3. ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ GAUSS-JORDAN (GJ) ΣΕ ΠΟΛΥΕΠΕΞΕΡΓΑΣΤΗ ΤΥΠΟΥ ΥΠΕΡΚΥΒΟΥ

3.1 Επίλυση γραμμικού συστήματος

$$\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$$

όπου $\mathrm{A} \in \Re^{\mathrm{n} \times \mathrm{n}}$, είναι μη ιδιάζων πίνακας, $\mathrm{x}, \ \mathrm{b} \in \Re^{\mathrm{n}}$.

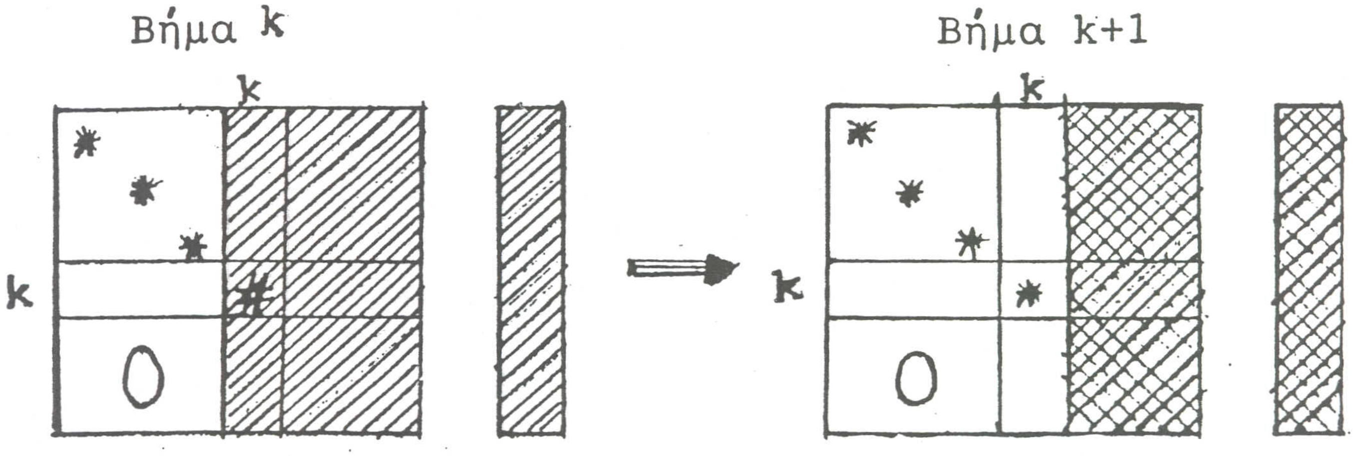
<u>Μέθοδος διαγωνοποίησης GJ</u>

Μετασχηματισμός

$$\mathrm{Ax} = \mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Dx} = \mathrm{C}$$

όπου D είναι ένας διαγώνιος πίνακας (γενικότερα $\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \Re^{\mathrm{n} \times \mathrm{n}}$)

Μετάβαση του αλγορίθμου από το βήμα k στο βήμα k + 1.



Μετάβαση τού αλγορίθμου από το βήμα k στο βήμα k+1.

3.2 Κωδικοποιημένη μορφή της ακολουθιακής μεθόδου GJ-KJI με μερική οδήγηση

Αλγόριθμος της μορφής GJ-KJI

For $\;k := 1$ to n do

(*Εύρεση του ℓ έτσι ώστε*)

$$\mathrm{piv(k)} : \begin{cases} |\alpha(\ell, k)| = \max\{|\alpha(k,k)|, \ldots, |\alpha(n,k)|\} \\ \mathrm{piv}(k) := \ell \qquad \{\text{οδηγός γραμμή}\} \\ \alpha(\mathrm{piv}(k), k) \longleftrightarrow \alpha(k,k) \end{cases}$$

For $\;j := k+1$ to $n+1$ do

$$\mathrm{mod(k,j)} : \begin{cases} \alpha(\mathrm{piv}(k), j) \longleftrightarrow \alpha(k,j) \\ \alpha(k,j) := \alpha(k,j) \,/\, \alpha(k,k) \\ \\ \text{For } \; i := 1 \text{ to } n, \quad i \neq k \text{ do} \\ \qquad \alpha(i,j) := \alpha(i,j) - \alpha(i,k) * \alpha(k,j) \end{cases}$$

Ετσι ο αλγόριθμος της GJ-KJI γράφεται:

For $k := 1$ to n do

$\quad$ piv(k)

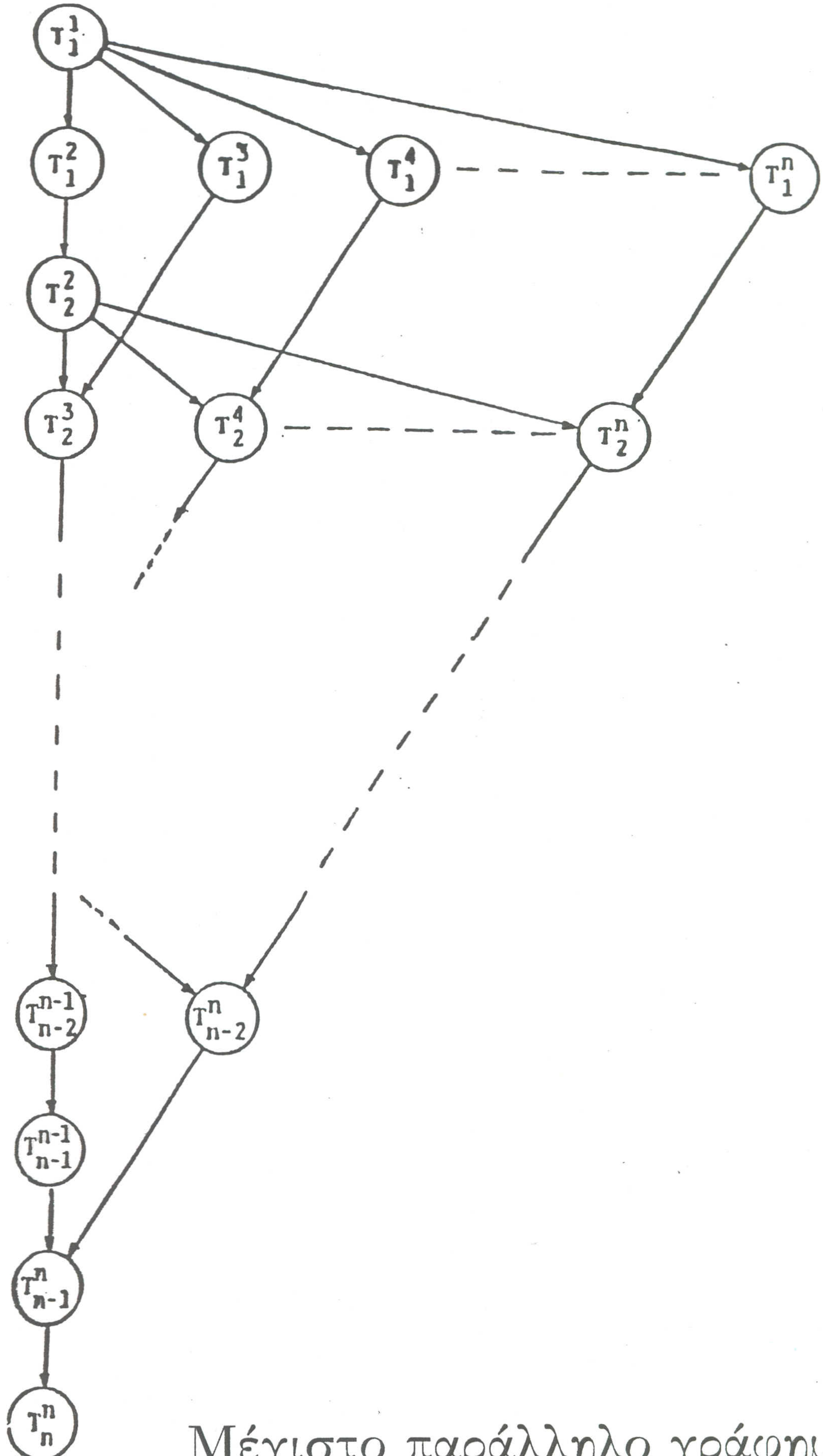
$\quad$ for $j := k + 1$ to $n + 1$ do

$\qquad$ mod(k,j).

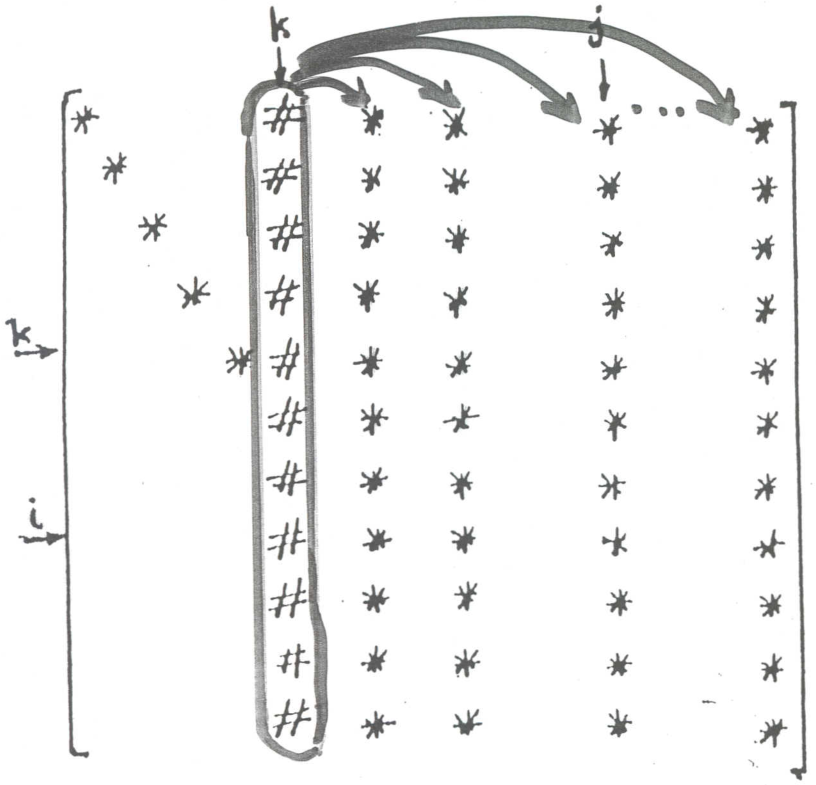
<u>Συμβολισμός</u>

T_{kk} : η διαδικασία piv(k)

T_{kj} : η διαδικασία mod(k, j)



Μέγιστο παράλληλο γράφημα της μορφής GJ-KJI



.ήμα 2.4. Η στήλη # στέλνει τα στοιχεία της σ'όλες τις στήλες του $n x (n-k+1)$ υποπίνακα του A_k.

Ο αλγόριθμος για τον κάθε επεξεργαστή είναι :

```
For  k := 1 to n do
     if  column k is one of my columns then
         piv(k)        (σειριακό τμήμα)
         send (column k)    (τμήμα επικοινωνίας)
         for all my columns j > k do
         mod(k,j)      (παράλληλο τμήμα)
else
     receive (column k)    (τμήμα επικοινωνίας)
     for  all my columns j > k do
          mod(k,j)     (παράλληλο τμήμα)
```

3.2 Καθορισμός και ισομερισμός έργου

<u>Μέθοδοι διανομής</u> των στοιχείων του πίνακα συντελεστών στους επεξεργαστές του υπερκύβου.

<u>Κύριοι στόχοι</u>

(I) ελάχιστη δυνατή επικοινωνία

(II) μέγιστος δυνατός παραλληλισμός

(III) ισομερισμός ομοιόμορφης εργασίας στους επεξεργαστές

<u>Διαθέσιμος αριθμός επεξεργαστών</u>

$$p \leq n$$

Αν $p \leq n$ τότε υπάρχουν διάφοροι τρόποι διανομής των n στηλών του πίνακα A στους p επεξεργαστές.

Μέθοδοι διανομής στηλών

(1) κατά ομάδες n/p στηλών (block mapping)

(2) με διάταξη (shuffle mapping)

Γενική μέθοδος

Η στήλη j δίνεται στον επεξεργαστή (j/blocksize) mod p,
όπου blocksize είναι ο αριθμός των συνεχών στηλών που δίνονται στον κάθε επεξεργαστή.

Ερώτημα : Ποιά από τις παραπάνω μεθόδους καθιστά αποδοτικότερο τον αλγόριθμο της μεθόδου GJ-KJI ;

Παρατήρηση : Στο k− βήμα του αλγορίθμου με την 1η μέθοδο οι επεξεργαστές που έχουν αναλάβει τις πρώτες ομάδες στηλών, εκτός εκείνου που έχει αναλάβει την k− στήλη, παραμένουν αδρανείς,

ενώ με την 2η μέθοδο όλοι οι επεξεργαστές είναι συνεχώς απασχολημένοι.

Απάντηση : Στη περίπτωση $p \ll n$ συμπεραίνεται ότι για πίνακες μεγάλης τάξης ο υπολογιστικός χρόνος υπερέχει του χρόνου επικοινωνίας και ο αλγόριθμος που χρησιμοποιεί την 2η μέθοδο είναι αποδοτικότερος.

3.4 Επικοινωνία επεξεργαστών

<u>Εκπομπή-μηνύματος (broadcasting)</u>

(O(p) βήματα επικοινωνίας)

Απαιτείται ολική επικοινωνία μεταξύ των $p-q$ επεξεργαστών, όπου $q = \lfloor j/m \rfloor \bmod p$ ο αριθμός των επεξεργαστών των οποίων οι στήλες έχουν εκτελεσθεί και m το μέγεθος μιας ομάδας στηλών (block-size).

<u>Τρόποι εκπομπής μηνύματος</u>

(α) αυτόματος τρόπος εκπομπής

(β) Δακτύλιος (Ring)

Η εκπομπή μηνύματος στον υπερκύβο μπορεί να γίνει μόνο σε O($\log_2$p) βήματα επικοινωνίας αν εμφυτευθεί ένα δενδροειδές δίκτυο στον υπερκύβο με ρίζα τον πηγαίο κόμβο εκπομπής.

Εκπομπή μηνύματος στον υπερκύβο
για τη μέθοδο KJI-GJ.

```
Βήμα            Επεξεργαστές

     |- - - - - - - - - - - - -|
1    O    O    O    O    O    O    O    O
     0    1    2    3    4    5    6    7

     |- - - - - - -|          |- - - - - - -|
2    O    O    O    O    O    O    O    O
     0    1    2    3    4    5    6    7

     |- - - -|  |- - - -|  |- - - -|  |- - - -|
3    O    O    O    O    O    O    O    O
     0    1    2    3    4    5    6    7
```

3.5 Αποτελέσματα

Επίλυση ενός αριθμού γραμμικών συστημάτων με ένα τυχαίο πίνακα συντελεστών εφαρμόζοντας την μέθοδο GJ-KJI στον υπολογιστή ncube10.

Τύπος επικοινωνίας : Δακτύλιος

Μέθοδοι διανομής στηλών

(1) ανά ομάδες συνεχών στηλών

(2) ανά στήλες με μια διάταξη

Διανομή με διάταξη και με επικοινωνία μέσω δακτυλίου, όταν $p = 8$ και $n = 24$.

Επεξεργαστές	$0 \longrightarrow$	$1 \longrightarrow$	$2 \longrightarrow$	$3 \longrightarrow$	$4 \longrightarrow$	$5 \longrightarrow$	$6 \longrightarrow$	7
Στήλες	0	1	2	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20	21	22	23

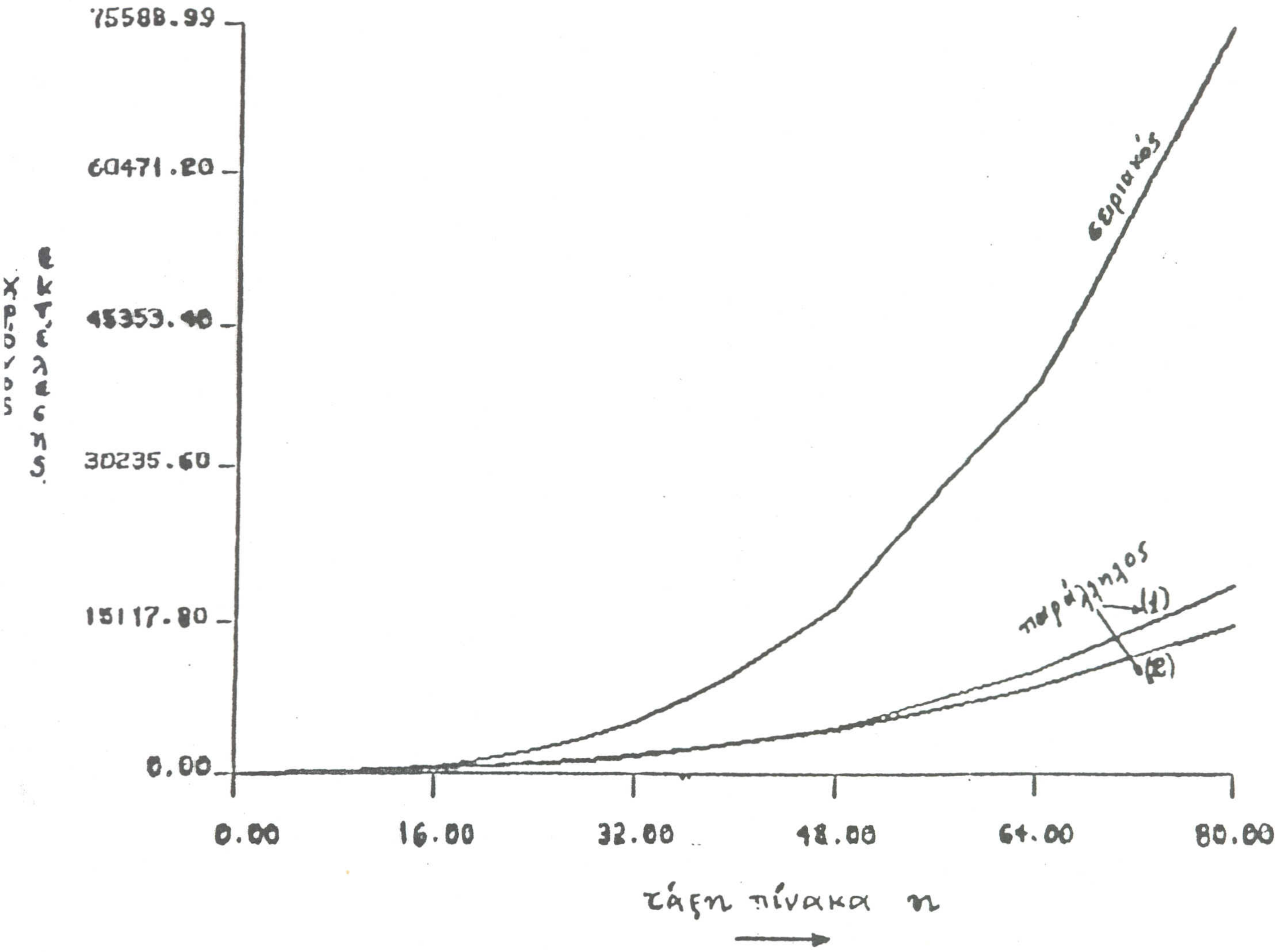
Χρόνοι εκτέλεσης του ακολουθιακού αλγορίθμου GJ και των δύο παραλλήλων παραλλαγών του συναρτήσει της τάξης n του πίνακα A

	Σειριακός	Παράλληλος					
n	p=1	p=4		p=8		p=16	
		(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
8	95	122	153	168	183	−−	−−
12	283	232	295	260	278	−−	−−
16	674	432	509	392	474	478	501
20	1293	736	799	599	675	634	615
24	2183	1158	1176	850	983	833	875
28	3435	1746	1669	1209	1305	1071	1173
32	5091	2499	2286	1639	1747	1329	1521
36	7145	3436	3032	2188	2219	1673	1823
40	9729	4598	3955	2828	2831	2086	2287
48	16707	xxx	xxx	4573	4273	3078	3364
64	38939	xxx	xxx	9991	8457	6123	6238
80	75589	xxx	xxx	18815	14809	10959	10383

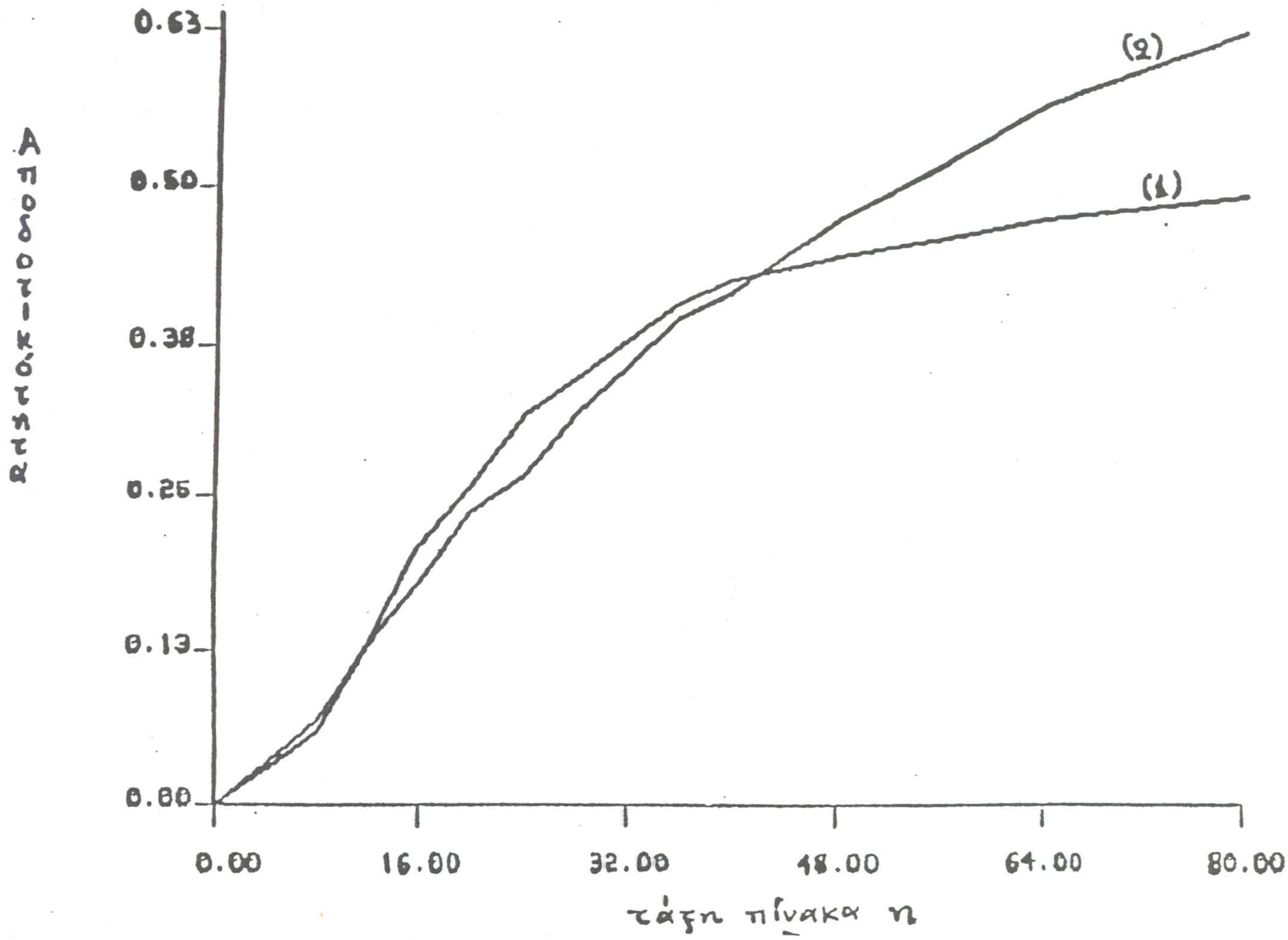
−− περίπτωση όπου $p > n$

xxx δέν μπορεί να υπολογισθεί με το διαθέσιμο υλικό.

3.6 Συμπεράσματα



Γραφικές παραστάσεις του χρόνου εκτέλεσης για τον ακολουθιακό αλγόριθμο και για τους δύο παράλληλους αλγορίθμους της μεθόδου GJ όταν p = 8.



Γραφικές παραστάσεις αποδοτικότητας, όταν χρησιμοποιούμε διανομή κατά ομάδες διαδοχικών στηλών (1) και διανομή κατά στήλες (2) με διάταξη και είναι διαθέσιμοι p = 8 επεξεργαστές.