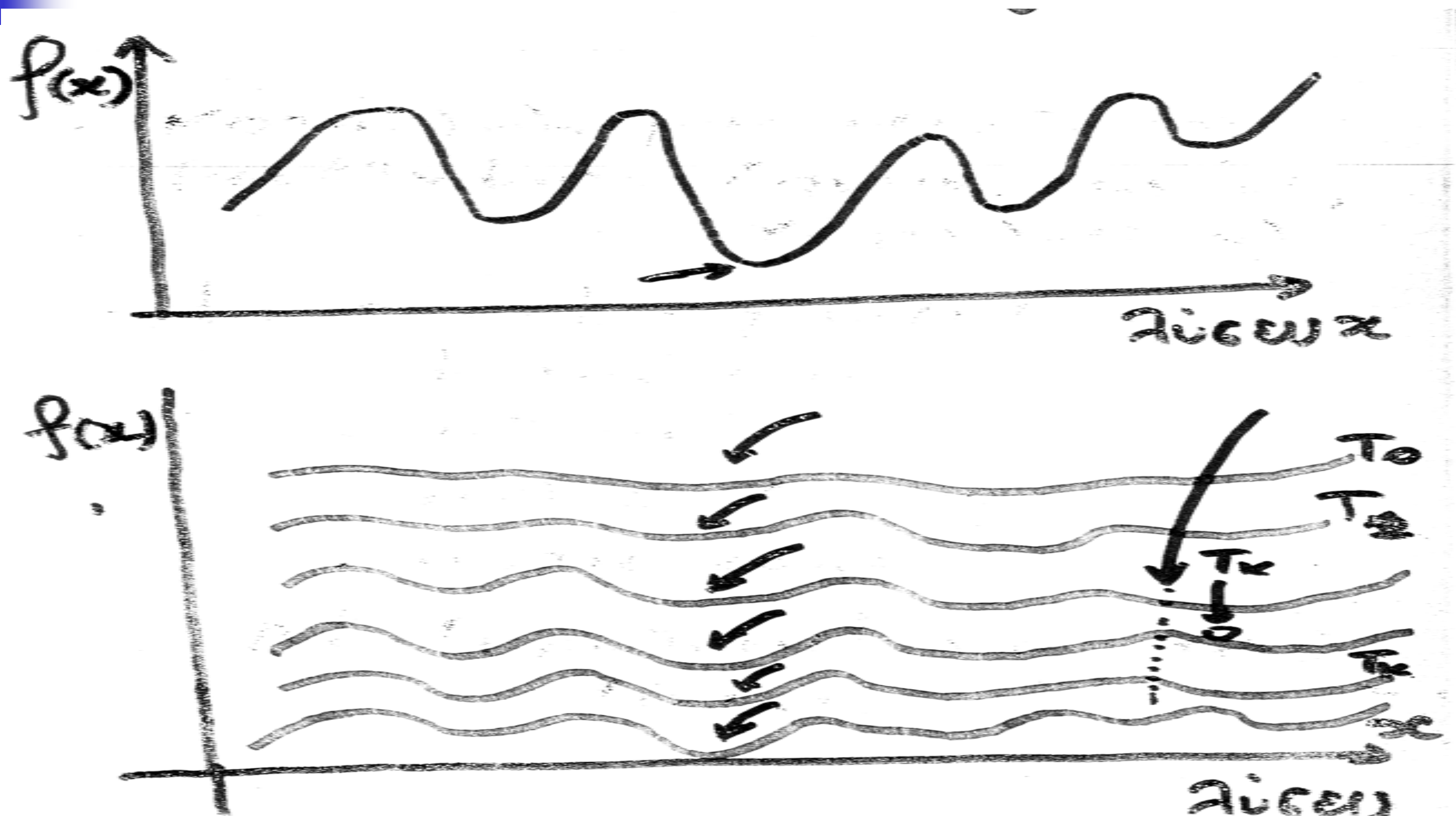
" μηχανισμός γένεσης ⇔ μηχανισμός διαταραχής (metrop) "

" κριτήριο αποδοχής ⇔ κριτήριο Metropolis "

$$P_E\{\alpha\pi o\delta o\chi\acute{\eta}\ j\} = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ f(j) \le f(i) \\ e^{\frac{f(i)-f(j)}{c}} & \delta\iota\alpha\phi o\rho\varepsilon\tau. \end{cases}$$

$$C \leftrightarrow T\ (\in \Re^{+})$$

Simulated Annealing



“επιπεδοποίηση της τραχύτητας”

Simulated Annealing Algorithm

- initial solution
- initial temperature T_0
- generate a <u>new</u> solution in the neighborhood

  ACCEPT IT with probability

$$P = \min\left(1\ ,\ e^{-\frac{\Delta f}{T_K}}\right)$$

- $T_{K+1} = a^{K+1} T_0$
- if $T_{K+1} \langle T_{final}$ then <u>STOP</u>

  otherwise

$T_0\ ,\ a\ ,\ T_{final}\ ?$

$T_K \to 0$ THEN Simple LS

Προσέγγιση σε πεπερασμένο χρόνο

- κατάλληλη παρουσίαση του προβλήματος

(αντικ. συνάρτ. , χώρος λύσεων)

- μηχανισμός γένεσης

  - μεταθέσεις
  - αλλαγές
  - αλλαγή σειράς
  - αντιστροφές

Choosing parameters

- Δf (υπολογισμός αυξητικά
  (incremental)
- T σχήμα παγώματος
  (cooling schedule)
- T_0 , $g(T)$, $T_{\tau\dot{\varepsilon}\lambda o\varsigma}$?

Επιλογή Παραμέτρων

- $T_0 \left| \dfrac{\#\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\kappa\tau\dot{\omega}\nu\ \mu\varepsilon\tau\alpha\kappa\iota\nu\dot{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu}{\#\ \pi\rho o\tau\varepsilon\iota\nu\dot{o}\mu\varepsilon\nu\omega\nu\ \mu\varepsilon\tau\alpha\kappa\iota\nu.} \right. \cong 1$
- $g(T)\ \left| T_{K+1} = aT_K\ ,\ K = 0,1,2,\ldots.\right.$

$$a \cong 0.95$$

$$\left| T_{K+1} = \frac{T_K}{1+\log\left(t_{K+1}\right)}\ ,\ K = 0,1,2,\ldots. \right.$$

$$t_{K+1} = t_K\left(1+\text{rate}\right)\ ,\ t_0 = 1.0$$

$$\text{rate} \cong 10^{-2}, 10^{-6}, ?$$

A polynomial schema

$$T_{K+1} = \frac{T_K}{1 + T_K \dfrac{\log(1+\delta)}{3G_K}}, \quad K = 0,1,2,\ldots$$

$\delta \in \Re^{+}$ $\qquad G_K$: *διασπορά της συν. κόστους*

$$\underline{\underline{\sigma\varepsilon}}\ O\left(\tau * L * \underline{\ln(|S|)}\right)$$

time one transition

length MC

upper bound of MC

Κριτήριο Τέλους

- Τ≈0
- Κ διαμορφώσεις ίδιες η τιμή συνάρτ. Ελάχιστα μεταβαλόμενη
- Μήκη Μαρκονιανών αλυσίδων
- Πολυωνυμικά της διάστασης του προβλήματος
- Μεταβλητά ή σταθερά

Χαρακτηριστικά SA

- Τοπικά ελάχιστα
- απλή , γενική
- λύση εκκίνησης
- Αρχή : μεγάλο αριθμό μεταβολών
  Τέλος : σπάνιες μεταβολές (Local Search)

" Ασυμπτωτικά Βέλτιστη "

(Μαρκοβιανές αλυσίδες)

Εφαρμογές SA

- Εγκατάσταση συσκευών – μηχανιμάτων στα συστήματα τηλ/νων
- Βελτιστοποίηση ηλεκτρικών κυκλωμάτων
- Χρονοπρογραμματισμός
- Ανεύρεση μιας πληροφορίας αλλοιωμένης από θόρυβο (αποκατάσταση εικόνων)
- Καθορισμός της γεωλογικής δομής του υπεδάφους απο αποτελέσματα σεισμικών πειραμάτων

Μειονεκτήματα SA

- Εγγύηση αποδοτικότητας
- Μεγάλοι χρόνοι υπολογισμού (ανάπτυξη εξιδεικευμένων αρχιτεκτονικών υπολογισμού)
- Παραλληλοποίηση ?
- Σχήμα παγώματος ?
- Πολυωνυμικά σχήματα ?

Εφαρμογές

- Maximum Indep. Set $(G=(V,E))$
  - $S = \{\delta\iota\alpha\mu\varepsilon\rho\acute{\iota}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\}$

    $V', V \setminus V'$
  - αντικ. συνάρτηση (Max)

    $f(V') = |V'| - \lambda |E'|, \lambda > 1$
  - μηχανισμός γένεσης

    $\upsilon' \in V$ (αλλαγή συνόλου)
  - $\Delta f = \left(X_{V-V'}(\upsilon') - X_{V'}(\upsilon')\right) *$

    $$\left(1 - \lambda \sum_{\substack{[\upsilon', \vartheta] \in E \\ \vartheta \in V'}} 1\right)$$

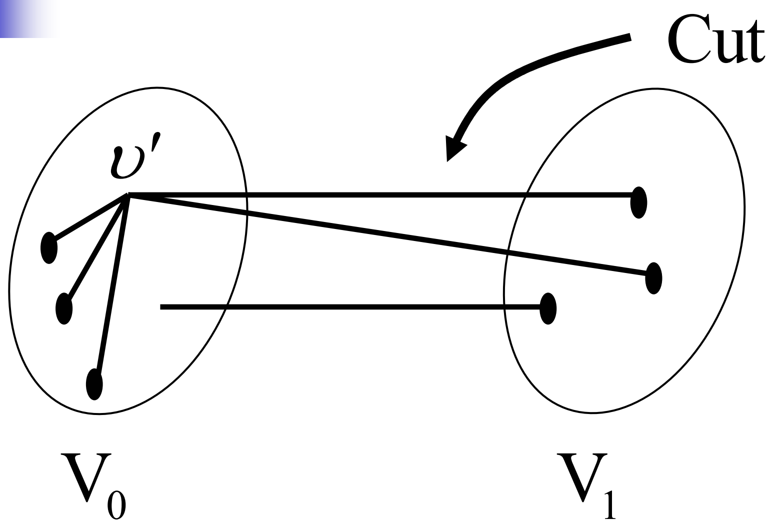
Μέγιστη Διάτμιση (max Cut)

- $G = (V\ ,\ E)$
- $S = \{\mathit{ολες}\ \text{οι}\ \mathit{διαμερισεις}\ V_0\ ,\ V_1\ \}$
- $f(V_0\ ,\ V_1) = \sum_{[\upsilon\ ,\ \vartheta] \in \delta(V_0\ ,\ V_1)} W_{[\upsilon\ ,\ \vartheta]}$

$\delta(V_0\ ,\ V_1) = \{[\upsilon\ ,\ \vartheta] \in E\ |\upsilon \in V_0\ ,\ \vartheta \in V_1\}$

- $\upsilon' \in V :\ \mathit{αλλαγ\dot{η}\ συν\dot{ο}λου}$

MAX CUT



- $\Delta f = \sum_{\substack{[\upsilon', \vartheta] \in E \backslash \\ \delta(V_0, V_1)}} W_{[\upsilon', \vartheta]} - \sum_{[\upsilon', \vartheta] \in \delta(V_0, V_1)} W_{[\upsilon', \vartheta]}$