ΑΣΚΗΣΗ

Να γίνει η μοντελοποίηση του παρακάτω προβλήματος:

Μία μικρή μονάδα παραγωγής υδραυλικών εξαρτημάτων κατασκευάζει δύο τύπους ασφαλιστικών βαλβίδων. Για το σκοπό αυτό αγοράζει μήτρες (καλούπια) από κάποιον εξωτερικό προμηθευτή και κατόπιν κατά σειρά τις κατεργάζεται, τις τρυπά και τις λειαίνει. Οι αντίστοιχοι ρυθμοί παραγωγής (εκφρασμένοι σε αριθμό βαλβίδων ανά ώρα)των τριών παραπάνω φάσεων παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα

Ρυθμοί παραγωγής βαλβίδων ανά φάση

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Βαλβίδα**  **Φάση Επεξεργασίας** | Τύπος Α | Τύπος Β |
| Κατεργασία | 30 | 40 |
| Τρύπημα | 28 | 35 |
| Λείανση | 30 | 25 |

Κάθε μήτρα για τις βαλβίδες τύπου Α κοστίζει €2, ενώ αυτή για τον τύπο Β κοστίζει €3. Οι έτοιμες βαλβίδες τύπου Α και Β πωλούνται €5 και €6 αντίστοιχα. Η χρήση των τριών βασικών μηχανών παραγωγής (τόρνος, τρυπάνικαιλειαντήρας) συνεπάγεται ένα τρέχον λειτουργικό κόστος, το οποίο ισούται με €20, €14 και €20 ανά ώρα απασχόλησης αντίστοιχα. Επίσης υποτίθεται ότι δεν υπάρχει πρόβλημα προώθησης στην αγορά οποιουδήποτε συνδυασμού βαλβίδων των δύο τύπων. Να συνταχθεί το κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο για τον προσδιορισμό του μίγματος παραγωγής, το οποίο μεγιστοποιεί το καθαρό κέρδος

**Λύση:**

Μεταβλητές απόφασης:

Οι αριθμοί βαλβίδων τύπου Α και Β που παράγονται ανά ώρα- x1, x2

Περιορισμοί:

Δεν υπάρχουν προφανείς περιορισμοί που να προέρχονται είτε από την παραγωγική διαδικασία είτε από τις δυναμικότητες των τριών φάσεων. Μοναδικός περιορισμός είναι ο χρόνος, ουσιαστικά οι ωριαίοι ρυθμοί παραγωγής των βαλβίδων.

Τόρνος (φάση 1):

Σε 1 ώρα παράγει 30 βαλβίδες Α ή 40 βαλβίδες Β ή η μία μονάδα τύπου Α παράγεται σε 1/30 της ώρας, ενώ η μία μονάδα τύπου Β στο 1/40 της ώρας.

Αραοι x1 μονάδες Α σε x1/30 ώρες και οι x2 μονάδες Β σε x2/40 ώρες.

Συνολικός απαιτούμενος χρόνος: x1/30 + x2/40

Ο χρονικός περιορισμός του τόρνου είναι: x1/30 + x2/40 <= 1 (ώρα)

Τρυπάνι (φάση 2):

σε 1 ώρα 28 βαλβίδες Α ή 35 βαλβίδες Β ή η μία μονάδα Α παράγεται σε 1/28 της ώρας και μία μονάδα Β στο 1/35.

Αραοι x1 μονάδες Α σε x1/28 και οι x2 μονάδες Β σε x2/35

Συνολικός χρόνος: x1/28 + x2/35

Ο χρονικός περιορισμός είναι: x1/28 + x2/35 <= 1 (ώρα)

Λειαντήρας (φάση 3):

σε 1 ώρα 30 βαλβίδες Α ή 25 βαλβίδες Β ή η μία μονάδα Α σε 1/30 της ώρας, ενώ η μία μονάδα Β στο 1/25

Οι x1 μονάδες σε x1/30 και οι x2 σε x2/25

Συνολικός χρόνος: x1/30 + x2/25

Ο περιορισμός που προκύπτει είναι: x1/30 + x2/25 <= 1 (ώρα)

x1 + x2 =>0

Κόστος κάθε βαλβίδας τύπου Α:

* Στον τόρνο, εφόσον σε 1 ώρα παράγονται 30 μονάδες και το ωριαίο κόστος λειτουργίας είναι 20 €, συνεπάγεται ότι το κόστος της κάθε μονάδας είναι 20/30 €
* Στο τρυπάνι (με το ίδιο σκεπτικό) προκύπτει ότι το κόστος είναι 14/28 €
* Στο λειαντήρα το κόστος παραγωγής της κάθε μονάδας είναι 20/30 €

Συνολικό κόστος παραγωγής μιας μονάδας τύπου Α: 20/30+14/28+20/30=11/6 €

Κόστος κάθε βαλβίδας τύπου Β:

Με την ίδια ανάλυση και αθροίζοντας τις επιμέρους δαπάνες στις 3 μηχανές προκύπτει ότι το συνολικό κόστος παραγωγής της κάθε μονάδας είναι:

20/30+14/28+20/30=11/6 € 20/40+14/35+20/25=17/10

Καθαρό κέρδος από την πώληση κάθε μονάδας

Κέρδος από την πώληση κάθε μονάδας τύπου Α:

5€ - (2 € + 11/6 €) = 7/6 €

Κέρδος από την πώληση κάθε μονάδας τύπου Β:

6€ - (3 € + 17/10 €) = 13/10 €

Συνολικό κέρδος παραγωγής ανά ώρα:

Κ=(7/6)\*x1 + (13/10)\*x2

Max K

ΑΣΚΗΣΗ

Να γίνει η μοντελοποίηση του παρακάτω προβλήματος:Μια βιομηχανία παραγωγής ζωοτροφών πρέπει να παραδώσει σε κάποιον πελάτη της μια ποσότητα ζωοτροφής με περιεκτικότητα τουλάχιστον 21% σε πρωτεΐνες και 5% σε λιπαρά. Το κόστος και η περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες και σε λιπαρά των χρησιμοποιούμενων από τη βιομηχανία πρώτων υλών παρουσιάζονται στον Πίνακα 1. Το ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους των πρώτων υλών για την παραγωγή ζωοτροφής με την επιθυμητή περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες και λιπαρά.

Πίνακας 1. *Κόστος και περιεκτικότητα σε θρεπτικά συστατικά τωνπρώτων υλών για τη σύνθεση ζωοτροφών*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Θρεπτικά συστατικά | Περιεκτικότητα (%) των πρώτων υλών σε  θρεπτικά συστατικά | | | | Ελάχιστη επιθυμητή περιεκτικότητα (%) |
| Κριθάρι | Βρόμη | Σησάμι | Καλαμποκάλευρο |
| Πρωτεΐνες | 12 | 11 | 41 | 52 | 21 |
| Λιπαρά | 2 | 5 | 11 | 1 | 5 |
| Κόστος πρώτων υλών ανά κιλό | 800 | 850 | 1200 | 1500 |  |

**Λύση:**

Μεταβλητές

Έστω  και , αντίστοιχα, η ποσότητα κριθαριού, βρόμης, σησαμιού και καλαμποκάλευρου που θα περιέχεται σε ένα κιλό ζωοτροφής που πληροί τις διατροφικές απαιτήσεις.

Αντικειμενική συνάρτηση

Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους 800+ 850+ 1200+ 1500 για την παραγωγή ενός κιλού ζωοτροφής.

Περιορισμοί

Το άθροισμα των ποσοτήτων  και  πρέπει να είναι ίσο με ένα κιλό, δηλαδή +++=1

Η ζωοτροφή πρέπει να έχει περιεκτικότητα τουλάχιστον 21% σε πρωτεΐνες και 5% σε λιπαρά. Δεδομένου ότι οι ποσότητες  και  περιέχονται σε ένα κιλό ζωοτροφής, θα πρέπει να ισχύει

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *(περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες)* | 12+ 11+ 41+ 52 | ≥ | 21 |  |
| *(περιεκτικότητα σε λιπαρά)* | 2+ 5+ 11+ | ≥ | 5 |  |

Επιπλέον, οι ποσότητες  και  πρέπει να είναι μη αρνητικές.

Επομένως, η σύνθεση η οποία ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος των πρώτων υλών, θα προκύψει από την επίλυση του μαθηματικού μοντέλου:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **να ελαχιστοποιηθεί η** | 800+ 850+ 1200+ 1500 |  |  | |
| **με τους**  **περιορισμούς** | + + + | = | 1 |  |
| 12+ 11+ 41+ 52 | ≥ | 21 |  |
| 2+ 5+ 11+ | ≥ | 5 |  |
| , | | ■ |  |