Knapsack

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Βασίλης Ζησιμόπουλος

Θεωριτική Πληροφορική
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Knapsack

Ορισμός

Δίνεται ένα σακίδιο $B > 0$ και n αντικείμενα μεγέθους $s_i > 0$ και αξίας $p_i > 0, i = 1, \ldots, n$. Το ζητούμενο είναι η συλλογή αντικειμένων με τη μεγαλύτερη αξία που χωράει στο σακίδιο. Δηλαδή, $\max \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ με $\sum_{i=1}^{n} x_i s_i \leq B$ και $f_i \in \{0, 1\}$ $\forall i = 1, \ldots, n$.

Greedy Fractional Knapsack

Algorithm 1 Fractional Knapsack

$S \leftarrow \emptyset$
Ταξινόμησε σε φθίνουσα σειρά των $r_i = p_i/s_i$, δηλ. $p_1/s_1 \geq p_2/s_2 \geq \cdots \geq p_n/s_n$.
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
    if $B \geq s_i$ **then**
        $B \leftarrow B - s_i$
        $x_i = 1$ ▷ Παίρνουμε ολόκληρο το αντικείμενο
    else
        $x_i = B/s_i$ ▷ Παίρνουμε μέρος του αντικειμένου
        $B = 0$
return S

Γραμμικό πρόγραμμα

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i & \\
\text{subject to:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_i x_i \le B, & i = 1, \ldots, n \\
 & x_i \in \{0, 1\}, & i = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Knapsack

Παράδειγμα:

$$\max (k+1)x_1 + kx_2 + kx_3$$
$$(k+1)x_1 + kx_2 + kx_3 \leq 2k$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

Knapsack

Παράδειγμα:

$$\max (k+1)x_1 + kx_2 + kx_3$$
$$(k+1)x_1 + kx_2 + kx_3 \leq 2k$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

Heuristic:

$$\frac{k+1}{k+1} \geq \frac{k}{k} \geq \frac{k}{k}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$$

Knapsack

Παράδειγμα:

$$\max (k+1)x_1 + kx_2 + kx_3$$
$$(k+1)x_1 + kx_2 + kx_3 \leq 2k$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

Heuristic:

$$\frac{k+1}{k+1} \geq \frac{k}{k} \geq \frac{k}{k}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$$
$$\rho = \frac{H}{OPT} = \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2}$$

Knapsack

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + kx_2 + kx_3 & \\ x_1 + kx_2 + kx_3 &\leq k \\ k &= 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Knapsack

$$\max 2x_1 + kx_2 + kx_3$$
$$x_1 + kx_2 + kx_3 \leq k$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

Heuristic:

$$H = \frac{2}{1} \geq \frac{k}{k}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 0$$

Knapsack

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + kx_2 + kx_3 \\ x_1 + kx_2 + kx_3 \leq k \\ k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Heuristic:

$$H = \frac{2}{1} \geq \frac{k}{k}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 0$$

$$\rho = \frac{H}{OPT} = \frac{2}{k}$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{2}{k} = 0$$

Greedy Knapsack

$$p_i = s_i = 1 \quad i = 1, \ldots, n-1$$
$$p_n = B - 1$$
$$s_n = B = kn$$

$$\left.\begin{array}{l} m^*(x) = b - 1 \\ m_G(x) = n - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{m^*(x)}{m_G(x)} > k$$

k αυθαίρετα μεγάλος αριθμός

Greedy Knapsack

Αλγόριθμος:

$$m_A(x) = \max(p_{max}, m_G(x))$$
$$p_{max} = \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i\}$$

Λόγος:

$$\frac{m^*(x)}{m_A(x)} < 2$$

Knapsack

$$\bar{p_j} = \sum_{i=1}^{j-1} p_i \leq m_G(x)$$

Knapsack

$$\bar{p_j} = \sum_{i=1}^{j-1} p_i \leq m_G(x)$$

$$\bar{s_j} = \sum_{i=1}^{j-1} s_i \leq B$$

Knapsack

$$\bar{p_j} = \sum_{i=1}^{j-1} p_i \leq m_G(x)$$

$$\bar{s_j} = \sum_{i=1}^{j-1} s_i \leq B$$

$$m^*(x) < \bar{p_j} + p_j \quad (\bar{s_j} + s_j > B)$$

$$m^*(x) < \bar{p_j} + (b - \bar{s_j})\frac{p_j}{s_j} < \bar{p_j} + p_j$$

Knapsack

$$\bar{p_j} = \sum_{i=1}^{j-1} p_i \leq m_G(x)$$

$$\bar{s_j} = \sum_{i=1}^{j-1} s_i \leq B$$

$$m^*(x) < \bar{p_j} + p_j \quad (\bar{s_j} + s_j > B)$$

$$m^*(x) < \bar{p_j} + (b - \bar{s_j})\frac{p_j}{s_j} < \bar{p_j} + p_j$$

$$m^*(x) < \begin{cases} 2\bar{p_j} \leq 2m_G(x) \leq 2m_A(x), & \textbf{εάν } p_j \leq \bar{p_j} \\ \bar{p_j} + p_j \leq p_j + p_j \leq 2p_{max} \leq 2m_A(x), & \textbf{εάν } p_j \geq \bar{p_j} \end{cases}$$