

2η ΕΡΓΑΣΙΑ

Δίνονται οι αλγόριθμοι(σε μορφή ψευδοκώδικα) των μεθόδων

- 1. Runge-Kutta-Fehlberg 4ης τάξης (RK4)** και
- 2. Adams-Predictor-Corrector 4ης τάξης (APC4)**

για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ) :

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad \text{όπου } y(t) \mid [a = t_0, b = t_F].$$

A. Ζητείται να υλοποιηθούν σε γλώσσα προγραμματισμού C ή C++ (ή και σε MatLab) για την αριθμητική επίλυση των παρακάτω Π.Α.Τ. :

Εφαρμογές		
Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ.)	Διάστημα $[a, b]$	Αναλυτική λύση
1. $y' = 2t - y$, $y(0) = -1$	[0, 5]	$y(t) = e^{-t} + 2t - 2$
2. $y' = 1 + (t - y)^2$, $y(2) = 1$	[2, 5]	$y(t) = t + \frac{1}{1-t}$
3. $y' = \cos 2t + \sin 3t$, $y(0) = 1$	[0, 10]	$y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{4}{3}$
4. $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty$, $y(0) = \frac{1}{3}$	[0, 5]	$y(t) = \frac{1}{\sqrt{3 + 2t^2 + 6e^{t^2}}}$
5. $y' = 1 + \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2$, $y(1) = 0$	[1, 4]	$y(t) = t(\tan(\ln t))$

Να γίνει κατάλληλη πινακοποίηση των αποτελεσμάτων σας και να σχολιάσετε τα συμπεράσματά σας.

B. (Προαιρετικό) Ζητείται να υλοποιηθεί ένας αλγόριθμος σε γλώσσα προγραμματισμού C ή C++ (ή και σε MatLab) για την αριθμητική επίλυση ενός Π.Α.Τ. ανώτερης τάξης ($m \geq 2$) (με τη κλήση ενός από τους ανωτέρω δοθέντες αλγορίθμους).

Εφαρμογές	
Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ.) τάξης $m = 2$	Ακριβής λύση
1. $y'' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$	$y(t) = 2 \cos t + 3 \sin t$
2. $t^2 y'' - 2t y' + 2y = t^3 \ln t$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$	$y(t) = \frac{7}{4}t + \frac{1}{2}t^3 \ln t - \frac{3}{4}t^3$

Να γίνει κατάλληλη πινακοποίηση των αποτελεσμάτων σας και να σχολιάσετε τα συμπεράσματά σας.

1. Αλγόριθμος Runge-Kutta-Fehlberg 4ης τάξης (RK4)

/* Αριθμητική επίλυση ενός Π.Α.Τ. */

/* Αρχικοποίηση */

begin

Διάβασε $t_0, t_F, y_0,$

$Rmax,$

$ScaleMin, ScaleMax$

/* Παράμετροι του Π.Α.Τ. */

/* Παράμετρος ελέγχου ακρίβειας ($Rmax = 10^{-4}$) */

/* Παράμετροι ελέγχου μεγέθους βήματος h */

/* ($ScaleMin = 0.1, ScaleMax = 4.0$) */

$h = (Rmax)^{\frac{1}{4}}$

/* Αρχικό μέγεθος βήματος h */

$Hmin = h * 10^{-4}$

/* Ελάχιστο επιτρεπτό μέγεθος βήματος h */

$t = t_0 ; y = y_0$

/* (t, y) : το τρέχον (t_j, y_j) */

/* Επανάληψη */

do

begin

if $t + h > t_F$ **then** $h = t_F - t$ /* μέγεθος βήματος h για το τελικό βήμα */

/* επόμενη εκτίμηση του σφάλματος $e[h]$ */

$m_1 = hf(t_j, y_j)$

$m_2 = hf(t_j + \frac{1}{4}h, y_j + \frac{1}{4}m_1)$

$m_3 = hf(t_j + \frac{3}{8}h, y_j + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2)$

$m_4 = hf(t_j + \frac{12}{13}h, y_j + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 + \frac{7296}{2197}m_3)$

$m_5 = hf(t_j + h, y_j + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3680}{513}m_3 - \frac{845}{4104}m_4)$

$m_6 = hf(t_j + \frac{1}{2}h, y_j - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 - \frac{11}{40}m_5)$

$ErrorEstimate = \frac{1}{360}m_1 - \frac{128}{4275}m_2 - \frac{2197}{75240}m_4 + \frac{1}{50}m_5 + \frac{2}{55}m_6$ /* $\simeq e[h]$ */

/* Έλεγχος ακρίβειας */

$Ratio = |ErrorEstimate|/h$

if $Ratio < Rmax$ **then** /* η ακρίβεια του επομένου y είναι αποδεκτή */

begin

$t = t + h$ /* $t = t_F$ για το τελικό βήμα */

$y = y + \frac{25}{216}m_1 + \frac{1408}{2565}m_3 + \frac{2197}{4104}m_4 - \frac{1}{5}m_5$ /* $y \simeq y(t)$ */

τύπωσε (t, h, y)

end

/* Προσδιορισμός του επομένου h : $h * ScaleMin \leq next\ h \leq h * ScaleMax$ */

$ScaleFactor = 0.84 * (Rmax/Ratio)^{1/4}$ **then**

if $ScaleFactor < ScaleMin$ **then** $ScaleFactor = ScaleMin$

if $ScaleFactor > ScaleMax$ **then** $ScaleFactor = ScaleMax$

$h = ScaleFactor * h$

end

while ($t \neq t_F$ or $h \geq Hmin$) /* κριτήριο διακοπής */

if ($t = t_F$) **then** **τύπωσε** (t, y) /* $y \simeq y(t_F)$ */

else **τύπωσε** (συμβαίνει να είναι $h < Hmin,$

κάποια ιδιαιτερότητα παρατηρείται " κοντά" στο τρέχον t .)

end.

2. Αλγόριθμος Adams-Predictor-Corrector 4ης τάξης (APC4)

/* Αριθμητική επίλυση ενός Π.Α.Τ. */

/* Αρχικοποίηση */

begin

Διάβασε t_0, t_F, y_0 , /* Παράμετροι του Π.Α.Τ. */

$NumOfSteps$, /* από το t_0 προς το t_F , j -βήμα : $t_j = t_0 + jh$ */

$MaxIt$ /* Μέγιστος αριθμός των επαναλήψεων του τύπου διόρθωσης */

$NumSig$ /* εκθέτης δύναμης του 10 */

$h = (t_F - t_0)/NumOfSteps$ /* το μέγεθος βήματος h */

$RelTol = 10^{-NumSig}$ /* η επιθυμητή ακρίβεια */

$t = t_0$; $y = y_0$ /* (t, y) : το τρέχον (t_j, y_j) */

for $j = 0$ **to** 2 /* αρχικές τιμές των f_{-3}, f_{-2}, f_{-1} */

begin

$f_{j-3} = f(t, y)$

/* Χρήση μιας self-starting μεθόδου για τον υπολογισμό του y_{new} */

$t = t + h$; $y = y_{new}$ /* $y(t + h) \simeq y_{new}$ */

τύπωςε $(j + 1, t, y, f_{j-3})$

end

/* Είναι $t = t_3$, $y = y_3$ και f_{-3}, f_{-2}, f_{-1} είναι οι τιμές κλίσης στα t_0, t_1, t_2 αντίστοιχα. */

$f = f(t, y)$ /* $f = f_j = f(t_j, y_j)$ */

/* Επανάληψη */

for $j = 3$ **to** $(NumOfSteps - 1)$

begin

$p = y + \frac{h}{24}[-9f_{-3} + 37f_{-2} - 59f_{-1} + 55f]$ /* τύπος πρόβλεψης */

do

for $k = 1$ **to** $MaxIt$

begin

$c = y + \frac{h}{24}[f_{-2} - 5f_{-1} + 19f + 9f(t + h, p)]$ /* τύπος διόρθωσης */

$Delta = -\frac{19}{270}(c - p)$ /* εκτίμηση του σφάλματος $e_c[h]$ */

$p = c$ /* προετοιμασία για την επόμενη επανάληψη */

end

while $(|Delta| > RelTol * |c|)$ /* κριτήριο διακοπής */

if (το κριτήριο διακοπής δεν ικανοποιείται) **then**

τύπωςε (για την επιθυμητή ακρίβεια χρειάζεται μικρότερο μέγεθος βήματος h)

/* ενημέρωση */

$t = t + h$; $y = c$

$f_{-3} = f_{-2}$; $f_{-2} = f_{-1}$; $f_{-1} = f$; $f = f(t, y)$

τύπωςε $(j + 1, t, y, f)$

end

if (το κριτήριο διακοπής ικανοποιείται στο κάθε βήμα) **then**

τύπωςε (οι τιμές y είναι ακριβείς σε $NumSig$ σημαντικά ψηφία)

end.

Οδηγίες για την υποβολή της 2ης Εργασίας

Σημείωση : Όλες οι υλοποιήσεις των ασκήσεων να γίνουν σε C (ή C++) (ή και σε MatLab).

Καταληκτική ημερομηνία υποβολής :

Η **2η ΕΡΓΑΣΙΑ** πρέπει εμπρόθεσμα να υποβληθεί ηλεκτρονικά στην e_class του μαθήματος μέχρι και την **Παρασκευή 20.12.2024** και **ώρα 23:59**.

Η **2η Εργασία** πρέπει να περιλαμβάνει :

- A.**
 - 1.** ένα αρχείο για το κάθε πρόγραμμα με όνομα **ergasia2_algorithm**, (όπου algorithm το όνομα του αλγορίθμου της μεθόδου (π.χ. ergasia2_RKF4), που θα περιέχει μόνο τον πηγαίο(source) κώδικα του αλγορίθμου της μεθόδου και
 - 2.** ένα μόνο αρχείο κειμένου(και για τις δύο μεθόδους) με όνομα **ergasia2_Απαντήσεις_xxxxxxx**(.tex σε latex ή .doc σε word) για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων, των σχολίων και των συμπερασμάτων σας.
- B.** Παρόμοια.

Για την υποβολή στην e_class πρέπει να επισυνάψετε ΜΟΝΟ ένα Φάκελο (συμπιεσμένο) με όνομα ERG_2_Ονοματεπώνυμο_xxxxx.zip ή (.rar), όπου xxxxxxx τα τελευταία ψηφία του Α.Μ. σας. Μέσα στον φάκελο αυτό να περιέχονται τα αρχεία με τον **πηγαίο(source) κώδικα** (και όχι εκτελέσιμα αρχεία) και το **αρχείο κειμένου** με την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Προσοχή: Είναι απαραίτητο στην αρχή του κάθε αρχείου (**κώδικα** και **κειμένου**) να αναγράφετε το ονοματεπώνυμό σας και τον ΑΜ.