

# Κυκλικοί, Συνεπώς διατεταγμένοι πίνακες και Γραφήματα

Νικόλαος Μισυρλής

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών  
Πανεπιστήμιο Αθηνών

# Περιεχόμενα

- 1 Εισαγωγή
  - Φυσική διάταξη
  - Κόκκινη-Μαύρη διάταξη
- 2 Αδιάσπαστοι, Διαγώνια υπέρτεροι,  $p$ -κυκλικοί πίνακες και γραφήματα
  - Ορισμοί
- 3 Επαναληπτικές Μέθοδοι
  - Επαναληπτικές Μέθοδοι - Γενικά
  - Η SOR επαναληπτική μέθοδος
    - Η συναρτησιακή σχέση - Σύγκλιση
    - Προσδιορισμός βέλτιστων παραμέτρων

## Εισαγωγή

## Φυσική διάταξη

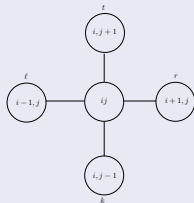
$$\Delta u - f(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} - g(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

στο  $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \ell_1, 0 \leq y \leq \ell_2\}$ .

	•	•	•	•
13	14	15	16	
9	10	11	12	
5	6	7	8	
1	2	3	4	

## Φυσική διάταξη

$$u_{ij} = l_{ij}u_{i-1,j} + r_{ij}u_{i+1,j} + t_{ij}u_{i,j+1} + b_{ij}u_{i,j-1} \quad (2)$$



$$l_{ij} = \frac{k^2}{2(k^2 + h^2)} \left( 1 + \frac{1}{2}hf_{ij} \right), \quad r_{ij} = \frac{k^2}{2(k^2 + h^2)} \left( 1 - \frac{1}{2}hf_{ij} \right),$$

$$t_{ij} = \frac{k^2}{2(k^2 + h^2)} \left( 1 - \frac{1}{2}kg_{ij} \right), \quad b_{ij} = \frac{k^2}{2(k^2 + h^2)} \left( 1 + \frac{1}{2}kg_{ij} \right),$$

$$h = \frac{\ell_1}{M_1 + 1}, \quad k = \frac{\ell_1}{M_2 + 1}, \quad f_{ij} = f(ih, jk), \quad g_{ij} = g(ih, jk).$$

## Φυσική διάταξη

$$Au = b \quad (3)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} M_1 & T_1 & & & 0 \\ B_2 & M_2 & T_2 & & \\ & B_3 & M_3 & T_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & B_{N-1} & M_{N-1} & T_{N-1} \\ 0 & & & & B_N & M_N \end{bmatrix} \cdot \quad (4)$$

# Κόκκινη-Μαύρη διάταξη

## Κόκκινη-Μαύρη διάταξη - Παραλληλία.

	●	●	●	●
15		7	16	8
	●	●	●	●
5	13	6	14	
	●	●	●	●
11	3	12	4	
	●	●	●	●
1	9	2	10	

$$Au = b$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & F \\ E & D_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

- $D_1, D_2$  διαγώνιοι.

# Αδιάσπαστοι πίνακες

## Ορισμός

Για  $n \geq 2$ , ο  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  λέγεται διασπάζσιμος (reducible) αν υπάρχει ένας  $n \times n$  μεταθετικός πίνακας  $P$  τέτοιος ώστε

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

όπου  $A_{11}$  είναι ένας  $r \times r$  υποπίνακας και  $A_{22}$  είναι ένας  $(n-r) \times (n-r)$  υποπίνακας, με  $1 \leq r < n$ . Αν δεν υπάρχει τέτοιος μεταθετικός πίνακας τότε ο  $A$  λέγεται αδιάσπαστος (irreducible).

## Εναλλακτικός Ορισμός

Ένας πίνακας  $A$  τάξης  $n$  είναι αδιάσπαστος (irreducible) αν  $n = 1$  ή αν  $n > 1$  και για οποιαδήποτε δεδομένα μη κενά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα  $S$  και  $T$  του συνόλου  $W$  των πρώτων  $n$  θετικών ακεραίων αριθμών τέτοια ώστε  $S \cup T = W$ , υπάρχει  $i \in S$  και  $j \in T$  τέτοια ώστε  $a_{ij} \neq 0$ .

# Αδιάσπαστοι πίνακες

Η έννοια της διάσπασης είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς το αρχικό σύστημα μπορεί να μετασχηματιστεί στο  $Au = k$ , όπου  $A = PAP^T$  είναι της μορφής (6). Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\begin{aligned} A_{11}u_1 + A_{12}u_2 &= k_1 \\ A_{22}u_2 &= k_2 \end{aligned} \tag{7}$$

οπότε το αρχικό σύστημα υποβιβάζεται σε δύο μικρότερης τάξης συστήματα, τα οποία διατηρούν μεταξύ τους τη σχέση των εξισώσεων με τους αγνώστους και μπορούν να επιλυθούν ανεξάρτητα από το αρχικό σύστημα.

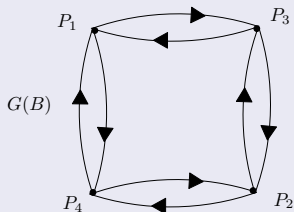
# Αδιάσπαστοι πίνακες και Γραφήματα

## Ορισμός

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό αν για κάθε ζεύγος κόμβων  $(P_i, P_j)$ , υπάρχει ένα μονοπάτι από τον  $P_i$  στον  $P_j$  και από τον  $P_j$  στον  $P_i$ . Δηλαδή, οι κόμβοι  $P_i$  και  $P_j$  βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο.

## Παράδειγμα

$$B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Το παραπάνω κατευθυνόμενο γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό, γιατί για κάθε ζεύγος κόμβων υπάρχει ένα μονοπάτι.

# Αδιάσπαστοι πίνακες και Γραφήματα

## Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$



Το παραπάνω κατευθυνόμενο γράφημα δεν είναι ισχυρά συνεκτικό διότι δεν υπάρχει μονοπάτι από τον κόμβο  $P_2$  προς τον κόμβο  $P_1$ .

# Αδιάσπαστοι πίνακες και Γραφήματα

## Θεώρημα

*Ένας μιγαδικός πίνακας  $A$  τάξης  $n$  είναι αδιάσπαστος αν και μόνο αν το κατευθυνόμενο γράφημα του  $G(A)$  είναι ισχυρά συνεκτικό.*

## Σημείωση

*Όταν ένας πίνακας είναι αδιάσπαστος, όλα τα εκτός της διαγωνίου του στοιχεία σε κάθε γραμμή ή στήλη του πίνακα δεν είναι μηδενικά.*

# Διαγώνια υπέρτεροι πίνακες

## Ορισμός

Ένας  $n \times n$  μιγαδικός πίνακας  $A = (a_{ij})$  καλείται διαγώνια υπέρτερος αν

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (8)$$

για όλα τα  $1 \leq i \leq n$ . Επιπλέον, ο πίνακας  $A$  καλείται αυστηρά διαγώνια υπέρτερος αν

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (9)$$

για όλα τα  $1 \leq i \leq n$ .

## Διαγώνια υπέρτεροι πίνακες

### Ορισμός

Ο πίνακας  $A$  καλείται ασθενώς διαγώνια υπέρτερος αν ο  $A$  είναι διαγώνια υπέρτερος, με την (9) να ισχύει για ένα τουλάχιστον  $i$ .

Όμοια, ο πίνακας  $A$  καλείται αδιάσπαστα διαγώνια υπέρτερος αν ο  $A$  είναι αδιάσπαστος και διαγώνια υπέρτερος με την (9) να ισχύει για ένα τουλάχιστον  $i$ , δηλαδή αν είναι αδιάσπαστος και ασθενώς διαγώνια υπέρτερος.

# Διαγώνια υπέρτεροι πίνακες

## Θεώρημα

Έστω  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ένας αυστηρά ή αδιάσπαστα διαγώνια υπέρτερος μιγαδικός πίνακας. Τότε ο πίνακας  $A$  είναι μη ιδιάζων ( $\det A \neq 0$ ). Αν όλα τα διαγώνια στοιχεία του  $A$  είναι επίσης και θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε οι ιδιοτιμές  $\lambda_i$  του  $A$  ικανοποιούν την

$$\operatorname{Re} \lambda_i > 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

## Πόρισμα

Αν ο  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  είναι ένας Ερμιτιανός αυστηρά διαγώνια υπέρτερος ή αδιάσπαστα διαγώνια υπέρτερος πίνακας με θετικά και πραγματικά διαγώνια στοιχεία, τότε ο  $A$  είναι θετικά ορισμένος.

# $\rho$ -κυκλικοί πίνακες

## Ορισμός

Έστω  $A \geq 0$  ένας αδιάσπαστος  $n \times n$  πίνακας και  $k$  το πλήθος των ιδιοτιμών του  $A$  με μέτρο  $\rho(A)$ . Αν  $k = 1$ , τότε ο  $A$  λέγεται πρωτεύων. Αν  $k > 1$ , τότε ο  $A$  λέγεται κυκλικός με δείκτη  $k$ .

## Ορισμός

Ένας πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  είναι ασθενώς κυκλικός με δείκτη  $k (> 1)$  αν υπάρχει ένας μεταθετικός  $n \times n$  πίνακας  $P$  τέτοιος ώστε ο  $PAP^T$  να είναι της μορφής

$$PAP^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & A_{1,k} \\ A_{2,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{k,k-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

όπου οι μηδενικοί διαγώνιοι υποπίνακες είναι τετραγωνικοί.

Η (10) είναι η κανονική μορφή ενός  $n \times n$  πίνακα  $A \geq 0$ , ο οποίος είναι κυκλικός με δείκτη  $k (> 1)$ .

# $p$ -κυκλικοί πίνακες-Γραφήματα

## Θεώρημα

Έστω  $A = (a_{ij}) \geq 0$  ένας αδιάσπαστος  $n \times n$  πίνακας και  $G(A)$  το κατευθυνόμενο γράφημά του. Για κάθε κόμβο  $P_i$  του  $G(A)$ , θεωρούμε όλα τα κλειστά μονοπάτια (κύκλους) που συνδέουν το  $P_i$  με τον εαυτό του. Αν  $S_i$  είναι το σύνολο όλων των μηκών  $m_i$  αυτών των κλειστών μονοπατιών και  $k_i$  είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ) των μηκών, δηλαδή

$$k_i = \text{ΜΚΔ}_{m_i \in S_i} \{m_i\}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

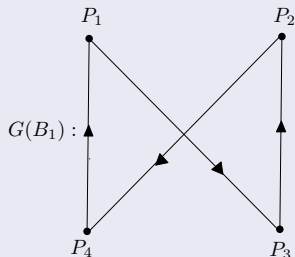
τότε  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$  όπου  $k = 1$  όταν ο  $A$  είναι πρωτεύων και είναι κυκλικός με δείκτη  $k$  όταν  $k > 1$ .

# $p$ -κυκλικοί πίνακες-Γραφήματα

## Παράδειγμα

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

έχει το κατευθυνόμενο  
 γράφημα



Παρατηρούμε ότι για το γράφημα  $G(B_1)$  ισχύει ότι

$$k_1 = \text{ΜΚΔ}\{4, 8, 12, \dots\} = 4,$$

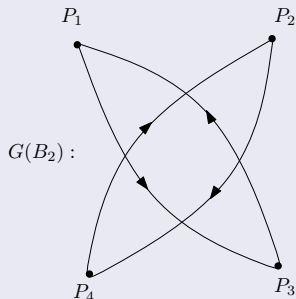
οπότε ο πίνακας  $B_1$  είναι κυκλικός με δείκτη 4.

# $p$ -κυκλικοί πίνακες-Γραφήματα

## Παράδειγμα

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

έχει το κατευθυνόμενο  
 γράφημα



Παρατηρούμε ότι το γράφημα  $G(B_2)$  είναι μη συνεκτικό διότι δεν υπάρχει μονοπάτι που να συνδέει τους κόμβους  $P_1, P_3$  με τους κόμβους  $P_2, P_4$  και αντίστροφα, με αποτέλεσμα ο πίνακας  $B_2$  να είναι μη κυκλικός.

## $p$ -κυκλικοί πίνακες

### Ορισμός

Αν  $G$  είναι ένα ισχυρά συνεκτικό και πεπερασμένο κατευθυνόμενο γράφημα, τότε το  $G$  είναι ένα κυκλικό γράφημα με δείκτη  $k > 1$ , ή ένα πρωτεύων γράφημα αν ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης όλων των μηκών των κύκλων του είναι, αντίστοιχα,  $k > 1$  ή  $k = 1$ .

## $\rho$ -κυκλικοί πίνακες

Έστω το γραμμικό σύστημα (3), όπου ο  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $n \geq 2$ , ο οποίος έχει διαμερισθεί στην ακόλουθη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \dots & A_{N,N} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

όπου κάθε διαγώνιος υποπίνακας  $A_{i,i}$  ( $1 \leq i \leq N$ ) είναι τετραγωνικός. Θεωρούμε ότι ο πίνακας των συντελεστών  $A$  αναλύεται ως ακολούθως

$$A = D - C_L - C_U, \quad (12)$$

και οι κατά ομάδες Jacobi πίνακες του  $A$  που αντιστοιχεί στη διαμέριση (11) είναι ο

$$B = I - D^{-1}A = L + U \quad (13)$$

όπου  $L = D^{-1}C_L$  και  $U = D^{-1}C_U$ .



## $p$ -κυκλικοί πίνακες

### Ορισμός

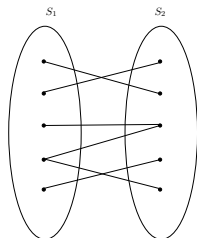
Αν ο κατά ομάδες πίνακας Jacobi  $B$  της (13) του πίνακα  $A$  της (11) είναι ασθενώς κυκλικός με δείκτη  $p$  ( $\geq 2$ ), τότε ο  $A$  είναι  $p$ -κυκλικός, σε σχέση με τη διαμέριση (11).

### Σημείωση

Αν οι διαγώνιοι υποπίνακες  $A_{i,i}$  της (11) είναι  $1 \times 1$  πίνακες, τότε ο πίνακας Jacobi είναι ασθενώς δικυκλικός και κατά συνέπεια προκύπτει ότι ο πίνακας  $A$  είναι δικυκλικός. Ισοδύναμα, θα λέμε ότι ο πίνακας  $A$  έχει την ιδιότητα  $A$ . (Young)

## $p$ -κυκλικοί πίνακες - Ιδιότητα A

Το γράφημα ενός πίνακα με την ιδιότητα A αναπαρίστανται με ένα διμερές (bipartite) γράφημα.



Εύκολα αποδεικνύεται ότι ένας πίνακας με την ιδιότητα A μπορεί να μετατραπεί σε ένα δικυκλικό πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix} D_1 & -F \\ -E & D_2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

όπου  $D_1, D_2$  είναι τετραγωνικοί πίνακες.

## $p$ -κυκλικοί πίνακες - Ιδιότητα A

Αξίζει να σημειωθεί ότι επιλέγοντας το  $N=2$  στην (11), ο πίνακας  $B$  της (13) είναι της μορφής

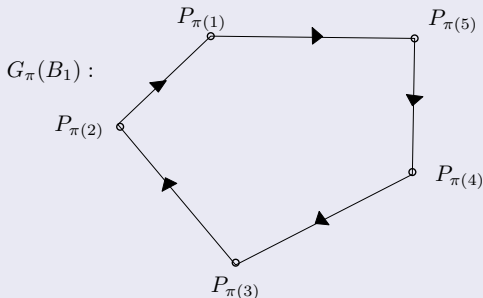
$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_{1,2} \\ B_{2,1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

δηλαδή είναι ένας ασθενώς κυκλικός πίνακας με δείκτη 2. Με άλλα λόγια, οποιαδήποτε διαμέριση του πίνακα  $A$  της (11) με  $N=2$ , για την οποία οι διαγώνιοι υποπίνακες είναι μη ιδιάζοντες, είναι τέτοια ώστε ο πίνακας  $A$  να είναι δικυκλικός.

# $p$ -κυκλικοί πίνακες - Γραφήματα

## Παράδειγμα 1

Κυκλικό κατευθυνόμενο γράφημα με δείκτη  $p = 5$  του πίνακα  $B_1$ .

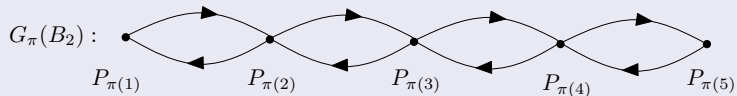


Έχει  $MΚΔ=5$ , οπότε είναι ένα κατά ομάδες κατευθυνόμενο γράφημα το οποίο είναι κυκλικό με δείκτη 5.

# $p$ -κυκλικοί πίνακες - Γραφήματα

## Παράδειγμα 2

Το κατά ομάδες κατευθυνόμενο γράφημα του πίνακα  $B_2$  για  $p = 2$



Έχει  $\text{ΜΚΔ}=2$ , οπότε είναι ένα κυκλικό γράφημα με δείκτη 2.

## Συνεπώς διατεταγμένοι πίνακες

### Θεώρημα

Έστω ότι το κατά ομάδες (block) κατευθυνόμενο γράφημα του διαμερισμένου πίνακα Jacobi  $B$  της (13) είναι ισχυρά συνεκτικό. Τότε ο πίνακας  $A$  της (11) είναι  $p$ -κυκλικός αν το κατά ομάδες (block) κατευθυνόμενο γράφημα του πίνακα  $B$  είναι ένα κυκλικό γράφημα με δείκτη  $p$ .

### Ορισμός

Αν ο πίνακας  $A$  της (11) είναι  $p$ -κυκλικός, τότε ο  $A$  είναι συνεπώς διατεταγμένος (consistently ordered) αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$B(a) = aL + a^{-(p-1)}U \quad (16)$$

που προκύπτει από τον κατά ομάδες πίνακα Jacobi  $B$  της (13) είναι ανεξάρτητες του  $a$ , για  $a \neq 0$ . Κατά συνέπεια και ο πίνακας  $B$  είναι συνεπώς διατεταγμένος. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι μη συνεπώς διατεταγμένοι.

## Συνεπώς διατεταγμένοι πίνακες

Για το παράδειγμα του πίνακα  $A_1$  της (21), έχουμε σύμφωνα με την (16), ότι

$$B_1(a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a^{-(p-1)}B_{1,p} \\ aB_{2,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & aB_{3,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & aB_{p,p-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

και με απλούς πολλαπλασιασμούς πινάκων έχουμε ότι

$$B_1^p(a) = B_1^p$$

για όλα τα  $a \neq 0$ , δηλαδή, οι ιδιοτιμές του  $B_1(a)$  είναι ανεξάρτητες του  $a$ .  
 Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο πίνακας  $A_1$  είναι συνεπώς διατεταγμένος.

## Συνεπώς διατεταγμένοι πίνακες

Για το παράδειγμα του πίνακα  $A_2$  έχουμε ότι

$$B_2(a)x = \lambda x \quad (18)$$

όπου  $x \neq 0$ . Η (18) είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$aB_{j,j-1}X_{j-1} + \frac{1}{a}B_{j,j+1}X_{j+1} = \lambda X_j, \quad 1 \leq j \leq N \quad (19)$$

όπου  $B_{1,0}$  και  $B_{N,N+1}$  είναι μηδενικοί πίνακες. Για  $Z_j = \frac{1}{a^{j-1}}X_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , η (19) λαμβάνει τη μορφή

$$B_{j,j-1}Z_{j-1} + B_{j,j+1}Z_{j+1} = \lambda Z_j, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (20)$$

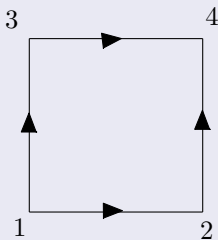
Συνεπώς, κάθε ιδιοτιμή  $\lambda$  του  $B_2(a)$  είναι για  $a \neq 0$ , ιδιοτιμή και του  $B_2$  αποδεικνύοντας έτσι ότι ο πίνακας  $A_2$  είναι ένας δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος πίνακας.

### Συμπέρασμα

Κάθε κατά ομάδες τριδιαγώνιος πίνακας της μορφής (21), με μη ιδιάζοντες διαγώνιους υποπίνακες, είναι ένας δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος πίνακας.

## Συνεπώς διατεταγμένοι πίνακες - Γραφήματα

### Παράδειγμα



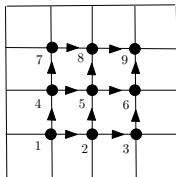
Σχήμα: Πλέγμα τεσσάρων σημείων

### Παρατήρηση

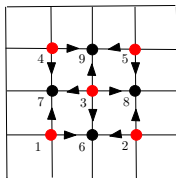
Ακολουθώντας τη φορά  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  έχουμε δύο τόξα με φορά ίδια με αυτή των δεικτών του ρολογιού και δύο τόξα με φορά αντίθετη με αυτή των δεικτών του ρολογιού. Επομένως ο πίνακας του συστήματος που προκύπτει από αυτά τα 4 σημεία του πλέγματος, είναι συνεπώς διατεταγμένος.

# Συνεπώς διατεταγμένοι πίνακες - Γραφήματα

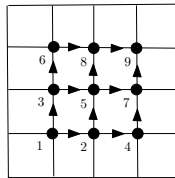
Στο ακόλουθο σχήμα παρατηρείται ότι ο πίνακας που προκύπτει από την φυσική διάταξη, την κόκκινη μαύρη διάταξη και την κατά διαγωνίους διάταξη των σημείων του πλέγματος είναι επίσης δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος.



(a)



(b)



(c)

**Σχήμα:** (a) Φυσική διάταξη (b) Κόκκινη μαύρη διάταξη (c) Κατά διαγωνίους διάταξη

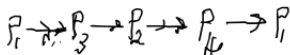
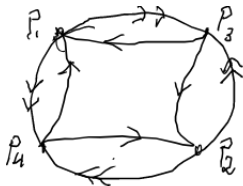
# Συνεπώς διατεταγμένοι πίνακες - Γραφήματα

	1	3
4		2

R/B

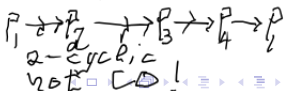
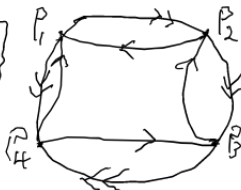
0	0	1	1
0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	0

-2-cyclic  
 -ca



	1	2	
4		3	

0	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0



## Συναρτησιακές σχέσεις

Τα γραφήματα αποτελούν επίσης ένα ιδιαίτερα χρήσιμο βοήθημα στην εύρεση του εκθέτη  $k$  στις συναρτησιακές σχέσεις που συνδέουν τις ιδιοτιμές του επαναληπτικού πίνακα μιας επαναληπτικής μεθόδου με τις ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα Jacobi, όταν ο πίνακας  $A$  της (11) είναι  $p$ -κυκλικός.

### USSOR μέθοδος

$$[\nu - (1 - \omega)(1 - \hat{\omega})]^p = \nu^k [\nu\omega + \hat{\omega} - \omega\hat{\omega}]^{|\zeta_L| - k} [\nu\hat{\omega} + \omega - \omega\hat{\omega}]^{|\zeta_U| - k} \cdot (\omega + \hat{\omega} - \omega\hat{\omega})^{2k} \mu^p$$

$|\zeta_L|, |\zeta_U|$ : το πλήθος των μη μηδενικών κατά ομάδες υποπινάκων του  $B$  που βρίσκονται στους πίνακες  $L, U$ , αντίστοιχα

$$k = \begin{cases} |\eta_L| + |\eta_U|, & \text{αν } p > 2 \\ 1, & \text{αν } p = 2 \end{cases}, \quad 1 \leq k \leq [p/2], \quad (21)$$

$[x]$ : το ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού  $x$

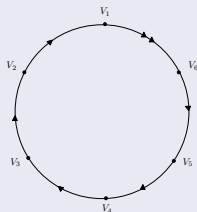
$|\eta_L|, |\eta_U|$ : το πλήθος των μη μηδενικών κατά ομάδες υποπινάκων που βρίσκονται στο κάτω και άνω τριγωνικό μέρος του πίνακα  $LU$ .

Ισχύει επίσης ότι  $|\zeta_L| \geq k$  και  $|\zeta_U| \geq k$ .

# Συναρτησιακές σχέσεις - Γραφήματα

## Παράδειγμα

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & B_{1,p} \\ B_{2,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B_{3,2} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & B_{p,p-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$



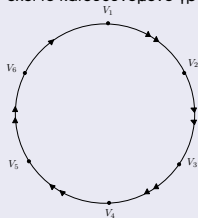
Παρατηρούμε ότι υπάρχει μόνο ένα διπλής κατεύθυνσης τόξο που ακολουθεί ένα μονής κατεύθυνσης και κατά συνέπεια είναι  $k = 1$ .

# Συναρτησιακές σχέσεις - Γραφήματα

## Παράδειγμα

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & B_{1,2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_{2,3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & B_{p-1,p} \\ B_{p,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

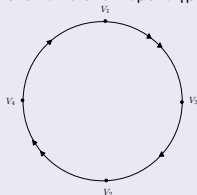
έχει το κατευθυνόμενο γράφημα



Παρατηρούμε ότι υπάρχει μόνο ένα διπλής κατεύθυνσης τόξο που ακολουθεί ένα μονής κατεύθυνσης και κατά συνέπεια είναι  $k = 1$ .

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{2,4} \\ 0 & B_{3,2} & 0 & 0 \\ B_{4,1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

έχει το κατευθυνόμενο γράφημα



Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο διπλής κατεύθυνσης τόξα που ακολουθούν δύο μονής κατεύθυνσης και κατά συνέπεια είναι  $k = 2$ .

# Εφαρμογές

- Η Κόκκινη-Μαύρη Διάταξη
- Μαρκοβιανές Αλυσίδες

## Γενικά

- Το σύστημα:

$$Au = b \quad (23)$$

- Η γενική μορφή των επαναληπτικών μεθόδων είναι

$$u^{(k+1)} = Gu^{(k)} + c, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

- 1 Αν σε κάποια επανάληψη βρεθεί η λύση του (25), τότε οι επόμενες επαναλήψεις να παραμείνουν αμετάβλητες (συμβατότητα).
- 2 Αν η ακολουθία των διανυσμάτων που ορίζεται απο την (24) συγκλίνει, τότε συγκλίνει στη λύση του (25) (αμοιβαία συμβατότητα).

## Τεχνική preconditioning

$$Au = b \quad (25)$$

$$u = A^{-1}b, \quad (26)$$

$$R^{-1}Au = R^{-1}b. \quad (27)$$

Από την (27) μπορούμε να ορίσουμε την επαναληπτική μέθοδο

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau R^{-1}(b - Au^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

όπου  $\tau \neq 0$  είναι μια πραγματική παράμετρος,  $u = (u_1, u_2)$  και  $b = (b_1, b_2)^T$ , όπου  $u_1, b_1$  είναι  $n_1 \times 1$  διανύσματα και  $u_2, b_2$  είναι  $n_2 \times 1$  διανύσματα.

$$u^{(k+1)} = G_\tau u^{(k)} + c_\tau, \quad (29)$$

$$G_\tau = I - \tau R^{-1}A \quad \text{και} \quad c_\tau = \tau R^{-1}b, \quad (30)$$

## Τεχνική preconditioning

Υποθέτουμε λοιπόν ότι ο πίνακας  $A$  έχει τη μορφή

$$A = D - C_L - C_U \quad (31)$$

όπου ο  $D$  είναι ένας διαγώνιος πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι τα ίδια με τα διαγώνια στοιχεία του  $A$  και οι πίνακες  $-C_L$ ,  $-C_U$  είναι τα αυστηρά κάτω και άνω τριγωνικά μέρη του  $A$ , αντίστοιχα.

$$R = D - \omega C_L \quad (32)$$

Γι' αυτή τη μορφή του  $R$  η (28), λόγω της (32), γίνεται

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau(I - \omega L)^{-1} D^{-1} (b - Au^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

η οποία είναι γνωστή σαν Extrapolated SOR (ESOR) μέθοδος.

## Η SOR μέθοδος

Αν θέσουμε  $\tau = \omega$  στην ESOR μέθοδο λαμβάνουμε τη δημοφιλή SOR μέθοδο, η οποία δίνεται διαδοχικά από τους τύπους

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \omega(I - \omega L)^{-1}D^{-1}(b - Au^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

ή

$$u^{(k+1)} = \mathcal{L}_\omega u^{(k)} + \omega(I - \omega L)^{-1}c, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (35)$$

όπου

$$\mathcal{L}_\omega = I - \omega(I - \omega L)^{-1}D^{-1}A \quad (36)$$

ή

$$\mathcal{L}_\omega = (I - \omega L)^{-1}[(I - \omega L)I + \omega U] \quad (37)$$

είναι ο επαναληπτικός πίνακας της SOR μεθόδου.

# Θεωρήματα

## Θεώρημα Romanovsky

Έστω  $A = (a_{ij})$  ένας  $n \times n$  ασθενώς κυκλικός πίνακας με δείκτη  $k > 1$ . Τότε

$$\phi(t) = \det(tI - A) = t^m \prod_{i=1}^r (t^k - \sigma_i^k). \quad (38)$$

Συμβολίζουμε με  $\sigma_i$  μια μη μηδενική ιδιοτιμή του  $A$ .

# Θεωρήματα

## Θεώρημα Kahan (1958)

Έστω  $B$  ένας  $n \times n$  μιγαδικός πίνακας με μηδενικά διαγώνια στοιχεία τον οποίο γράφουμε στη μορφή  $B = L + U$ . Αν ο επαναληπτικός πίνακας της SOR μεθόδου, δίνεται από την (37) τότε για όλα τα  $\omega \in \mathbb{R}$ , ισχύει

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|, \quad (39)$$

όπου η ισότητα ισχύει μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του  $\mathcal{L}_\omega$  είναι κατά μέτρο ίσες με  $|\omega - 1|$ .

### Απόδειξη

Έστω  $\phi(\lambda) = \det(\lambda I - \mathcal{L}_\omega)$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $\mathcal{L}_\omega$ . Αφού ο  $L$  είναι ένας αυστηρά κάτω τριγωνικός πίνακας, ο  $I - \omega L$  είναι μη ιδιάζων και καθώς  $\det(I - \omega L) = 1$ , θα ισχύει ότι

$$0 = \phi(\lambda) = \det(I - \omega L) \det(\lambda I - \mathcal{L}_\omega) = \det\{(\lambda + \omega - 1)I - \omega \lambda L - \omega U\} \quad (40)$$

## .... Απόδειξη

Ο σταθερός όρος  $\sigma$  του  $\phi(\lambda)$ , δηλ. το γινόμενο των ιδιοτιμών του  $\mathcal{L}_\omega$ , λαμβάνεται θέτοντας  $\lambda = 0$  στην (40). Επομένως,

$$\sigma = \prod_{i=1}^n (-\lambda_i(\omega)) = \det\{(\omega - 1)I - \omega U\} = (\omega - 1)^n. \quad (41)$$

Κατά συνέπεια,

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) = \max_i |\lambda_i(\omega)| \geq |\omega - 1|, \quad (42)$$

όπου η ισότητα ισχύει ίσως μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές της  $\rho(\mathcal{L}_\omega)$  είναι κατά μέτρο ίσες με  $|\omega - 1|$ , γεγονός το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη.

## Θεωρήματα

### Θεώρημα

Αν ο  $A$  είναι ένας συνεπώς διατεταγμένος πίνακας με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία τέτοια ώστε ο  $B = I - (\text{diag}A)^{-1}A$  να έχει πραγματικές ιδιοτιμές, τότε  $\rho(\mathcal{L}_\omega) = \tilde{\rho}(\mathcal{L}_\omega) < 1$  αν και μόνο αν

$$0 < \omega < 2 \quad (43)$$

και

$$\rho(B) < 1. \quad (44)$$

## Θεωρήματα

### Θεώρημα 44

Έστω  $B = L + U$  ένας συνεπώς διατεταγμένος πίνακας, ασθενά κυκλικός με δείκτη  $\rho$ . Τότε, για κάθε μιγαδική σταθερά  $\alpha$ ,  $\beta$ , και  $\gamma$ ,

$$\det\{\gamma I - \alpha L - \beta U\} = \det\{\gamma I - (\alpha^{p-1}\beta)^{1/p}(L + U)\}. \quad (45)$$

### Απόδειξη

Για κάθε μιγαδική σταθερά  $\alpha$ ,  $\beta$ , και  $\gamma$  ισχύει ότι

$$\det\{\gamma I - (\alpha L + \beta U)\} = \prod_{i=1}^n (\gamma - \sigma_i)$$

ή

$$\det\{\gamma I - (\alpha^{p-1}\beta)^{1/p}(L + U)\} = \prod_{i=1}^n (\gamma - \tau_i) \quad (46)$$

όπου τα  $\sigma_i$  και  $\tau_i$  είναι αντίστοιχα, ιδιοτιμές των πινάκων  $\alpha L + \beta U$  και  $(\alpha^{p-1}\beta)^{1/p}(L + U)$ .

## ... Απόδειξη

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι τα σύνολα  $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$  και  $\{\tau_i\}_{i=1}^n$  ταυτίζονται. Πράγματι, αν

$$\alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

τότε ο πίνακας

$$\alpha L + \beta U$$

είναι αυστηρά τριγωνικός, δηλ. κάθε  $\sigma_i = 0$  και κάθε  $\tau_i = 0$ .

Επομένως, από την (46) έχουμε

$$\det\{\gamma I - (\alpha L + \beta U)\} = \det\{\gamma I - (\alpha^{p-1}\beta)^{1/p}(L + U)\} \quad (47)$$

Αν

$$\alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

τότε θέτουμε

$$(\alpha/\beta)^{1/p} \equiv \nu.$$

## ... Απόδειξη

Επομένως μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\alpha L + \beta U = (\alpha^{p-1} \beta)^{1/p} \{ \nu L + \nu^{-(p-1)} U \}. \quad (48)$$

Υπό την προϋπόθεση ότι ο πίνακας  $B = L + U$  είναι ένας συνεπώς διατεταγμένος ασθενά κυκλικός πίνακας με δείκτη  $p$ , μπορούμε να θέσουμε  $\nu = 1$ , οπότε

$$\{\sigma_i\}_{i=1}^n \equiv \{\tau_i\}_{i=1}^n$$

γεγονός το οποίο αποδεικνύει ότι η (47) ισχύει ξανά. Επομένως, η απόδειξη μας έχει ολοκληρωθεί.

## Εύρεση συναρτησιακής σχέσης

### Θεώρημα 47

Έστω ότι ο πίνακας  $A$  της (11) είναι ένας  $p$ -κυκλικός πίνακας συνεπώς διατεταγμένος με μη ιδιάζοντες διαγώνιους υποπίνακες  $A_{i,i}$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Αν  $\omega \neq 0$ ,  $\lambda$  είναι μια μη μηδενική ιδιοτιμή του πίνακα  $\mathcal{L}_\omega$  της (37) και αν ο  $\mu$  ικανοποιεί την

$$(\lambda + \omega - 1)^p = \lambda^{p-1} \omega^p \mu^p, \quad (49)$$

τότε η  $\mu$  είναι μια ιδιοτιμή του κατά ομάδες πίνακα Jacobi  $B$  της (13). Αντίστροφα, αν  $\mu$  είναι μια ιδιοτιμή του  $B$  και το  $\lambda$  ικανοποιεί την (49), τότε το  $\lambda$  είναι μια ιδιοτιμή του  $\mathcal{L}_\omega$ .

### Απόδειξη

Οι ιδιοτιμές του  $\mathcal{L}_\omega$  είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\det\{\lambda I - \mathcal{L}_\omega\} = 0, \quad (50)$$

η οποία λόγω του ότι ο  $I - \omega L$  είναι μη ιδιάζων, είναι ισοδύναμη με

$$\det\{(\lambda + \omega - 1)I - \lambda\omega L - \omega U\} = 0. \quad (51)$$

## ... Απόδειξη

Έστω

$$\phi(\lambda) \equiv \det\{(\lambda + \omega - 1)I - \lambda\omega L - \omega U\}. \quad (52)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 45 και από την (52), έχουμε ότι

$$\phi(\lambda) = \det\{(\lambda + \omega - 1)I - \lambda^{(p-1)/p}\omega B\}. \quad (53)$$

Αφού, έχουμε ότι

$A$  είναι  $p$  - κυκλικός,

θα ισχύει ότι

$B$ ,  $\lambda^{(p-1)/p}\omega B$  είναι ασθενά κυκλικοί με δείκτη  $p$ .

Επομένως εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Romanovsky προκύπτει ότι

$$\phi(\lambda) = (\lambda + \omega - 1)^m \prod_{i=1}^r \{(\lambda + \omega - 1)^p - \lambda^{p-1}\omega^p \mu_i^p\}. \quad (54)$$

όπου

$$\mu_i \neq 0 \text{ αν } r > 1.$$

## ... Απόδειξη

### Αντίστροφο:

Έστω  $\mu$  μια ιδιοτιμή του κατά ομάδες πίνακα Jacobi  $B$  και η  $\lambda$  ικανοποιεί την (49).

Τότε, από την (54) έχουμε ότι ένας από τους παράγοντες της  $\phi(\lambda) = 0$ . 'ρα, η  $\lambda$  είναι μια ιδιοτιμή του  $\mathcal{L}_\omega$ . Αποδεικνύεται έτσι το αντίστροφο του θεωρήματος.

### Ευθύ:

Έστω  $\omega \neq 0$  και ότι  $\lambda$  μια ιδιοτιμή του  $\mathcal{L}_\omega$ , τέτοια ώστε τουλάχιστον ένας παράγοντας της (54) να μηδενίζεται.

Αν  $\mu \neq 0$  και η  $\mu$  ικανοποιεί την (49), τότε  $(\lambda + \omega - 1) \neq 0$ . Επομένως,

$$(\lambda + \omega - 1)^p = \lambda^{p-1} \omega^p \mu_i^p, \quad (55)$$

για κάποια  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , όπου το  $\mu_i$  δεν είναι μηδέν. Συνδυάζοντας την (55) με την (49), έχουμε ότι

$$\lambda^{p-1} \omega^p (\mu^p - \mu_i^p) = 0 \quad (56)$$

και επειδή τα  $\lambda$  και  $\omega$  είναι μη μηδενικά, τότε  $\mu^p = \mu_i^p$ . Λαμβάνοντας  $p$ -οστές ρίζες, προκύπτει ότι

$$\mu = \mu_i \exp^{2\pi i r / p} \quad (57)$$

## .... Απόδειξη

Όμως, λόγω του ότι ο πίνακας  $B$  είναι ασθενά κυκλικός, αποδεικνύεται εύκολα από το θεώρημα του Romanovsky ότι

$\mu$  είναι μια ιδιοτιμή του  $B$ .

Αποδεικνύεται έτσι το ευθύ του θεωρήματος.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη έχουμε ότι,  
αν  $\omega \neq 0$ , τότε

$\lambda$  είναι μια μη μηδενική ιδιοτιμή του  $\mathcal{L}_\omega$

και το  $\mu = 0$  ικανοποιεί την (49), τότε αρκεί να δείξουμε ότι η  $\mu = 0$  αποτελεί μια ιδιοτιμή του  $B$ .

Με αυτή όμως την υπόθεση αποδεικνύεται εύκολα από την (53) ότι  $\phi(\lambda) = \det B = 0$ , αποδεικνύοντας ότι το  $\mu = 0$  είναι μια ιδιοτιμή του  $B$ , γεγονός το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

# Λήμμα

## Λήμμα Young

Αν  $b$  και  $c$  είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε και οι δύο ρίζες του τριωνύμου

$$x^2 - bx + c = 0 \quad (58)$$

είναι κατά μέτρο μικρότερες από το 1, αν και μόνο αν

$$|c| < 1, \quad |b| < 1 + c. \quad (59)$$

## Προσδιορισμός βέλτιστων παραμέτρων

### Θεώρημα

Έστω ο πίνακας  $A$  της (11) είναι ένας συνεπώς διατεταγμένος  $p$ -κυκλικός πίνακας με μη ιδιάζοντες διαγώνιους υποπίνακες  $A(i, i)$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Αν όλες οι ιδιοτιμές  $p$ -τάξης του κατά ομάδες πίνακα Jacobi  $B$  είναι πραγματικές, μη αρνητικές και  $0 \leq \rho(B) < 1$ , τότε όταν το  $\omega_b$  ορίζεται από την

$$(\rho(B)\omega_b)^p = [p^p(p-1)^{1-p}] \cdot (\omega_b - 1) \quad (60)$$

έχουμε

1.  $\rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = (\omega_b - 1)(p - 1)$
  2.  $\rho(\mathcal{L}_{\omega}) > \rho(\mathcal{L}_{\omega_b})$ , για κάθε  $\omega \neq \omega_b$ .
- (61)

Επίσης, ο κατά ομάδες επαναληπτικός πίνακας  $\mathcal{L}_{\omega}$  της SOR μεθόδου συγκλίνει για κάθε  $\omega$  που βρίσκεται στο διάστημα  $(0, p/p - 1)$ .

## Προσδιορισμός βέλτιστων παραμέτρων

Για  $\rho = 2$ , η  $\omega_b$  μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα σαν

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B)}} = 1 + \left( \frac{\rho(B)}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B)}} \right)^2. \quad (62)$$

Για λόγους απλότητας, θα επαληθεύσουμε ότι η παράμετρος  $\omega_b$  της (62) δίνει πραγματικά τη λύση της

$$\min_{\omega} \rho(\mathcal{L}_{\omega}) = \rho(\mathcal{L}_{\omega_b}). \quad (63)$$

για την ειδική περίπτωση όπου  $\rho = 2$ .

## SOR

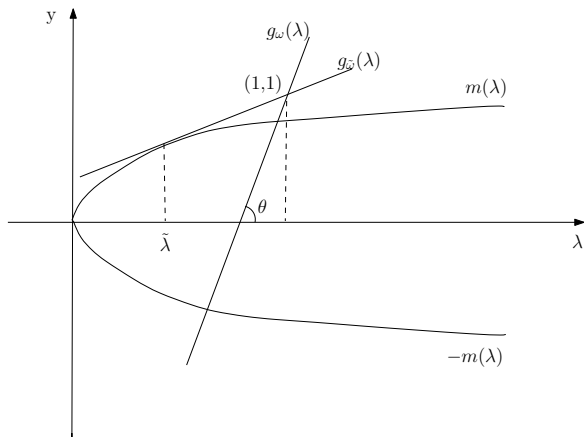
Σύμφωνα με το θεώρημα 48, οι ιδιοτιμές  $\lambda$  του κατά ομάδες SOR πίνακα και οι ιδιοτιμές  $\mu$  του κατά ομάδες πίνακα Jacobi σχετίζονται με την

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda \omega^2 \mu^2, \quad (64)$$

Για  $\omega \neq 0$  ότι

$$\frac{\lambda + \omega - 1}{\omega} = \pm \lambda^{1/2} \mu. \quad (65)$$

## Γραφική παράσταση



**Σχήμα:** Γραφική παράσταση των  $g_{\omega}(\lambda)$ ,  $g_{\bar{\omega}}(\lambda)$  και  $m(\lambda)$  στην περίπτωση που οι ρίζες της (64) είναι πραγματικές.

## Προσδιορισμός βέλτιστων παραμέτρων

Στη συνέχεια ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$g_{\omega}(\lambda) = \frac{\lambda + \omega - 1}{\omega}, \omega \neq 0, \quad (66)$$

και

$$m(\lambda) = \lambda^{1/2} \mu, \quad 0 \leq \mu \leq \rho(B) < 1, \quad (67)$$

όπου η  $g_{\omega}(\lambda)$  είναι μια ευθεία γραμμή που διέρχεται από το σημείο (1,1) και της οποίας η κλίση φθίνει όσο αυξάνει το  $\omega$ .

Η μεγαλύτερη τετμημένη των δύο σημείων τομής φθίνει όσο αυξάνει το  $\omega$  μέχρι η ευθεία  $g_{\omega}(\lambda)$  να εφάπτεται στην παραβολή  $m(\lambda)$ . Αυτό συμβαίνει όταν

$$\tilde{\omega} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}} \quad (68)$$

και η τετμημένη  $\tilde{\lambda} = \tilde{\omega} - 1$ , όπου τα  $\tilde{\omega}$  και  $\tilde{\lambda}$ , προκύπτουν από τη λύση του συστήματος της παραβολής και της εφαπτομένης της παραβολής (βλ. παράρτημα).

## Προσδιορισμός βέλτιστων παραμέτρων

Για  $\omega > \tilde{\omega}$ , το οποίο συμβαίνει όταν η διακρίνουσα της (64) είναι αρνητική, έχουμε ότι η (64) έχει μιγαδικές συζυγείς ρίζες με μέτρο  $\omega - 1$ , το οποίο αυξάνει κατά μέτρο όσο αυξάνει το  $\omega$ .

Επομένως, για μια σταθερή τιμή  $\mu$  του  $B$ , η τιμή του  $\omega$  που ελαχιστοποιεί τη ρίζα της μεγαλύτερης κατά μέτρο ιδιοτιμής είναι η  $\tilde{\omega}$ .

Η καμπύλη  $\pm m(\lambda) = \pm \lambda^{1/2} \rho(B)$  είναι ένας φάκελος για όλες τις ευθείες  $\pm \lambda^{1/2} \mu$ ,  $0 \leq \mu \leq \rho(B)$  και δεδομένου ότι ισχύει η

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = \max_{\mu} \{ \min_{\omega} (\mathcal{L}_{\omega}) \}, \quad (69)$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = \omega_b - 1, \quad (70)$$

όπου το  $\omega_b$  δίνεται από την (62).

## Παράρτημα ...

Η εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής δίνεται από την

$$y - y_0 = m'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) \quad (71)$$

όπου

$$m'(\lambda_0) = \pm \frac{\mu}{2\sqrt{\lambda_0}} \quad (72)$$

Αφού η  $g_\omega(\lambda)$  διέρχεται από το  $(1,1)$ , το σημείο αυτό θα επαληθεύει την (71), οπότε από τις (71) και (72) προκύπτει ότι

$$1 - y_0 = \pm \frac{\mu}{2\sqrt{\lambda_0}}(1 - \lambda_0). \quad (73)$$

Ισχύει επίσης ότι

$$y_0 = \frac{\lambda_0 + \omega - 1}{\omega} \quad (74)$$

αφού η  $g_\omega(\lambda)$  περιστρέφεται μέχρις ότου να περάσει από το σημείο επαφής. Λύνοντας το σύστημα των (73) και (74) βρίσκουμε το σημείο επαφής

$$(\lambda_0, y_0) = \left( \frac{\omega^2 \mu^2}{4}, \frac{\omega^2 \mu^2 + 4\omega - 4}{4\omega} \right). \quad (75)$$

## ... Παράρτημα

Το σημείο αυτό θα επαληθεύει την παραβολή, οπότε από την (65) έχουμε ότι  $y_0 = \pm \sqrt{\lambda_0 \mu}$  και λόγω της (75) προκύπτει

$$\tilde{\omega} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}} \quad \text{και} \quad \hat{\omega} = \frac{2}{1 - \sqrt{1 - \mu^2}} \quad (76)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\tilde{\omega} < \hat{\omega}, \quad (77)$$

όπου  $0 < \tilde{\omega} < 2 < \hat{\omega}$ . Επίσης επειδή η  $\lambda_0$ , όπως δίνεται από την (75), είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς  $\omega$ , θα ισχύει λόγω της (77) ότι  $\lambda_0(\tilde{\omega}) < \lambda_0(\hat{\omega})$ , δηλαδή  $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega} - 1$ .

# Βιβλιογραφία



R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.



D. M. Young, *Iterative Solution of Large Linear Systems*, Academic Press, New York, 1971.