

Πρόβλημα Μέγιστου Ανεξάρτητου Υποσυνόλου (MIS)

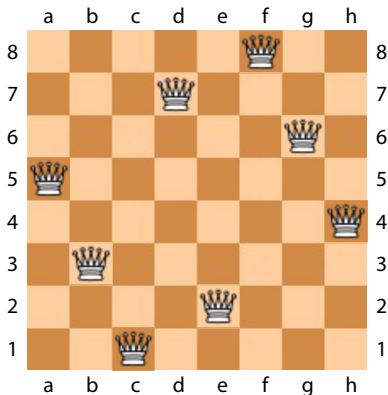
Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Βασίλης Ζησιμόπουλος

Θεωρητική Πληροφορική
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Το πρόβλημα των οκτώ βασίλισσών (Gauss)

Μπορούμε να το τοποθετήσουμε 8 βασίλισσες σε μια σκακιέρα έτσι ώστε να μην απειλούνται μεταξύ τους;



Το πρόβλημα των οκτώ βασιλισσών (Gauss)

Λύσεις:

- Gauss: 76 λύσεις.
- Schachzeitung: 40 λύσεις.
- Συνολικά: 92 λύσεις.

Ερώτημα:

- k βασίλισσες.
- $k \times k$ σκακιέρα.
- $k \geq 4$.

(Hoffman, Loessi, Moore, 1969)

Αναγωγή στο MIS

Ανεξάρτητο υποσύνολο κόμβων \Rightarrow Θέσεις των 4 βασιλισσών.

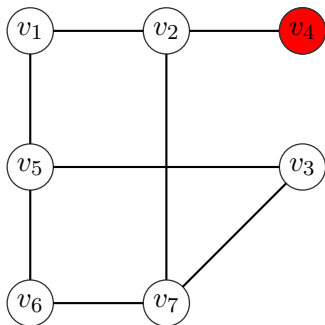
\exists λύση στο k -Βασ. πρόβλημα \Leftrightarrow MIS διάστασης k .

Greedy Αλγόριθμος για το MIS

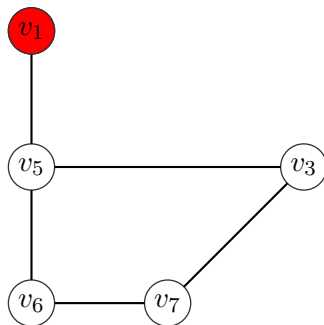
Algorithm 1 Greedy-MIS

```
1:  $V' \leftarrow \emptyset$ 
2: while  $V \neq \emptyset$  do
3:   Επέλεγε κορυφή  $u \in V$  με τον μικρότερο βαθμό
4:    $V' \leftarrow V' \cup \{u\}$ 
5:   Αφαίρεσαι την κορυφή  $u$  και όλους τους γείτονες της από το  $V$ 
6: end while
7: return  $V'$ 
```

Παράδειγμα

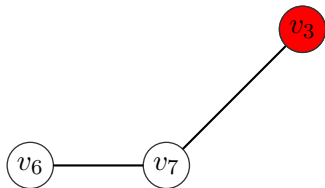


(a) $V' = \{v_4\}$



(b) $V' = \{v_4, v_1\}$

Παράδειγμα



(a) $V' = \{v_4, v_1, v_3\}$



(b) $V' = \{v_4, v_1, v_3, v_6\}$

Το MIS δεν είναι σταθερά προσεγγίσιμο

- Vertex Cover: $\rho = 2$
- Vertex Cover: λύση C με $|C| = \tau$ (OPT)
- $S = V - C$ λύση MIS
- $\alpha = |S| = n - \tau$ (OPT)
- Έστω $\tau = \frac{n}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{n}{2}$
- $\frac{f_A(I)}{OPT} \leq 2 \Rightarrow f_A(I) \leq 2 \frac{n}{2} = n$
- $n - f_A(I) \geq 0 \Rightarrow \frac{f_A^{MIS}(I)}{\alpha} \rightarrow 0$

Το MIS είναι Δ -προσεγγίσιμο

- Μέγιστος Βαθμός: $A \geq \frac{n}{\Delta + 1}$
- Άσκηση: $\alpha \leq \frac{\Delta n}{\Delta + \delta}$, $\frac{\alpha}{A} \leq \Delta$

