Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 1ης τάξης

Εισαγωγή

►Παράδειγμα:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -x \cdot y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = 1$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 5y\cos x = 0.$$

$$y''(x)\sin x + y'(x)\arccos x^2 = \sqrt{y(x)}$$ ◄

Συνήθως ο σκοπός μας είναι σε όλες αυτές τις περιπτώσεις είναι η εύρεση της συνάρτησης $y(x)$ που ικανοποιεί αυτές τις εξισώσεις.

Σε αντιδιαστολή η σχέση

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial x} = t$$

ορίζει μια μερική διαφορική εξίσωση για την συνάρτηση δύο μεταβλητών $y(t, x)$.

►Παράδειγμα: Ένα σώμα με μάζα m πέφτει από κάποιο ύψος με αρχική ταχύτητα v_0. Θεωρούμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο και τον συμβολίζουμε με t. Η ταχύτητα αλλάζει καθώς το σώμα πέφτει. Δηλαδή είναι συνάρτηση του χρόνου και τη συμβολίζουμε με $v = v(t)$.

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση. Αυτή είναι η πρώτη παράγωγος της ταχύτητας σε σχέση με το χρόνο, δηλαδή η $\frac{dv}{dt}$. Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα γνωρίζουμε ότι

$$m\frac{dv}{dt} = F.$$

Η δύναμη F δρα στο σώμα στην διεύθυνση της κίνησης. Είναι η συνισταμένη δύο δυνάμεων. Της βαρύτητας mg που έχει φορά προς τα κάτω και της αντίστασης του αέρα, $-kv$ που έχει φορά προς τα πάνω, δηλαδή αντίθετα από την ταχύτητα. Έτσι έχουμε τη διαφορική εξίσωση

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Με g την γνωστή επιτάχυνση της βαρύτητας ($g \approx 9.81\mu/\sec^2$), και μια φυσική σταθερά k που έχει να κάνει με τη μετωπική επιφάνεια του αντικειμένου και την αεροδυναμική μορφή που έχει το σχήμα του.

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση ικανοποιείται από άπειρες συναρτήσεις της μορφής

$$v(t) = Ae^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k},$$

με A μια σταθερά, η οποία στην περίπτωση που έχουμε αρχική ταχύτητα, δηλαδή

$$v(0) = A + \frac{mg}{k} = v_0,$$

προσδιορίζεται ως

$$A = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

Έτσι έχουμε μια τελική μορφή για την ταχύτητα του σώματος

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}.$$

Είναι ενδιαφέρον να διαπιστώσουμε ότι όταν δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα ($k = 0$), καταλήγουμε σε ένα γνωστό αποτέλεσμα

$$\lim_{k \to 0} v(t) = v_0 + gt .$$

Στην πραγματικότητα όμως στη γη υπάρχει αντίσταση του αέρα και τότε διαπιστώνουμε ότι

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = \frac{mg}{k} .$$

Δηλαδή κάποια στιγμή το σώμα αποκτά μια σταθερή τελική ταχύτητα η οποία είναι μικρότερη σε ελαφρά σώματα με μεγάλους αεροδυναμικούς συντελεστές. ◀

Ας δούμε τώρα πιο αυστηρά τι ακριβώς είναι μια διαφορική εξίσωση

Ορισμός: Μια **διαφορική εξίσωση** είναι μια εξίσωση που συνδέει μια ανεξάρτητη μεταβλητή x, μια άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ και τις παραγώγους τις $y', y'', \cdots, y^{(n)}$. Μια διαφορική εξίσωση σε γενική μορφή γράφεται

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

όπου η συνάρτηση $F: \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$. $\square$

Ορισμός: Τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η τάξη της υψηλότερης παραγώγου σε αυτή. $\square$

Στο παραπάνω παράδειγμα η πρώτη εξίσωση είναι διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, η δεύτερη είναι δεύτερης τάξης και η τρίτη είναι τέταρτης τάξης. Παρατηρείστε ότι η ύψωση σε τρίτη δύναμη στην δεύτερη εξίσωση δεν επηρεάζει την τάξη αφού αυτή εξαρτάται μόνο από τη δεύτερη παράγωγο που είναι η υψηλότερης τάξης παράγωγος που εμφανίζεται εκεί.

Στα παρακάτω οι εκφράσεις $y', y'', y^{(3)}, y^{(4)}, \cdots$ χρησιμο-ποιούνται για να παραστήσουν την πρώτη, δεύτερη, τρίτη, κ.λ.π. παράγωγο της συνάρτησης y σε σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή που συνήθως είναι η x. Σε παραγώγους υψηλής τάξης χρησιμοποιούμε παρενθέσεις για να αποφύγουμε τη σύγχυση με τις υψώσεις σε δύναμη.

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι μια συνάρτηση $y(x)$ η οποία την ικανοποιεί για κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x στο πεδίο ορισμού.

►**Παράδειγμα:** Δείξτε πως αν το c είναι αυθαίρετη σταθερά, τότε η συνάρτηση

$$y(x, c) = ce^{-\frac{x^2}{2}},$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' = -xy$.

Απάντηση: Πράγματι παραγωγίζοντας έχουμε

$$y' = -x \cdot ce^{-\frac{x^2}{2}} = -xy. ◄$$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις για παράδειγμα $y(x) = 2e^{-\frac{x^2}{2}}$ ή $y(x) = -1.35e^{-\frac{x^2}{2}}$ είναι από μόνες τους λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Η πλήρης λύση όμως περιγράφεται από την μονοπαραμετρική οικογένεια $y(x,c) = ce^{-\frac{x^2}{2}}$.

Ορισμός: Η διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης γράφεται σε έμμεση μορφή ως

$$F(x,y,y') = 0,$$

όπου F είναι μια συνάρτηση $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. □

Αν αυτή η εξίσωση μπορεί να λυθεί ως προς y', τότε μπορεί να γραφεί στη λεγόμενη **λυμένη μορφή**

$$y' = f(x,y). \tag{1}$$

►**Παράδειγμα:** Η διαφορική εξίσωση

$$F(x,y,y') = y'x - 2x^2 - y = 0,$$

μπορεί να γραφεί σε λυμένη μορφή

$$y' = \frac{y}{x} + 2x = f(x,y).$$ ◄

Τη μοναδικότητα της λύσης μας την εξασφαλίζει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα: Έστω συνάρτηση $f(x,y)$ η οποία είναι συνεχής και φραγμένη εντός ενός χωρίου s που περιέχει σημείο (x_0, y_0). Επίσης έστω ότι για τη συνάρτηση $f(x,y)$ ισχύει η **συνθήκη Lipschitz**

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \le L(y - \tilde{y}),$$

για κάθε δύο σημεία (x,y) και $(x,\tilde{y})$ στο D.

Τότε υπάρχει ένα διάστημα D έτσι ώστε

$$D: |x - x_0| < h,\ \ h > 0,$$

στο οποίο υπάρχει μια και μόνο συνεχής συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο D, η οποία ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$y' = f(x, y)$$

και τις αρχικές συνθήκες:

$$y(x_0) = y_0.\square$$

Πιο απλά, αλλά με αυστηρότερη συνθήκη, έχουμε:

Θεώρημα: Αν στη διαφορική εξίσωση

$$y' = f(x, y)$$

η συνάρτηση $f(x, y)$ και η μερική της παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial y}$, είναι συνεχείς εντός ενός χωρίου s που περιέχει σημείο (x_0, y_0), τότε υπάρχει μια μόνο λύση $y = y(x)$ που ικανοποιεί την σχέση (αρχικές συνθήκες):

$$y(x_0) = y_0.\square$$

Επεξηγώντας γεωμετρικά το θεώρημα σημαίνει ότι υπάρχει μια μόνο συνάρτηση $f(x, y)$ της οποίας το γράφημα περνά από το σημείο (x_0, y_0).

Από το θεώρημα αυτό γίνεται επίσης αντιληπτό ότι η διαφορική εξίσωση (1) έχει άπειρες λύσεις δεδομένου ότι το χωρίο s έχει άπειρα σημεία.

Ορισμός: **Πρόβλημα Αρχικών Τιμών** είναι μια διαφορική εξίσωση σε συνδυασμό με αρχικές συνθήκες. □

►**Παράδειγμα:** Το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = -xy,\ \ y(0) = 1,$$

έχει ως λύση την συνάρτηση

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}. \blacktriangleleft$$

Παρατηρούμε πως σε αντιδιαστολή με το παραπάνω παράδειγμα, εδώ έχουμε ως λύση μια συγκεκριμένη συνάρτηση και όχι παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων.

Ορισμός: Η **Γενική Λύση** μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι η συνάρτηση

$$y = y(x, c),$$

η οποία είναι παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων και ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

i. Ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση για οποιαδήποτε τιμή λάβει η παράμετρος c.

ii. Για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$ μπορούμε να βρούμε μια τιμή της παραμέτρου c_0 έτσι ώστε η συνάρτηση $y = y(x, c_0)$ να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη. □

Πολλές φορές στην αναζήτηση της γενικής λύσης δεν είναι δυνατό να βρούμε άμεση σχέση της μορφής $y = y(x, c)$, αλλά έχουμε τη δυνατότητα να περιγράψουμε τη λύση με μια αλγεβρική εξίσωση. Δηλαδή καταλήγουμε σε μια μορφή

$$\Psi(x, y, c) = 0,$$

με $\Psi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, η οποία δεν επιλύεται εύκολα ως προς y.

Όταν η λύση δίνεται στην έμμεση μορφή $\Psi(x, y, c) = 0$, τότε λέγεται **γενικό ολοκλήρωμα** της λύσης.

►**Παράδειγμα:** Η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'y = x,$$

δίνεται ως

$$x^2 - y^2 = c.$$

Πράγματι παραγωγίζοντας την παραπάνω έχουμε

$$2x - 2yy' = 0,$$

από την οποία προκύπτει η δοσμένη διαφορική εξίσωση. ◄

Ορισμός: **Μερική Λύση** μια διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι οποιαδήποτε συνάρτηση

$$y = y(x, c_0)$$

προκύπτει από τη γενική λύση θέτοντας $c = c_0$ όπου $c_0 \in \mathbb{R}$μια συγκεκριμένη τιμή. □

►**Παράδειγμα:** Η διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$y' = -xy,$$

έχει ως γενική λύση την μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

$$y(x, c) = ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Θέτουμε την αρχική συνθήκη $y(0) = 1$. Τότε από την γενική λύση έχουμε

$$1 = ce^0 = c.$$

Συνεπώς η συνάρτηση $y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ είναι η μερική λύση που ικανοποιεί τις δοσμένες αρχικές συνθήκες. ◄

Η γενική λύση, όπως τουλάχιστον φαίνεται από το όνομά της, θα έπρεπε να περιέχει όλες τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης.

Δηλαδή θα πρέπει να προκύπτουν όλες οι μερικές λύσεις δίνοντας κατάλληλες τιμές στην παράμετρο c. Δυστυχώς όμως, υπάρχουν διαφορικές εξισώσεις οι οποίες έχουν λύσεις που δεν περιγράφονται από τη "γενική λύση"

► **Παράδειγμα:** Η διαφορική εξίσωση

$$y = xy' + (y')^2$$

έχει γενική λύση την

$$y(x) = cx + c^2,$$

η οποία δεν μπορεί να περιγράψει και την ειδική λύση

$$y = -\frac{x^2}{4}.$$ ◄

Ορισμός 1.7: Αν υπάρχει λύση της διαφορικής εξίσωσης που δεν προκύπτει από τη γενική τότε λέγεται **ιδιάζουσα** λύση. □

Επίσης, δεν είναι σίγουρο ότι μια διαφορική εξίσωση μπορεί να έχει λύση. Για παράδειγμα η διαφορική εξίσωση

$$(y')^4 + y^2 = -1$$

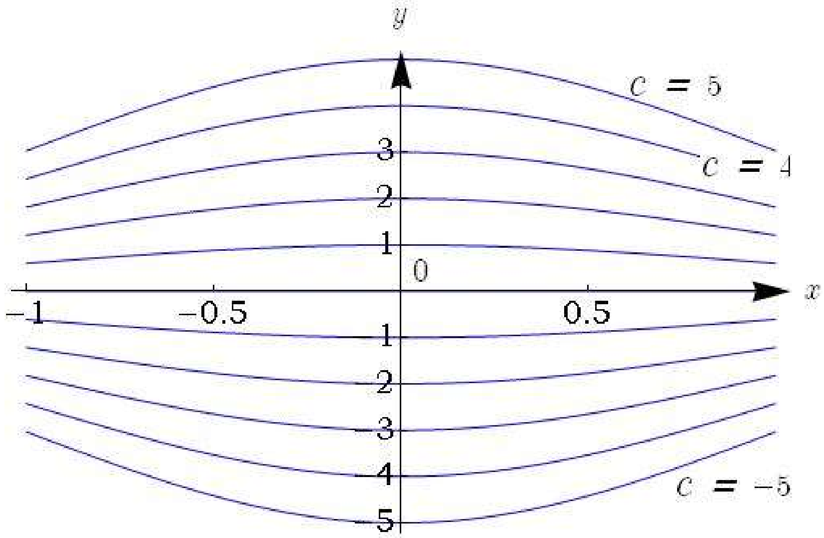
είναι φανερό ότι δεν μπορεί να ικανοποιείται αφού στο αριστερό μέλος της εξίσωσης έχουμε πάντα έναν μη αρνητικό αριθμό.

Από γεωμετρική σκοπιά, η γενική λύση είναι μια οικογένεια καμπυλών η οποία εξαρτάται από την παράμετρο c. Αυτές οι καμπύλες λέγονται **ισοκλινείς**. Κάθε μερική λύση αντιστοιχεί σε μια ισοκλινή η οποία περνά από κάποιο δεδομένο σημείο στο επίπεδο.

Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα, το γενικό ολοκλήρωμα απεικονίζεται από την οικογένεια καμπυλών

$$y = ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

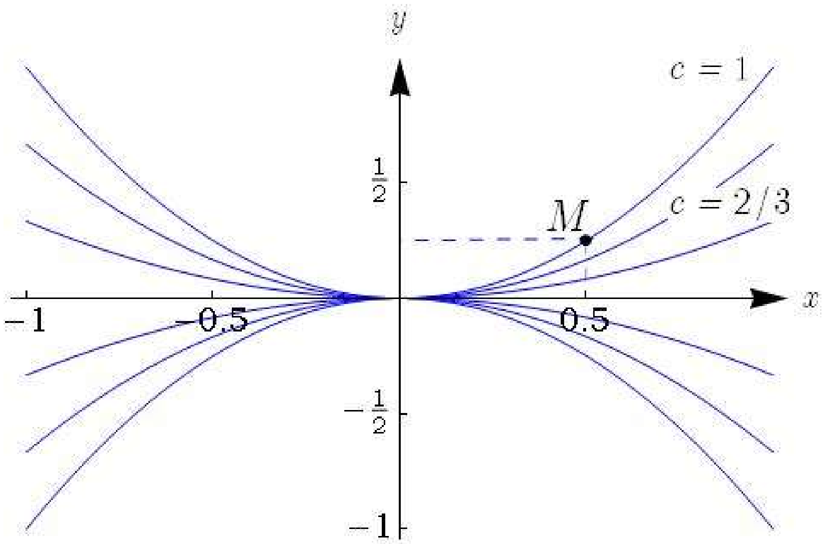
ενώ οι μερικές λύσεις βρίσκονται για διάφορες τιμές του c. Στο παρακάτω σχήμα – 1 βλέπουμε τις καμπύλες που αντιστοιχούν για μερικές από τις τιμές της παραμέτρου. Ειδικότερα όμως για $c = -5, c = -4, \cdots, c = 4, c = 5$.



Σχήμα – 1.

►**Παράδειγμα:** Η διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης $y' = \frac{2y}{x}$, έχει ως γενική λύση την μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων $y(x,c) = cx^2$.

Οι σχετικές ισοκλινείς φαίνονται στο σχήμα – 2. Παρατηρούμε ότι από το σημείο $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ περνάει μια μόνο ισοκλινής η οποία αντιστοιχεί στην περίπτωση $c = 1$.



Σχήμα – 2.

Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζουμε τις απλούστερες αλλά και τις σημαντικότερες κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

Χωριζομένων Μεταβλητών

Ας θεωρήσουμε μια διαφορική εξίσωση της μορφής $y' = f(x,y)$ στην οποία το δεξί μέλος μπορεί να γραφτεί σαν λόγος δύο άλλων συναρτήσεων $M(x,y)$ και $N(x,y)$. Τότε η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} \tag{2}$$

Αν $M(x,y) = M(x)$, δηλαδή συνάρτηση αποκλειστικά του x, και $N(x,y) = N(y)$, δηλαδή συνάρτηση αποκλειστικά του y, τότε η (2) γίνεται

$$N(y)dy = M(x)dx.$$

Λύνοντας έχουμε

$$\int M(y)dy = \int N(x)dx + c$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

Αν

$$M(x,y) = M_1(x)N_1(y) \text{ και } N(x,y) = M_2(x)N_2(y)$$

τότε η (2) γίνεται:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} = \frac{M_1(x)N_1(y)}{M_2(x)N_2(y)}$$

Οπότε

$$M_2(x)N_2(y)dy = M_1(x)N_1(y)dx$$

Διαιρούμε αμφότερα τα μέλη με το γινόμενο $M_2(x)N_1(y)$, οπότε:

$$\frac{M_2(x)N_2(y)}{M_2(x)N_1(y)}dy = \frac{M_1(x)N_1(y)}{M_2(x)N_1(y)}dx$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx$$

και λύνοντας έχουμε:

$$\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = \int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + c$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

►**Παράδειγμα 2.1:** Η διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης $y' = -\frac{x}{y}$, γράφεται και ως

$$ydy + xdx = 0.$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\int ydy + \int xdx = c_0,$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c_0.$$

Αφού το αριστερό μέλος είναι μη αρνητικό το ίδιο είναι και το δεξί μέλος. Θέτουμε $2c_0 = c$ και η γενική λύση (δηλαδή η μονο-παραμετρική οικογένεια λύσεων) γράφεται

$$x^2 + y^2 = c.$$

Αυτή είναι η εξίσωση ομόκεντρων κύκλων με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα c.

► **Άσκηση** Λύστε την παρακάτω διαφορική εξίσωση

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{y}$

Λύση:

Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή

$$ydy = (x^2 + 1)dx$$

και οι μεταβλητές χωρίζονται, οπότε έχουμε

$$\int ydy = \int (x^2 + 1)dx$$

και

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{3}x^3 + x + c \;◄$$

Ομογενείς

Μια συνάρτηση $f(x,y)$ είναι ομογενής όταν

$$f(kx,ky) = k^n f(x,y)$$

για κάθε πραγματικό αριθμό k. Αν $n = 0$τότε η συνάρτηση είναι ομογενής μηδενικού βαθμού.

►**Παράδειγμα:** Η συνάρτηση

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2y$$

είναι ομογενής διότι

$$\begin{aligned} f(kx,ky) &= (kx)^3 + (ky)^3 - 2(kx^2)ky \\ &= k^3(x^3 + y^3 - 2x^2y) = k^3 f(x,y).◄ \end{aligned}$$

►**Παράδειγμα:** Η συνάρτηση

$$f(x,y) = xy - y^2$$

είναι ομογενής δεύτερου βαθμού διότι

$$\begin{aligned} f(kx,ky) &= (kx)(ky) - (ky)^2 = \\ &= k^2(xy - y^2) = k^2 f(x,y).◄ \end{aligned}$$

Ορισμός: Μια διαφορική εξίσωση στη λυμένη μορφή

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

λέγεται **ομογενής**, εάν η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι ομογενής μηδενικού βαθμού. □

Για να λύσουμε μια ομογενή διαφορική εξίσωση χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό

$$y = vx$$

και την αντίστοιχη παράγωγο που προκύπτει από τον κανόνα για την παράγωγο γινομένου

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx},$$

όπου το v είναι συνάρτηση $v(x)$. Η τεχνική αυτή εφαρμόστηκε για πρώτη φορά από τον G. W. Leibniz (1646 – 1716) το 1691.

Τότε η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$v + x\frac{dv}{dx} = f(x, vx).$$

Όμως η f είναι ομογενής μηδενικού βαθμού και ισχύει

$$f(x, vx) = x^0 f(1, v).$$

Συνεπώς έχουμς την παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$v + x\frac{dv}{dx} = f(1, v),$$

στην οποία το $f(1, v)$είναι συνάρτηση μόνο του v.

Τώρα οι μεταβλητές χωρίζονται και καταλήγουμε στο

$$\frac{dv}{f(1,v)-v} = \frac{dx}{x}.$$

Ολοκληρώνουμε και έχουμε

$$\int \frac{dv}{f(1,v)-v} = \int \frac{dx}{x} + c.$$

Τέλος, αντικαθιστούμε το v με το $\frac{y}{x}$ και λαμβάνυμε τη γενική λύση.

► **Άσκηση:** Λύστε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

α) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$, β) $y' = \frac{4xy+y^2}{4x^2}$

Λύση:

α) Παρατηρούμε ότι πρόκειται για ομογενή διαφορική εξίσωση. Πράγματι

$$f(kx, ky) = \frac{kx+ky}{kx} = k^0 \cdot \frac{x+y}{x}.$$

Λαμβάνουμε $y = vx$ και

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

οπότε η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{xv+x}{x} \text{ ή}$$

$$x\frac{dv}{dx} = 1 \text{ ή } \frac{1}{x}dx = dv.$$

Η τελευταία είναι με χωρισμένες τις μεταβλητές. Η λύση της είναι

$$\int \frac{dx}{x} = \int dv \text{ ή } \ln|x| = v + c$$

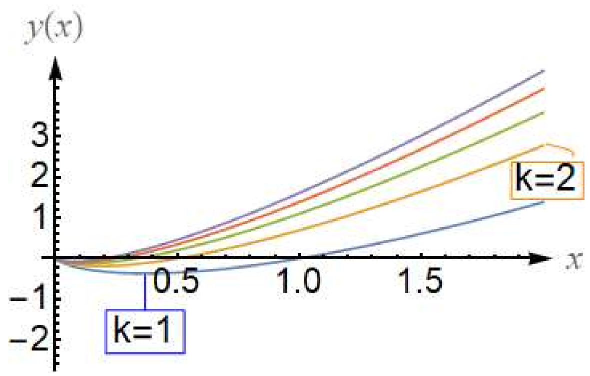
και αν θέσουμε $c = \ln|t|$ και σημειωθεί ότι

$$\ln|x| + \ln|t| = \ln|tx|,$$

τότε έχουμε $v = \ln|tx|$. Τελικά, αντικαθιστώντας το $y = vx$ λαμβάνουμε τη λύση η οποία είναι

$$y = x\ln|kx|.$$

λύσης.



Στο σχήμα δίνουμε διάφορες ισοκλινείς της β) Γράφουμε την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Θέτουμε πάλι $y = vx$ και

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

οπότε

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \frac{1}{4}v^2 \qquad \text{ή} \qquad x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{4}v^2 \ \text{ή}\ \frac{4d}{v^2} = \frac{dx}{x}.$$

Ολοκληρώνουμε και έχουμε

$$\int\frac{4dv}{v^2} = \int\frac{dx}{x} \ \text{ή}\ -\frac{4}{v} = \ln x + c \ \text{και}\ -\frac{4x}{y} = \ln x + c,$$

και τελικά

$$\boxed{y = -\frac{4x}{\ln x + c}}.$$

Αναγόμενες σε ομογενείς

Διαφορικές εξισώσεις που έχουν τη μορφή

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1}{\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2} \tag{3}$$

μπορεί να αναχθούν σε ομογενείς με κατάλληλους μετασχηματισμούς.

Αν $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ τότε η (3) είναι ομογενής και επιλύεται σύμφωνα με τα λεγόμενα στην παράγραφο 3. Αν όμως κάποιο από τα γ_1, γ_2 είναι διάφορο από το μηδέν τότε κάνουμε τους μετασχηματισμούς

$$x = x_1 + h,\ \ y = y_1 + k.$$

Τότε έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dy_2}.$$

Από τις παραπάνω έχουμε

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\alpha_1 x_1+\beta_1 y_1+\alpha_1 h+\beta_1 k+\gamma_1}{\alpha_2 x+\beta_2 y+\alpha_2 h+\beta_2 k+\gamma_2}. \tag{4}$$

Επιλέγουμε h, k έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι

$$\begin{aligned} \alpha_1 h + \beta_1 k + \gamma_1 &= 0 \\ \alpha_2 h + \beta_2 k + \gamma_2 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Έτσι η (4) γίνεται ομογενής

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\alpha_1 x_1+\beta_1 y_1}{\alpha_2 x+\beta_2 y},$$

και λύνεται σύμφωνα με όσα λέχθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο.

Το σύστημα (5) δεν έχει λύση όταν

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0,$$

δηλαδή όταν $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$. Όμως αν ισχύει

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \mu,$$

τότε η (3) μπορεί να γραφεί

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu(\alpha_2 x+\beta_2 y)+\gamma_1}{\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2}, \tag{6}$$

και με το μετασχηματισμό

$$z = \alpha_2 x + \beta_2 y$$

να μετατραπεί σε χωριζομένων μεταβλητών. Πράγματι

$$\frac{dz}{dx} = \alpha_2 + \beta_2 \frac{dy}{dx}, \quad \text{και} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\beta_2}\frac{dz}{dx} - \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

Έτσι η (6) γίνεται

$$\frac{1}{\beta_2}\frac{dz}{dx} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\mu z + \gamma_1}{z + \gamma_2}$$

στην οποία όντως οι μεταβλητές χωρίζονται.

Η ίδια τεχνική για την ολοκλήρωση της (3) μπορεί να εφαρμοστεί για την ολοκλήρωση εξισώσεων της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1}{\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2}\right),$$

όπου g μια οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση.

►**Άσκηση:** Λύστε την διαφορική εξίσωση

$$y' = (x+y)^2 - 1.$$

Λύση:

Η δοσμένη διαφορική εξίσωση έχει τη μορφή

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1\cdot x+1\cdot y+0}{0\cdot x+0\cdot y+1}\right)^2 - 1.$$

Θέτουμε μόνο $u = x + y$ και έχουμε

$$u' - 1 = \left(x + (u - x)\right)^2 - 1 \text{ ή } u' = u^2 \text{ ή } \frac{du}{u^2} = dx.$$

Ολοκληρώνουμε και λαμβάνουμε $-\frac{1}{u} = x + c$.

Αντικαθιστάμε και έχουμε τη γενική λύση

$$-\frac{1}{x+y} = x + c \quad \text{ή} \quad y = -\frac{1+cx+x^2}{c+x}$$

◄

Πλήρεις

Μια διαφορική εξίσωση

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{7}$$

λέγεται ακριβής ή πλήρης αν το αριστερό μέρος της είναι ολικό διαφορικό κάποιας συνάρτησης $f(x,y)$, δηλαδή

$$df(x,y) = f_x dx + f_y dy$$
$$= P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{8}$$

Η εξίσωση (7) αναπαριστά μια πλήρη διαφορική εξίσωση όταν

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{9}$$

Στο παράδειγμα δίνεται μια υπόδειξη για το πώς αντιμετωπίζουμε την περίπτωση αυτή.

►**Παράδειγμα:** Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Απάντηση:

Έχουμε

$$P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2,$$
$$Q(x,y) = 6x^2y + 4y^3,$$

και υπολογίζουμε πως

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy.$$

Άρα η διαφορική εξίσωση είναι πλήρης. Λαμβάνοντας υπόψη την (8) έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2$$

$$f(x,y) = \int (3x^2 + 6xy^2)\, dx + \rho(y) =$$
$$= x^3 + 3x^2y^2 + \rho(y).$$

Διαφορίζουμε ως προς y και λαμβάνοντας πάλι υπόψη την (8) παίρνουμε

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 6x^2y + \rho'(y)$$
$$= Q(x,y) = 6x^2y + 4y^3.$$

Δηλαδή

$$\rho'(y) = 4y^3$$

και

$$\rho(y) = y^4 + c.$$

Άρα

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + c$$

Και η γενική λύση είναι

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c. \blacktriangleleft$$

Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις πρώτης τάξης

Ορισμός: Μια διαφορική εξίσωση 1ης τάξης λέγεται γραμμική όταν είναι πρώτου βαθμού ως προς την προσδιοριστέα συνάρτηση και τις παραγώγους της. □

Η γενική μορφή της είναι

$$\frac{dy}{dx} + A(x)y = B(x)$$

Όπου $A(x)$ και $B(x)$ είναι δοσμένες συνεχείς συναρτήσεις του x.

Για να λύσουμε αυτές τις διαφορικές εξισώσεις τις μετασχηματίζουμε σε ακριβείς χρησιμοποιώντας τους λεγόμενους *ολοκληρωτικούς παράγοντες*. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, αυτοί είναι συναρτήσεις του x και τους οποίους πολλαπλασιάζουμε με τα μέλη της εξίσωσης. Εδώ παίρνουμε ως ολοκληρωτικό παράγοντα τον

$$\mu(x) = e^{\int A(x)dx},$$

που έχει παράγωγο

$$\mu'(x) = \left(\int A(x)\,dx\right)' e^{\int A(x)dx}$$
$$= A(x)e^{\int A(x)dx} = A(x)\mu(x).$$

Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της διαφορικής εξίσωσης έχουμε

$$\mu\frac{dy}{dx} + \mu A(x)y = \mu B(x).$$

Λαμβάνοντας υπόψη την παράγωγο του ολοκληρωτικού παράγοντα έχουμε

$$\mu y' + \mu' y = \mu B(x) \;\text{ ή }\; (\mu y)' = \mu B(x)$$

$$\frac{d(\mu y)}{dx} = \mu B(x) \text{ ή } d(\mu y) = \mu B(x)dx$$

και

$$\int d(\mu y) = \int \mu B(x)dx \text{ ή } \mu y = \int \mu B(x)dx + c \text{ ή } y = \frac{1}{\mu}\int \mu B(x)dx + c.$$

Η γενική λύση είναι επομένως

$$y(x) = e^{-\int A(x)dx} \cdot \left(c + \int B(x)e^{\int A(x)dx}dx\right) \qquad (10)$$

►**Άσκηση:** Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$y' + y = x^2,$$

Λύση:

α) Παρατηρούμε ότι πρόκειται για γραμμική διαφορική εξίσωση. Την λύνουμε εφαρμόζοντας απευθείας τον τύπο (10). Πράγματι για

$$A(x) = 1 \text{ και } B(x) = x^2$$

έχουμε

$$y(x) = e^{-\int dx} \cdot \left(c + \int x^2 e^{\int dx}\, dx\right)$$

$$y(x) = e^{-x} \cdot \left(c + \int x^2 e^x\, dx\right) \text{ ή } y(x) = e^{-x} \cdot \left(c + e^x(x^2 - 2x + 2)\right),$$

και

$$y(x) = 2 + ce^{-x} - 2x + x^2.$$

►**Παράδειγμα:** Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3.$$

Απάντηση:

Πρόκειται για γραμμική διαφορική εξίσωση με

$$A(x) = -\frac{2}{x+1} \text{ και } B(x) = (x+1)^3.$$

Άρα εφαρμόζοντας τον τύπο (1) έχουμε

$$y(x) = e^{-\int -\frac{2}{x+1}dx} \cdot \left(c + \int (x+1)^3 e^{\int -\frac{2}{x+1}dx}\, dx\right).$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$y(x) = e^{2\ln(1+x)}\left(c + (x+1)^3 e^{-2\ln(1+x)}\right),$$

$$y(x) = (1+x)^2(c + \int (1+x)dx),$$

$$y(x) = (1+x)^2\left(c + x + \frac{x^2}{2}\right).$$

Για όποιο ζεύγος τιμών (x_0, y_0) επιλέξουμε ως αρχικές συνθήκες τότε μπορεί να βρεθεί τιμή για την παράμετρο c που να ικανοποιεί τη γενική λύση που βρήκαμε. Εξαιρείται η περίπτωση $x_0 = -1$ διότι τότε αναγκαστικά $y_0 = 0$. Δεν είναι για παράδειγμα δυνατό να απαιτήσουμε $y(-1) = 1$. Η συμπεριφορά αυτή εξηγείται από το γεγονός ότι η συνάρτηση $A(x)$ δεν είναι συνεχής για $x_0 = -1$, οπότε δεν ισχύουν οι συνθήκες για την ύπαρξη λύσης.

Διαφορικές Εξισώσεις Bernoulli

Μια διαφορική εξίσωση που έχει τη μορφή

$$y' + A(x)y = B(x)y^n \tag{11}$$

όπου $A(x)$ και $B(x)$ συνεχείς, ονομάζεται Bernoulli.

Συνήθως υποθέτουμε ότι $n \neq 0$ και $n \neq 1$ διότι διαφορετικά έχουμε τις απλούστερες μορφές της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης και της διαφορικής εξίσωσης των χωριζομένων μεταβλητών αντίστοιχα. Ο σκοπός εδώ είναι να μετασχηματισθεί η εξίσωση σε γραμμική. Αυτό το πετυχαίνουμε με το μετασχηματισμό

$$\mu = y^{1-n}$$

από όπου παραγωγίζοντας έχουμε

$$\frac{d\mu}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

και

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{d\mu}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx} \tag{12}$$

Η (11) γίνεται

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + A(x)y^{1-n} = B(x)$$

και αντικαθιστώντας την (12) παίρνουμε

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{d\mu}{dx} + \mu A(x) = B(x)$$

ή

$$\frac{d\mu}{dx} + (1-n)\mu A(x) = (1-n)B(x).$$

Η τελευταία είναι γραμμική 1ης τάξης με άγνωστη συνάρτηση την $\mu(x)$. Την λύνουμε και αντικαθιστούμε στην $\mu = y^{1-n}$ για να βρούμε την $y(x)$.

►**Άσκηση:** Λύστε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

α) $y' = y + xy^6$ β) $y' + x^2y - x^5y^2 = 0$

Λύση:

α) Γράφουμε την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} - y = xy^6 \quad \text{ή} \quad y^{-6}\frac{dy}{dx} - y^{-5} = x$$

Θέτουμε $\mu = y^{1-6} = y^{-5}$ και

$$\frac{d\mu}{dx} = -5y^{-6}\frac{dy}{dx} \quad \text{ή} \quad -\frac{1}{5}\frac{d\mu}{dx} = y^{-6}\frac{dy}{dx}$$

και η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$-\frac{1}{5}\frac{d\mu}{dx} - \mu = x \quad \text{ή} \quad \frac{d\mu}{dx} + 5\mu = -5x.$$

Αυτή είναι γραμμική με

$$A(x) = 5,\ B(x) = -5x.$$

Χρησιμοποιούμε τον σχετικό τύπο (10) για τις γραμμικές εξισώσεις από την παράγραφο 6 και έχουμε

$$\mu(x) = e^{-\int 5dx} \cdot \left(c - 5\int xe^{\int 5dx}dx\right) \text{ ή } \mu(x) = e^{-5x} \cdot \left(c - 5\int xe^{5x}dx\right)$$

$$\mu(x) = e^{-5x} \cdot \left(c - 5e^{5x}\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{25}\right)\right)$$

$$\mu(x) = y^{-5} = \frac{1}{5} - x + ce^{-5x}.$$

β) Γράφουμε την εξίσωση κατά τα γνωστά

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + x^2y^{-1} = x^5$$

Θέτουμε

$$\mu = y^{-1} \text{ και } y^{-2}\frac{dy}{dx} = -\frac{d\mu}{dx}$$

οπότε η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$\frac{d\mu}{dx} - x^2\mu = -x^5.$$

Αυτή είναι γραμμική με

$$A(x) = -x^2,\ B(x) = -x^5.$$

Χρησιμοποιούμε τον σχετικό τύπο (10) για τις γραμμικές εξισώσεις από την παράγραφο 6 και έχουμε

$$\mu(x) = e^{\int x^2 dx} \cdot \left(c + \int -x^5 e^{-\int x^2 dx} dx\right) \text{ ή } \mu(x) = e^{\frac{x^3}{3}} \cdot \left(c - \int x^5 e^{-\frac{x^3}{3}} dx\right)$$

$$\mu(x) = e^{\frac{x^3}{3}} \cdot \left(c + x^3 e^{-\frac{x^3}{3}} - 3e^{-\frac{x^3}{3}}\right)$$

$$\mu = y^{-1} = ce^{\frac{x^3}{3}} + x^3 + 3$$

◄

Διαφορική Εξίσωση Clairaut

Μια διαφορική εξίσωση που έχει τη μορφή

$$y = y'x + f(y') \tag{13}$$

όπου $f(y')$ συνάρτηση του y', ονομάζεται Clairaut. Αρκεί η $f(y')$ να μην είναι πρωτοβάθμιο πολυώνυμο διότι τότε οι μεταβλητές στην (13) χωρίζονται. Μελετήθηκε από τον Clairaut το 1734. Κίνητρό του ήταν η μελέτη της κίνησης μιας ορθογώνιας σφήνας όπως φαίνεται στο σχήμα – 4 το οποίο αναπαράγεται από την πρωτότυπη εργασία του Clairaut.

Μια φανερή λύση της (13) είναι

$$y(x) = cx + f(c).$$

Πράγματι, αν αντικαταστήσουμε την παραπάνω στην (13) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $y' = c$ έχουμε την επαλήθευση

$$cx + f(c) = cx + f(c).$$

Όμως η εξίσωση Clairaut εκτός από την μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών δέχεται και μια *μερική* ***ιδιάζουσα*** *λύση*. Αυτή προκύπτει από την λύση του συστήματος

$$y - cx - f(c) = 0$$
$$x + \frac{df}{dc} = 0.$$

►**Άσκηση:** Λύστε τη διαφορική εξίσωση $y = y'x + (y')^2$.

Λύση:

Πρόκειται για διαφορική εξίσωση Clairaut με

$$f(y') = (y')^2.$$

Άρα η μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων είναι

$$y = cx + c^2.$$

Η ιδιάζουσα λύση παράγεται από την λύση του συστήματος

$$y - cx - c^2 = 0, \quad x + 2c = 0,$$

αφού $f(c) = c^2$ και $f'(c) = 2c$.

Λύνοντας την δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε $c=-x/2$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη λαμβάνουμε

$$y = -\frac{x^2}{4},$$

δηλαδή μια ιδιάζουσα λύση αφού δεν είναι ευθεία. ◄

Διαφορική Εξίσωση Riccati

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$y' + a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 = 0,$$

λέγεται διαφορική εξίσωση Riccati. Μελετήθηκε αρχικά από τον J. Riccati (1676 – 1754) το 1723 για την περίπτωση που $a_0, a_1 = 0, a_2 = bx^m$.

Για να λυθεί απαιτείται η γνώση μιας μερικής λύσης, έστω y_1. Θέτουμε

$$y = y_1 + z$$

οπότε η εξίσωση γίνεται

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} + a_2\left(y_1^2 + 2y_1z + z^2\right) + a_1\left(y_1 + z\right) + a_0 = 0$$

και αφού $y = y_1$ είναι μια λύση, τότε εκπίπτει στην

$$\frac{dz}{dx} + (2y_1a_2 + a_1)z + a_2z^2 = 0.$$

Αυτή όμως είναι μια διαφορική εξίσωση Bernoulli και λύνεται όπως περιγράφηκε στη παράγραφο 7.

Μπορούμε εναλλακτικά να θέσουμε

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

οπότε η εξίσωση γίνεται

$$u^2\left(a_0 + a_1y_1 + a_2y_1^2 + y_1'\right) + a_2 + u(a_1 + 2a_2y_1) - u' = 0$$

και αφού $y = y_1$ είναι μια λύση, τότε εκπίπτει στην

$$u' - (2y_1a_2 + a_1)u - a_2 = 0,$$

Η οποία είναι γραμμική.

►**Άσκηση:** Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$y' + y^2 - 2x^2y + x^4 - 2x - 1 = 0,$$

η οποία έχει ως μερική λύση $y_1 = x^2 - 1$.

Λύση:

Πρόκειται για διαφορική εξίσωση Riccati με

$$a_2 = 1,\ a_1 = -2x^2,\ a_0 = x^4 - 2x - 1.$$

Θέτουμε $y = x^2 - 1 + z$ και η εξίσωση γίνεται

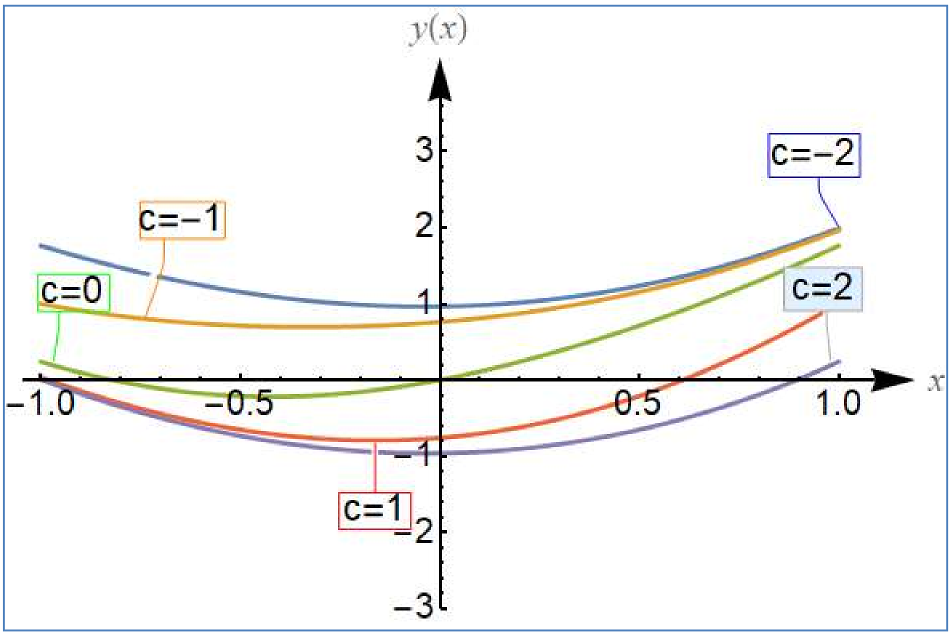
$$z' + (2(x^2 - 1) - 2x^2)z + z^2 = 0 \quad \text{ή} \quad z' - 2z + z^2 = 0.$$

Αυτή είναι μορφής Bernoulli και έχει λύση:

$$z(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+e^{2c}}$$

Έτσι η αρχική εξίσωση έχει λύση:

$$y(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + e^{2c}} + x^2 - 1$$



Σχήμα: Ισοκλινείς της λύσης της Άσκησης. ◄

►**Άσκηση:** Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$xy' - y^2 + 2(x-1)y + x(1-x) = 0,$$

η οποία έχει ως μερική λύση $y_1 = x$.

Λύση:

Πρόκειται για διαφορική εξίσωση Riccati αφού γράφεται

$$y' - \frac{1}{x}y^2 + \frac{2}{x}(x-1)y + (1-x) = 0 \quad \text{και} \quad a_2 = -\frac{1}{x},\ a_1 = \frac{2}{x}(x-1),\ a_0 = 1-x.$$

Θέτουμε $$y = x + z$$

και η εξίσωση γίνεται $z' + \left(2x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x}(x-1)\right)z - \frac{1}{x}z^2 = 0,$

ή $$z' - \frac{2}{x}z - \frac{1}{x}z^2 = 0.$$

Αυτή είναι μορφής Bernoulli και έχει λύση:

$$z(x) = \frac{2x^2}{c-x^2}.$$

Έτσι η αρχική εξίσωση έχει λύση:

$$y(x) = \frac{x(2x - x^2 + c)}{c - x^2}.$$

◄

►**Άσκηση:** Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$y' + y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2} = 0,$$

η οποία έχει ως μερική λύση $y_1 = \frac{1}{x}$.

Λύση:

Θέτουμε $y = y_1 + \frac{1}{u}$, οπότε η εξίσωση γίνεται

$$u' - \left(2\frac{1}{x} \cdot 1 + \frac{1}{x}\right)u + \frac{1}{x^2} = 0 \text{ ή } u' - \frac{3}{x}u - 1 = 0.$$

Αυτή ως γραμμική έχει λύση $u = -\frac{x}{2} + cx^3$. Αντικαθιστώντας εξάγεται η γενική λύση

$$y(x) = \frac{1 + 2cx^2}{x(-1 + 2cx^2)}.$$

◀

Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις ανώτερης τάξης

Θυμίζουμε ότι η Γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης έχει την παρακάτω μορφή

$$\frac{dy}{dx} + A(x)y = B(x)$$

Αφού παρατηρήσουμε ότι οι συντελεστές των y και y^0 στην παραπάνω παράσταση, δηλαδή τα $A(x)$ και $B(x)$, είναι συναρτήσεις μόνο του x, καταλήγουμε στη γενίκευση της έννοιας της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης.

Ορισμός: Μια διαφορική εξίσωση λέγεται γραμμική n τάξης όταν έχει τη μορφή

$$A_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + A_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots$$
$$+A_1(x)\frac{dy}{dx} + A_0(x)y = B(x) \qquad (1)$$

με $A_0, A_1, \cdots, A_n$ και B συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο ίδιο διάστημα I ενώ η $A_n(x)$ δεν είναι ταυτοτικά 0 στο διάστημα I.□

Οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις είναι πάντα πρώτου βαθμού. Για παράδειγμα η εξίσωση

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 1$$

δεν είναι γραμμική διότι η παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης είναι υψωμένη στο τετράγωνο και επομένως δεν είναι πρώτου βαθμού.

Όταν $B(x) \equiv 0$, τότε η (1) γίνεται

$$A_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + A_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_1(x)\frac{dy}{dx} + A_0(x)y = 0 \qquad (2)$$

και ονομάζεται **ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση** n-ης τάξης. Για παράδειγμα η εξίσωση

$$2x\frac{d^2y}{dx^2} + x^3\frac{dy}{dx} - y = 0$$

είναι ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης.

Η εξίσωση

$$\sqrt{2x}\,\frac{d^3y}{dx^3} + \sin\left(x^3\right)\frac{d^2y}{dx^2} + e^x\,\frac{dy}{dx} - xy = 0,$$

είναι ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 3ης τάξης.

Η χρήση της λέξης "ομογενής" σε αυτό το κεφάλαιο δεν πρέπει να συγχέεται με τη χρήση της ίδια λέξης στην παράγραφο 3 του ακριβώς προηγούμενου κεφαλαίου.

Ιδιότητες των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

Ορισμός: Οι συνεχείς και παραγωγίσιμες συναρτήσεις $y_1(x)$, $y_2(x), \cdots, y_n(x)$ λέγονται γραμμικά ανεξάρτητες όταν ισχύει

$$k_1y_1(x) + k_2y_2(x) + \cdots + k_ny_n(x) \equiv 0,$$

αποκλειστικά και μόνο για

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0.$$

Διαφορετικά οι συναρτήσεις λέγονται γραμμικά εξαρτημένες. □

►**Παράδειγμα:** Οι συναρτήσεις $\sin x, \cos x$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Πράγματι θεωρούμε $k_1 \sin x + k_2 \cos x = 0$.

Έστω $k_1 \neq 0$. Τότε πρέπει

$$\sin x = -\frac{k_2}{k_1}\cos x \text{ ή } \tan x = \text{σταθερά},$$

Κάτι που δεν είναι δυνατό. Άρα αναγκαστικά $k_1 = 0$ και κατά συνέπεια και $k_2 = 0$. ◄

Θεώρημα: Αν $y_1(x)$ είναι μερική λύση της (2) τότε αυτή έχει ως λύση και την $cy_1(x)$, όπου c μια αυθαίρετη σταθερή. □

Απόδειξη: Έχουμε

$$A_n(x)\frac{d^n cy_1}{dx^n}+A_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}cy_1}{dx^{n-1}}+\cdots$$
$$+A_1(x)\frac{dcy_1}{dx}+A_0(x)cy_1=$$
$$=c\left(\begin{array}{c}A_n(x)\dfrac{d^n y_1}{dx^n}+A_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+\cdots\\ +A_1(x)\dfrac{dy_1}{dx}+A_0(x)y_1\end{array}\right)$$
$$=c\cdot 0=0.\ \square.$$

►**Παράδειγμα 2.3:** Η συνάρτηση

$$y(x)=\cos x$$

είναι μια μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''=-y.$$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι και η συνάρτηση $y(x)=k\cos x$, είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης. ◄

Θεώρημα: Αν $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι μερικές λύσεις της (2) τότε αυτή έχει ως λύση και την

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x),$$

όπου c_1, c_2 δύο αυθαίρετες σταθερές. □

Θεώρημα: Αν $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ είναι μερικές λύσεις της (2) τότε αυτή έχει ως λύση και την

$$y_H(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+\ +c_ny_n(x), \tag{3}$$

όπου $c_1, c_2, \cdots, c_n$ αυθαίρετες σταθερές. □

Αν οι συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε η (3) αποτελεί τη γενική λύση της ομογενούς γραμμικής (2).

Θεώρημα: Κάθε γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$A_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + A_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_1(x)\frac{dy}{dx} + A_0(x)y = B(x)$$

έχει γενική λύση της μορφής

$$y(x) = y_H(x) + y_\mu(x)$$

όπου $y_H(x)$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς

$$A_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + A_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_1(x)\frac{dy}{dx} + A_0(x)y = 0$$

και $y_\mu(x)$μια μερική λύση της μη ομογενούς. □

Απόδειξη: Έχουμε

$$A_n(x)\frac{d^n(y_H + y_\mu)}{dx^n} + A_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}(y_H + y_\mu)}{dx^{n-1}} + \cdots$$

$$+A_1(x)\frac{d(y_H + y_\mu)}{dx} + A_0(x)(y_H + y_\mu) =$$

$$= \begin{bmatrix} A_n(x)\dfrac{d^n y_H}{dx^n} + A_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y_H}{dx^{n-1}} + \cdots \\ +A_1(x)\dfrac{dy_H}{dx} + A_0(x)y_H \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} A_n(x)\dfrac{d^n y_\mu}{dx^n} + A_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y_\mu}{dx^{n-1}} + \cdots \\ +A_1(x)\dfrac{dy_\mu}{dx} + A_0(x)y_\mu \end{bmatrix} =$$

$$0 + B(x) = B(x).$$

Ομογενείς με σταθερούς συντελεστές

Στην περίπτωση που στην (2) οι συντελεστές των παραγώγων

$$A_n(x), A_{n-1}(x), \cdots, A_1(x), A_0(x)$$

είναι σταθεροί αριθμοί, έστω

$$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$$

αντίστοιχα, τότε έχουμε ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0. \tag{4}$$

Ας θεωρήσουμε ότι η (4) έχει μια μερική λύση της μορφής

$$y(x) = e^{rx}.$$

Θέτοντας το ερώτημα "για ποιες τιμές του m ικανοποιείται η (4);" λαμβάνουμε

$$a_n \frac{d^n e^{rx}}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} e^{rx}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d e^{rx}}{dx} + a_0 e^{rx} = 0$$

και

$$a_n r^n e^{mx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{mx} + \cdots \ + a_n r^1 e^{mx} + a_0 r^0 e^{mx} = 0.$$

Αφού

$$e^{rx} \neq 0$$

για κάθε r και x έχουμε

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_n r + a_0 = 0.$$

Η παραπάνω αλγεβρική εξίσωση (Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας) έχει n ρίζες $r_1, r_2, \cdots, r_n$ οι οποίες δεν είναι κατ' ανάγκη όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Η εξίσωση αυτή λέγεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο**.

Υπάρχει γενική μεθοδολογία για την αντιμετώπιση τέτοιων εξισώσεων και βασίζεται στην εύρεση των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0.$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις

a. ***Ρίζες πραγματικές και άνισες***

Αν το $p(r)$ έχει n πραγματικές ρίζες και ανά δύο άνισες μεταξύ τους έστω

$$r_1, r_2, \cdots, r_n$$

τότε η (4) έχει ως γενική λύση την

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}.$$

►**Παράδειγμα 3.1:** Λύστε τις διαφορικές εξισώσεις

α) $y' + y = 0,$ β) $y''' + 2y'' - 5y' + y = 0$

Απάντηση:

α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$p(r) = r - 1$$

και έχει μια πραγματική ρίζα την $r_1 = 1$. Άρα η λύση είναι

$$y(x) = ce^{x}$$

β) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$p(r) = r^3 + 2r^2 - 5r + 1.$$

Για να βρούμε τις ρίζες του ακολουθούμε τη μέθοδο που βρίσκεται στο παράρτημα. Θέτουμε

$$q = \frac{1}{3} \cdot (-5) - \frac{1}{9} \cdot 2^2 = -\frac{19}{9}$$

$$r = \frac{1}{6}(-2 \cdot 5 - 3 \cdot 1) - \frac{1}{27} \cdot 2^3 = -\frac{133}{54}$$

Αφού

$$q^3 + r^2 = -\frac{361}{108} < 0,$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει τρεις απλές πραγματικές ρίζες.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο **Newton – Raphson**. Με αυτή προσεγγίζουμε μια πραγματική ρίζα. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε: Χ. Μασούρος & Χ. Τσίτουρας, Γενικά Μαθηματικά, 3η εκδ., Τσότρας, Αθήνα 2015, σελ. 340.

Η μέθοδος Newton – Raphson παράγει σημεία $x_0, x_1, \cdots, x_n$, ξεκινώντας από μια αρχική προσέγγιση x_0 και καταλήγει σε ένα σημείο x_n το οποίο βρίσκεται πολύ κοντά στην επιθυμητή ρίζα. Οι προσεγγίσεις παράγονται από τον επαναληπτικό τύπο

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Η διαδικασία σταματά όταν για κάποιο n

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

με $1 \gg \varepsilon > 0$ μια δοσμένη ανοχή.

Έστω ότι ζητάμε $\varepsilon = 0.001$ και λαμβάνουμε αρχικά $x_0 = 0$. Τότε έχουμε

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 + 2x_0^2 - 5x_0 + 1}{3x_0^2 + 4x_0 - 5} = \frac{1}{5},$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 + 2x_1^2 - 5x_1 + 1}{3x_1^2 + 4x_1 - 5} = \frac{113}{510}.$$

Επειδή $|x_2 - x_1| > \varepsilon$ συνεχίζουμε με

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 + 2x_2^2 - 5x_2 + 1}{3x_2^2 + 4x_2 - 5} \approx 0.22187610$$

Αφού

$$|x_3 - x_2| < \varepsilon,$$

σταματάμε δεχόμενοι το x_3 ως τη ρίζα r_1. Στη συνέχεια διαιρούμε το $p(r)$ με $r - 0.2218761$ και έχουμε

$$p(r) \approx (r - 0.2218761)(r^2 + 2.221876r - 4.507019)$$

Η εξίσωση

$$r^2 + 2.221876r - 4.507019 = 0,$$

λύνεται κατά τα γνωστά από το σχολείο και λαμβάνουμε

$$r_2 \approx 1.2851425,\ r_3 \approx -3.5070186$$

Έτσι η λύση είναι προσεγγιστικά

$$y(x) \approx c_1 e^{0.2218761x} + c_3 e^{1.2851424x} + c_3 e^{-3.5070186}$$

Σε περίπτωση που ζητηθεί πολύ μεγάλη ακρίβεια τότε αφού λάβουμε $\varepsilon = 10^{-16}$, βρίσκουμε

$r_1 \approx -3.507018644092976$, $r_2 \approx 0.2218761622631909$, $r_3 \approx 1.285142481829785$.

και η λύση είναι

$$y(x) \approx c_1 e^{-3.507018644092976} + c_2 e^{0.2218761622631909x} + c_3 e^{1.285142481829785x}.$$

◄

b. *Ρίζες πραγματικές με πολλαπλότητα*

Αν το $p(r)$ έχει n πραγματικές ρίζες και έστω ότι k από αυτές είναι ίσες $(k \leq n)$. Δηλαδή

$$r_1 = r_2 = \cdots r_k \neq r_{k+1} \neq r_{k+2} \neq \cdots \neq r_n$$

τότε η (4) έχει ως γενική λύση

$$y(x) = (c_1 + c_2 x + \cdots + c_k x^{k-1}) e^{r_1 x} + c_{k+1} e^{r_{k+1} x} + \cdots + c_n e^{r_n x}.$$

Ας εξετάσουμε την περίπτωση όπου $n = 2$. Τότε σε αυτή την περίπτωση η λύση είναι

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{rx}.$$

Πράγματι η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$T = a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y =$$

$$= a_0 e^{rx}(c_1 + c_2 x) + a_1\big(c_2 e^{rx} + e^{rx} r (c_1 + c_2 x)\big) + a_2\big(2 c_2 e^{rx} r + e^{rx} r^2 (c_1 + c_2 x)\big).$$

Απλοποιούμε με e^{rx} και έχουμε

$$T = a_0 c_1 + a_1 c_2 + a_0 c_2 x$$

$$+r(a_1c_1 + 2a_2c_2 + a_1c_2x) + r^2(a_2c_1 + a_2c_2x).$$

Όμως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι τέλειο τετράγωνο και η διακρίνουσα είναι μηδέν. Άρα αφού

$$a_0 = \frac{a_1^2}{4a_2}$$

λαμβάνουμε

$$T = \frac{(a_1 + 2a_2r)\left(a_1(c_1 + c_2x) + 2a_2\big(c_1r + c_2(2 + rx)\big)\right)}{4a_2}$$

Τέλος αφού το r είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου έχουμε

$$r = -\frac{a_1}{2a_2},$$

που μηδενίζει τον πρώτο όρο στον αριθμητή του T.

Έτσι T=0.

►Παράδειγμα:

Έστω ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$p(r) = r^2(r-2)^2(r+3)^4(r-3)$$

που σημαίνει ότι οι ρίζες του είναι

$$r_1 = r_2 = 0,\ r_3 = r_4 = 2,\ r_5 = r_6 = r_7 = r_8 = -3,\ r_9 = 3.$$

Τότε η γενική λύση της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x)e^{2x} +$$
$$+(c_5 + c_6x + c_7x^2 + c_8x^3)e^{-3x} + c_9e^{3x}. \blacktriangleleft$$

► Άσκηση: Λύστε τη διαφορική εξίσώση

$$y^{(5)} - 9y^{(4)} + 31y''' - 51y'' + 40y' - 12y = 0,$$

Λύση:

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$p(r) = -12 + 40r - 51r^2 + 31r^3 - 9r^4 + r^5$$

το οποίο έχει ρίζες

$$r_1 = r_2 = 1,\ r_3 = r_4 = 2,\ r_5 = 3.$$

Άρα η γενική λύση είναι

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x} + c_5 e^{3x}\ .$$

c. *Ρίζες μιγαδικές*

Εφόσον το $p(r)$ έχει πραγματικούς συντελεστές τότε τυχόν μιγαδικές ρίζες εμφανίζονται σε συζυγή ζεύγη. Έστω ότι οι $r_1 = a + bi$ και $r_1 = a - bi$ είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης. Τότε με βάση τα λεγόμενα στην περίπτωση των διακριτών ριζών, έχει λύση την

$$\begin{aligned} y &= c_1' e^{(a+ib)x} + c_2' e^{(a-ib)x} \\ &= c_1' e^{ax} e^{ibx} + c_2' e^{ax} e^{-ibx} \\ &= e^{ax}\left(c_1' e^{ibx} + c_2' e^{-ibx}\right). \end{aligned}$$

Όμως ως γνωστό

$$e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx\ ,$$

$$e^{-ibx} = \cos bx - i \sin bx\ .$$

Κάνοντας τις αντικαταστάσεις λαμβάνουμε

$$y = e^{ax}\left[\left(c_1' + c_2'\right)\cos bx + i\left(c_1' - c_2'\right)\sin bx\right].$$

Θέτοντας

$$c_1' = \frac{1}{2}(c_1 - ic_2),\ c_2' = \frac{1}{2}(c_1 + ic_2),$$

Η λύση γίνεται τελικά

$$y(x) = e^{ax}\left(c_1 \cos(bx) + c_2 \sin(ax)\right). \qquad (5)$$

Με βάση ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων η (5) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα και

$$y = d_1 e^{ax} \sin(bx + d_2) \text{ ή}$$

$$y = d_1 e^{ax} \cos(bx - d_2).$$

Η γενίκευση σε περίπτωση που υπάρχουν και άλλες μιγαδικές ρίζες γίνεται με φανερό τρόπο και θα την εξετάσουμε στα παραδείγματα.

Στην περίπτωση που οι 2 συζυγείς μιγαδικές ρίζες εμφανίζονται με πολλαπλοτητα, έστω 2 φορές, τότε η διαφορική εξίσωση έχει ως μερική λύση και την

$$y_m = xe^{ax}\left(c_3 \cos(bx) + c_4 \sin(ax)\right)$$

η οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητη από την (5) και συνεισφέρει στη γενική λύση σύμφωνα με το θεώρημα (2.3). Αν οι 2 συζυγείς μιγαδικές ρίζες εμφανίζονται με πολλαπλοτητα k, τότε έχουμε μερικές λύσεις της μορφής

$$\begin{aligned} &x^i e^{ax}\left(c_{2i+1}\cos(bx) + c_{2i+2}\sin(ax)\right), \\ &i = 0, 1, \ldots, k-1 \end{aligned}$$

οι οποίες συνεισφέρουν με τη σειρά τους στη μορφοποίηση της γενικής λύσης.

►**Παράδειγμα:** Λύστε τις διαφορικές εξισώσεις

α) $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$

β) $y^{(4)} + 4y'' = 0$

Απάντηση:

α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$p(r) = r^4 - 4r^3 + 8r^2 - 8r + 4$$

το οποίο έχει 2 συζυγείς μιγαδικές ρίζες με πολλαπλότητα 2

$$r_1 = r_2 = 1 + i, \qquad r_3 = r_4 = 1 - i.$$

Άρα η γενική λύση είναι

$$y(x) = e^x\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right) + xe^x\left(c_3 \cos x + c_4 \sin x\right).$$

β) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$p(r) = r^4 + 4r^2 = r^2(r^2 + 1)$$

το οποίο έχει ρίζες

$$r_1 = r_2 = 0 \text{ και } r_3 = 2i,\ r_4 = -2i.$$

Άρα η γενική λύση είναι

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x .$$ ◀

► **Άσκηση 3.4:** Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$y^{(4)} + 5y'' + 6y = 0$$

Λύση:

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$p(r) = r^4 + 5r^2 + 6.$$

Είναι ειδικής μορφή εξίσωση και λέγεται διτετράγωνη. Λύνεται με το μετασχηματισμό $r^2 = u$, οπότε έχουμε

$$u^2 + 5u + 6 = 0.$$

Αυτή έχει δύο πραγματικές ρίζες

$$u_1 = -3, u_2 = -2.$$

Άρα έχουμε να λύσουμε τις εξισώσεις

$$r^2 = u_1, r^2 = u_2.$$

Απ' αυτές προκύπτουν οι τέσσερις ρίζες

$$r_1 = i\sqrt{3}, r_2 = -i\sqrt{3},$$
$$r_3 = i\sqrt{2}, r_4 = -i\sqrt{2}.$$

Έτσι η γενική λύση της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = \left(c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x\right) + \left(c_3 \cos\sqrt{3}x + c_4 \sin\sqrt{3}x\right).$$ ◀

Γραμμικές, μη ομογενείς με σταθερούς συντελεστές

Από το θεώρημα 2.4 γνωρίζουμε ότι η γραμμική διαφορική εξίσωση έχει γενική λύση της μορφής

$$y(x) = y_H(x) + y_\mu(x)$$

όπου $y_H(x)$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς και $y_\mu(x)$ μια μερική λύση της (2).

Για τον υπολογισμό μιας μερικής λύσης χρησιμοποιούμε τη λεγόμενη **μέθοδο μεταβολής παραμέτρων του Lagrange**. Έστω λοιπόν

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = B(x). \tag{6}$$

μια γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς (δηλ. $B(x) \equiv 0$) είναι όπως γνωρίζουμε της μορφής

$$y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x). \tag{7}$$

όπου $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ είναι n μερικές λύσεις της ομογενούς, γραμμικά ανεξάρτητες. Αυτές προσδιορίζονται όπως εξηγήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο και θεωρούνται εδώ ως γνωστές.

Η μερική λύση βρίσκεται αν θεωρήσουμε τα $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ως συναρτήσεις του x. Δηλαδή

$$c_1 = c_1(x), c_2 = c_2(x), \cdots, c_n = c_n(x).$$

Αντικαθιστώντας στην (7) έχουμε

$$y_H(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + \cdots + c_n(x) y_n(x).$$

Παραγωγίζουμε την παραπάνω $n-1$ φορές διαδοχικά και διαμορφώνοντας κάθε φορά την αντίστοιχη εξίσωση

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 + \cdots + c_n' y_n = 0$$

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + \cdots + c_n' y_n' = 0$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0$$

$$c_1^{'}y_1^{(n-1)} + c_2^{'}y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n^{'}y_n^{(n-1)} = B(x)$$

καταλήγουμε στο παραπάνω σύστημα που είναι γραμμικό και πρέπει να προσδιορίσουμε τα $c_1', c_2', \cdots, c_n'$. Το σύστημα έχει πάντα λύση αφού οι συντελεστές του σχηματίζουν ένα πίνακα Wronski του οποίου η ορίζουσα είναι διάφορη από το μηδέν αφού τα $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση: Λύστε τις διαφορικές εξισώσεις με τη μέθοδο αυθαιρέτων συντελεστών του Lagrange.

α) $y^{''} - 5y^{'} + 6y = x,$ β) $y'' - y = \cos x$

Λύση:

α) Έχουμε ως γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς

$$y_H(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Άρα $y_1(x) = e^{2x}, y_2(x) = e^{3x}$.

Θέτουμε $c_1 = c_1(x)$, $c_2 = c_2(x)$ και έχουμε

$$c_1^{'}e^{2x} + c_2^{'}e^{3x} = 0$$

$$2c_1^{'}e^{2x} + 3c_2^{'}e^{3x} = x.$$

Με την απαλοιφή Gauss το σύστημα γίνεται

$$c_1^{'}e^{2x} + c_2^{'}e^{3x} = 0$$

$$c_2^{'}e^{3x} = x.$$

Με αντικατάσταση παίρνουμε

$$c_2^{'} = xe^{-3x},\ c_1^{'} = -xe^{-2x}.$$

Τα ολοκληρώνουμε

$$\int dc_2 = \int xe^{-3x}dx\,,$$

$$\int dc_1 = -\int xe^{-2x}dx,$$

και λαμβάνουμε

$$c_2 = e^{-3x}\left(-\frac{1}{9} - \frac{x}{3}\right) \quad \text{και} \quad c_2 = e^{-2x}\left(\frac{1}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

Άρα η μερική λύση είναι

$$y_\mu(x) = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{3x} = \frac{1}{6}x + \frac{5}{36}$$

και η γενική λύση της δοσμένης είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= y_H(x) + y_\mu(x) \\ &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{5}{36} + \frac{1}{6}x. \end{aligned}$$

β) Η ομογενής είναι

$$y'' - y = 0$$

με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(r) = r^2 - 1$$

και ρίζες

$$r_1 = 1, \; r_2 = -1.$$

Επομένως η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$y_H(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Άρα

$$y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{-x}.$$

Θέτουμε $c_1 = c_1(x), c_2 = c_2(x)$ και έχουμε

$$c_1' e^x + c_2' e^{-x} = 0, \qquad c_1' e^x - c_2' e^{-x} = \cos x.$$

Με την απαλοιφή Gauss το σύστημα γίνεται

$$c_1' e^x + c_2' e^{-x} = 0, \; 2c_1' e^x = \cos x.$$

Επιλύοντας έχουμε

$$c_1' = \frac{1}{2}e^{-x}\cos x, \; c_2' = -\frac{1}{2}e^x \cos x.$$

Τα ολοκληρώνουμε και λαμβάνουμε

$$c_1 = \int dc_1 = \int \frac{1}{2} e^{-x} \cos x dx,$$
$$= \frac{1}{4} e^{-x} \left(-\cos x + \sin x\right),$$

$$c_2 = \int dc_2 = -\int \frac{1}{2} e^{x} \cos x dx,$$
$$= -\frac{1}{4} e^{x} \left(\cos x + \sin x\right).$$

Άρα η μερική λύση είναι

$$y_\mu\left(x\right) = c_1\left(x\right) e^{x} + c_2\left(x\right) e^{-x} = -\frac{1}{2}\cos x \quad ,$$

και η γενική λύση της δοσμένης είναι

$$y(x) = y_H(x) + \ y_\mu(x)$$
$$= c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x \ . \blacktriangleleft$$

► **Άσκηση:** Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + x y' - y = x,$$

αν γνωρίζετε ότι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$y_H = c_1 x + \frac{c_2}{x}.$$

Λύση:

Στην περίπτωση αυτή οι συντελεστές δεν είναι σταθεροί αλλά η μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί. Πράγματι αφού

$$y_1 = x,\ y_2 = \frac{1}{x},$$

το σχετικό σύστημα γίνεται (αφού πρώτα διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης με x^2)

$$x c_1' + \frac{c_2'}{x} = 0, \quad c_1' - \frac{c_2'}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Λύνοντας, βρίσκουμε $c_1' = \frac{1}{2x}$, $c_2' = -\frac{x}{2}$.

Έτσι έχουμε $c_1 = \frac{1}{2}\ln x,\ c_2 = -\frac{x^2}{4}$

και η μερική λύση γίνεται

$$y_m = \frac{x}{2}\ln x - \frac{x}{4}.$$

Τέλος η γενική λύση είναι

$$y(x) = y_H(x) + y_m(x) = c_1 x + c_2 x^{-1} + \frac{x}{2}\ln x - \frac{x}{4}$$

Η οποία μπορεί να απλοποιηθεί σε

$$\boxed{y(x) = c_1 x + c_2 x^{-1} + \frac{x}{2}\ln x}\ .$$

Γραμμικές μη ομογενείς με σταθερούς συντελεστές και ειδική μορφή του $B(x)$.

Σε περιπτώσεις που το δεξί μέλος της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $B(x)$ έχει ειδική μορφή μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα τη μορφή της μερικής λύσης και να αποφύγουμε τη μέθοδο του Lagrange. Η μέθοδος που θα περιγράψουμε λέγεται μέθοδος των **προσδιοριστέων συντελεστών**. Εφαρμόζεται μόνο όταν το $B(x)$ έχει πεπερασμένο αριθμό από γραμμικά ανεξάρτητες παραγώγους.

Έστω ότι έχουμε μια γενική μορφή

$$B(x) = \left(P(x)\cos ax + Q(x)\sin ax\right)e^{\lambda x}$$

με $P(x)$ και $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $\alpha,\ \lambda$ πραγματικοί αριθμοί.

Τότε η διαφορική εξίσωση δέχεται μερική λύση είναι της μορφής

$$y_\mu = x^\rho\left(\tilde{P}(x)\cos ax + \tilde{Q}(x)\sin ax\right)e^{\lambda x}$$

όπου $\tilde{P}, \tilde{Q}$ πολυώνυμα με βαθμό όσο και ο μεγαλύτερος βαθμός από τα $P\ (x)$ και $Q(x)$. Το ρ είναι η πολλαπλότητα της $(\lambda + ai)$ ως ρίζας στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο της αντίστοιχης ομογενούς.

Οι συντελεστές προσδιορίζονται όταν αντικαταστήσουμε την y_μ στην (6).

► **Άσκηση:** Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' - 4y' + 5y = \left(x\cos 2x - \sin 2x\right)e^x, y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

Λύση:

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της αντίστοιχης ομογενούς

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

είναι

$$p(r) = r^2 - 4r + 5$$

και έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, τις $r_1=2+i$ και $r_2=2-i$. Άρα η λύση της ομογενούς είναι

$$y_H(x) = e^{2x}\left(c_1\cos x + c_2\sin x\right).$$

Η μερική λύση έχει τη μορφή

$$y_\mu = \left(\left(\tilde{p}_1 x + \tilde{p}_0\right)\cos 2x + \left(\tilde{q}_1 x + \tilde{q}_1\right)\sin 2x\right)e^x$$

επειδή $\rho=0$, $\lambda=1$, $\alpha=2$. Αφού

$$y_\mu{}' = e^x\begin{pmatrix}\left(\tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 + 2\tilde{q}_0 + x\left(\tilde{p}_1 + 2\tilde{q}_1\right)\right)\cos 2x \\ +\left(-2\tilde{p}_0 + \tilde{q}_0 + \tilde{q}_1 - 2\tilde{p}_1 x + \tilde{q}_1\right)\sin 2x\end{pmatrix}$$

$$y_\mu{}'' = e^x\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}3\tilde{p}_0 - 2\tilde{p}_1 - 4\tilde{q}_0 - 4\tilde{q}_1 \\ +x\left(3\tilde{p}_1 - 4\tilde{q}_1\right)\end{pmatrix}\cos 2x \\ +\begin{pmatrix}4\tilde{p}_0 + 4\tilde{p}_1 + 3\tilde{q}_0 - 2\tilde{q}_1 + \\ 4\tilde{p}_1 x + 3\tilde{q}_1 x\end{pmatrix}\sin 2x\end{pmatrix}$$

η αρχική διαφορική εξίσωση έπειτα από την αντικατάσταση της y_μ και των παραγώγων τις, γίνεται

$$-e^x\left(\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}2\tilde{p}_0+2\tilde{p}_1+4\tilde{q}_0-4\tilde{q}_1\\ +x\left(1+2\tilde{p}_1+4\tilde{q}_1\right)\end{array}\right)\cos 2x\\ +\left(\begin{array}{l}-1-4\tilde{p}_0+4\tilde{p}_1+2\tilde{q}_0+2\tilde{q}_1\\ +x\left(4\tilde{p}_1+2\tilde{q}_1\right)\end{array}\right)\sin 2x\end{array}\right)=0.$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των ίδιων όρων, δηλαδή

$$2\tilde{p}_0+2\tilde{p}_1+4\tilde{q}_0-4\tilde{q}_1=0$$
$$1+2\tilde{p}_1+4\tilde{q}_1=0$$
$$-1-4\tilde{p}_0+4\tilde{p}_1+2\tilde{q}_0+2\tilde{q}_1=0$$
$$+x(4\tilde{p}_1+2\tilde{q}_1)=0$$

και καταλήγουμε στη μερική λύση

$$y_m=-\frac{1}{50}e^x\left((21+5x)\cos 2x+(10x-3)\sin 2x\right).$$

Τέλος η γενική λύση είναι

$$y=e^{2x}\left(c_1\cos x+c_2\sin x\right)-\frac{1}{50}e^x\left((21+5x)\cos 2x+(10x-3)\sin 2x\right).$$

Συνεχίζοντας έχουμε

$$y(0)=-\frac{21}{50}+c_2=1,\ \ y'(0)=-\frac{2}{5}+c_1+c_2=-1,$$

και

$$y(x)=\frac{1}{50}e^x\Big(-(21+5x)\cos(2x)-172e^x\sin(x)+\cos(x)\big(71e^x+(6-20x)\sin(x)\big)\Big).$$

◀

Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων.

Ορισμός: Το ζεύγος των εξισώσεων

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(x, y_1, y_2),$$
$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(x, y_1, y_2),$$

που f_1, f_2 συναρτήσεις των x, y_1, y_2 ορισμένες σε ένα κοινό διάστημα S, καλείται σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Η λύση του είναι ένα ζεύγος συναρτήσεων $y_1(x), y_2(x)$, ορισμένων σε ένα κοινό διάστημα $D \subseteq S$ οι οποίες ικανοποιούν ταυτοτικά τις εξισώσεις (4). □

►**Παράδειγμα:** Έχουμε τη μη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y''' = 2xy' - y^3 y''.$$

Αυτή μπορεί να μετασχηματισθεί στο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$y(x) = y_1, \quad y'(x) = y_2, \quad y''(x) = y_3, \quad y'''(x) = 2xy_2 - y_1^3 y_3. \blacktriangleleft$$

►**Άσκηση:** Λύστε τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων

α) $\dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{x}{y_1^2}, \quad \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{y_2}{x^2},$

$y_1 \neq 0, x \neq 0$

β) $\dfrac{dx}{dt} = 2e^{2t},$

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x^2 - y}{t}, t \neq 0.$

Λύση:

α) Από την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$\frac{y_1^2}{3} = \frac{x^2}{2} + c_1^*, \quad y_1^3 = 1.5x^2 + c_1.$$

Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε

$$\ln y_2 = -\frac{1}{x} + c_2^*, \quad y_2 = c_2 e^{-1/x}.$$

β) Αφού λύσουμε την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$y_1 = e^{2x} + c_1 .$$

Την αντικαθιστάμε στη δεύτερη εξίσωση και έχουμε

$$\frac{dy_2}{dx} + \frac{y_2}{x} = \frac{e^{4x} + 2c_1 e^{2x} + c_1^2}{x} .$$

Αυτή είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Η λύση δίνεται από τον τύπο (10) του προηγούμενου κεφαλαίου.

$$y_2(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} \cdot \left(c + \int \frac{e^{4x} + 2c_1 e^{2x} + c_1^2}{x} e^{\int \frac{dx}{x}} dx \right),$$

και

$$y_2(x) = \frac{\frac{1}{4} e^{4x} + c_1 e^{2x} + c_1^2 x + c_2}{x} . \blacktriangleleft$$

Συστήματα Γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

Ορισμός: Το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= f_{11}(x) y_1 + f_{12}(x) y_2 + \cdots + f_{1n}(x) + q_1(x), \\
\frac{dy_2}{dt} &= f_{21}(x) y_1 + f_{22}(x) y_2 + \cdots + f_{2n}(x) + q_2(x), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{dy_n}{dt} &= f_{n1}(x) y_1 + f_{n2}(x) y_2 + \cdots + f_{nn}(x) + q_n(x),
\end{aligned} \tag{10}$$

λέγεται **σύστημα *n* γραμμικών διαφορικών εξισώσεων**. □

Αυτό μπορεί να γραφεί σε πιο συμπαγή μορφή

$$y^{'} = F(x) y + q(x)$$

με

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{21}(x) & \cdots & f_{21}(x) \\ \vdots & \square & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n1}(x) & \cdots & f_{n1}(x) \end{bmatrix},$$

και

$$y = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \; y' = \begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{bmatrix}, \text{ και } \; q(x) = \begin{bmatrix} q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{bmatrix}.$$

Αν $F(x) = F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, δηλαδή ο πίνακας F είναι ανεξάρτητος από την ανεξάρτητη μεταβλητή x και αποτελείται μόνο από σταθερές

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{21} & \cdots & f_{21} \\ \vdots & \square & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n1} & \cdots & f_{n1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

τότε έχουμε **σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές**

$$y' = Fy + q(x). \tag{11}$$

Η διαφορική εξίσωση

$$y' = Fy \tag{12}$$

είναι η αντίστοιχη ομογενής της (11).

Αν η $\tilde{y}(x)$ είναι η γενική λύση της (12) και $\psi(x)$ είναι μια οποιαδήποτε μερική λύση της (11), τότε

$$y(x) = \tilde{y}(x) + \psi(x)$$

είναι η γενική λύση της (11). Δηλαδή ισχύουν τα αντίστοιχα από της βαθμωτές (n=1) διαφορικές εξισώσεις.

Ένα σύνολο από N το πλήθος λύσεις της (12)

$$y^{[i]}(x),\ i = 1,2,\cdots,N$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο εφόσον

$$k_1 y^{[1]}(x) + k_2 y^{[2]}(x) + \cdots + k_n y^{[n]}(x) \equiv \mathbf{0},$$

($\mathbf{0} = [0,0,\cdots,0]^T \in \mathbb{R}^N$) μόνο όταν

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_N = 0.$$

►**Παράδειγμα:** Έστω

$$y^{[1]}(x) = \begin{bmatrix} e^x \\ -e^x \end{bmatrix},\ y^{[2]}(x) = \begin{bmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{bmatrix}$$

τότε

$$k_1 y^{[1]}(x) + k_2 y^{[2]}(x) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k_1 \begin{bmatrix} e^x \\ -e^x \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{gathered} k_1 e^x + k_2 e^{2x} = 0 \\ -k_1 e^x + k_2 e^{2x} = 0\ , \end{gathered}$$

κάτι που ισχύει ταυτοτικά μόνο όταν $k_1 = k_2 = 0$.

Αν όμως είχαμε

$$y^{[1]}(x) = \begin{bmatrix} e^x \\ -e^x \end{bmatrix},\ y^{[2]}(x) = \begin{bmatrix} 2e^x \\ -2e^x \end{bmatrix},$$

τότε λαμβάνοντας $k_1 = 2,\ k_2 = -1$ έχουμε

$$2y^{[1]}(x) - y^{[2]}(x) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και κατά συνέπεια οι $y^{[1]}, y^{[2]}$ θα ήταν γραμμικά εξαρτημένες.

Συνήθως ελέγχουμε τη γραμμική ανεξαρτησία με τη μέθοδο των οριζουσών Wronski, όπως κάναμε στην 2η παράγραφο του κεφαλαίου. Έτσι πιστοποιούμε το αποτέλεσμα, καθώς για μεν το πρώτο σκέλος του παραδείγματος έχουμε

$$\left|\begin{bmatrix} e^x & e^{2x} \\ -e^x & e^{2x} \end{bmatrix}\right| = 2e^{3x} \neq 0,$$

για δε το δεύτερο

$$\left|\begin{bmatrix} e^x & 2e^{2x} \\ -e^x & -2e^{2x} \end{bmatrix}\right| \equiv 0.$$

◄

Ένα σύνολο από n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (12)

$$y^{[i]}(x), \; i = 1,2,\cdots,n$$

λέγεται **θεμελιώδες σύνολο λύσεων**. Η γενική λύση της (12) είναι κάποιος γραμμικός συνδυασμός αυτών των λύσεων.

6.3 *Μέθοδος ιδιοτιμών για ομογενή συστήματα*

Θεώρημα: Θεωρούμε το σύστημα (12). Αν v είναι ιδιοδιάνυσμα του F με λ την αντίστοιχη ιδιοτιμή, τότε η συνάρτηση

$$y(x) = e^{\lambda x} v$$

είναι μια λύση του συστήματος. □

Όπως εργαστήκαμε στην περίπτωση των βαθμωτών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, έτσι και εδώ διακρίνουμε τις ίδιες περιπτώσεις ανάλογα με τη μορφή των ιδιοτιμών του F.

Ιδιοτιμές Απλές.

Αν ο πίνακας F έχει ιδιοτιμές

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n,$$

πραγματικές διαφορετικές μεταξύ τους και αν

$$v_1, v_2, \cdots, v_n,$$

τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, τότε το σύνολο

$$\{e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2, \cdots, e^{\lambda_n t} v_n\}$$

αποτελεί θεμελιώδες σύνολο λύσεων του (12).

►**Άσκηση** Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$y' = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} y.$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\left|\begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0,$$

δηλαδή

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 34\lambda + 56 = 0,$$

οπότε

$$(\lambda-7)(\lambda+4)(\lambda+2)=0.$$

Για $\lambda=7$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προκύπτει από

$$\begin{bmatrix}-4 & 1 & -1\\ 4 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 2\end{bmatrix}v_1=7v_1,$$

$$\begin{bmatrix}-4 & 1 & -1\\ 4 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\\ v_{13}\end{bmatrix}=7\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\\ v_{13}\end{bmatrix}.$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}&-11v_{11}+v_{12}-v_{13}=0,\\ &v_{11}-v_{12}+v_{13}=0,\\ &4v_{11}+5v_{12}-5v_{13}=0,\end{aligned}$$

και κατά συνέπεια $v_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$.

Για $\lambda=-4$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προκύπτει από

$$\begin{bmatrix}-4 & 1 & -1\\ 4 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 2\end{bmatrix}v_2=-4v_2,$$

$$\begin{bmatrix}-4 & 1 & -1\\ 4 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\\ v_{23}\end{bmatrix}=-4\begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\\ v_{23}\end{bmatrix}.$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}&v_{22}-v_{23}=0,\\ &4v_{21}+7v_{22}+4v_{23}=0,\\ &4v_{21}+5v_{22}+6v_{23}=0,\end{aligned}$$

και κατά συνέπεια

$$v_2=\begin{bmatrix}-11\\ 4\\ 4\end{bmatrix}.$$

Για $\lambda=-2$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προκύπτει από

$$\begin{bmatrix}-4 & 1 & -1\\ 4 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 2\end{bmatrix}v_3=-2v_3,$$

$$\begin{bmatrix}-4 & 1 & -1\\ 4 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{31}\\ v_{32}\\ v_{33}\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}v_{31}\\ v_{32}\\ v_{33}\end{bmatrix}.$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}&-2v_{31}+v_{32}-v_{33}=0,\\ &4v_{31}+5v_{32}+4v_{33}=0,\\ &4v_{31}+5v_{32}+4v_{33}=0,\end{aligned}$$

και κατά συνέπεια

$$v_3 = \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Η γενική λύση του συστήματος είναι

$$y(x) = c_1 e^{7x} v_1 + c_2 e^{-4x} v_2 + c_3 e^{-2x} v_3,$$

ή αλλιώς

$$y(x) = c_1 e^{7x} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-4x} \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + c_3 e^{-2x} \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \\ 14 \end{bmatrix},$$

ή πιο αναλυτικά

$$y_1(x) = -11 c_2 e^{-4x} - 9 c_3 e^{-2x},$$

$$y_2(x) = c_1 e^{7x} + 4 c_2 e^{-4x} - 4 c_3 e^{-2x},$$

$$y_2(x) = c_1 e^{7x} + 4 c_2 e^{-4x} + 14 c_3 e^{-2x}.$$ ◄

Ιδιοτιμές Μιγαδικές.

Στην περίπτωση που έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές λ_1, λ_2 και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα v_1, v_2 τότε τα

$$\{e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2\}$$

Ανήκουν στο θεμελιώδες σύνολο λύσεων του (12). Με κατάλληλους χειρισμούς, όπως και στην βαθμωτή διαφορική εξίσωση, απαλείφονται οι μιγαδικοί όροι από τη λύση.

► **Άσκηση 6.3:** Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$y' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} y.$$

Λύση:

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\left| \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| =$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 25 = (\lambda - 4 - 3i)(\lambda - 4 + 3i) = 0.$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι

$$\lambda_1 = 4 + 3i, \ \lambda_2 = 4 - 3i.$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές είναι

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} + \frac{3}{5} i \\ 1 \end{bmatrix}, \ v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} - \frac{3}{5} i \\ 1 \end{bmatrix},$$

αφού είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$F v_1 = \lambda_1 v_1 \ \text{ και } \ F v_2 = \lambda_2 v_2.$$

Η λύση είναι

$$y(x) = c_1' e^{(4+3i)x} \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} + \frac{3i}{5} \\ 1 \end{bmatrix} + c_2' e^{(4-3i)x} \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} - \frac{3i}{5} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Θέτουμε πάλι όπως στις βαθμωτές εξισώσεις

$$c_1' = \frac{1}{2}(c_1 - ic_2),\ c_2' = \frac{1}{2}(c_1 + ic_2)$$

και λαμβάνουμε τη λύση απαλλαγμένη από μιγαδικές συνιστώσες

$$y(x) = \begin{bmatrix} \left(-\frac{c_1}{5} + \frac{3c_2}{5}\right) e^{4x} \cos(3x) + \left(-\frac{3c_1}{5} - \frac{c_2}{5}\right) e^{4x} \sin(3x) \\ c_1 e^{4x} \cos(3x) + c_2 e^{4x} \sin(3x) \end{bmatrix}.$$

◄

Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων

Μέθοδος Euler

Πρόκειται για την απλούστερη αριθμητική μέθοδο. Αναφέρθηκε πρώτη φορά από τον Euler το 1768. Έτσι αφού δοθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0,$$

παράγουμε τις προσεγγίσεις της λύσης

$$y_1 \approx y(x_1), y_2 \approx y(x_2), y_3 \approx y(x_3), \cdots$$

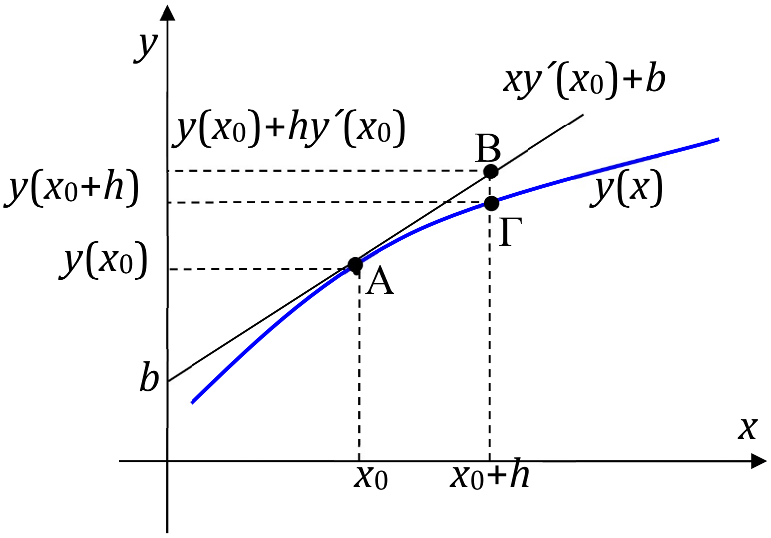
στα σημεία

$$x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \text{κλπ.}$$

Ο γενικός της τύπος είναι

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Στο επόμενο σχήμα έχουμε μια γεωμετρική παράσταση της λειτουργίας της μεθόδου.



Σχήμα – 1.

Ξεκινάμε από το την αρχική συνθήκη $(x_0, y(x_0))$ ή απλούστερα (x_0, y_0). Αυτή εμφανίζεται ως σημείο Α στο σχήμα – 1. Θέλουμε να βρούμε τη λύση $y(x_0 + h)$. Ευκταίο θα ήταν να ακολουθήσουμε την θεωρητική λύση και να καταλήξουμε στο σημείο Γ. Αυτό υποτίθεται ότι δεν μπορεί να γίνει. Αντ' αυτού ακολουθάμε την εφαπτομένη της θεωρητικής λύσης στο σημείο Α. Έτσι αφού διανύσουμε μια απόσταση h στον άξονα x καταλήγουμε στο σημείο Β. Η απόσταση ΒΓ είναι το σφάλμα της μεθόδου. Όσο μικρότερο είναι το βήμα h τόσο μικρότερο είναι το σφάλμα.

Αυτό εξηγείται από το ότι η μέθοδος Euler είναι στην ουσία οι δύο πρώτοι όροι της ανάπτυξης σε σειρά Taylor.

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy(x_0) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_0) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_0) + \frac{1}{4!}h^4 y^{(4)}(x_0) + \cdots$$

Οι όροι του h^2 και μεγαλύτερου βαθμού διαγράφονται.

Συνεχίζοντας από το σημείο Β, ακολουθάμε για άλλο ένα βήμα μήκους h την εφαπτομένη σε μια ισοκλινή παραπλήσια στην ισοκλινή της θεωρητικής λύσης κοκ. Τα σφάλματα αθροίζονται και ευελπιστούμε να παραμείνουν όσο το δυνατό μικρότερα. Αν δεν έχουμε κάποια εκτίμηση για τις τιμές των παραγώγων $y''(x_0), y'''(x_0)$ κλπ. που αποκόπηκαν από τον τύπο του Taylor, τότε ο ασφαλέστερος τρόπος για να έχουμε μικρό σφάλμα είναι να λαμβάνουμε μικρό βήμα.

Αν ενώσουμε τα σημεία $y_0, y_1, y_2, \cdots$ με τις σχετικά ευθύγραμμα τμήματα από τις αντίστοιχες εφαπτομένες σε αυτά τότε προκύπτει μια πολυγωνική γραμμή.

►Άσκηση 2.1:

Προσεγγίστε την λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y = -xy,\ y(0) = 1,$ στα σημεία 0.1, 0.2, ..., 1.0 με τη μέθοδο Euler.

Λύση: Έχουμε $f(x, y) = -xy$ και $h = 0.1$.

Τα σημεία που θέλουμε είναι

$$x_1 = 0.1,\ x_2 = 0.2,\ x_3 = 0.3,\ x_4 = 0.4,\ x_5 = 0.5$$

και αντίστοιχα θέλουμε τις προσεγγίσεις

$$y_1 \approx y(x_1),\ y_2 \approx y(x_2),\ y_3 \approx y(x_3),\ y_4 \approx y(x_4),\ y_5 \approx y(x_5),\ y_6 \approx y(x_6)$$
$$y_7 \approx y(x_7),\ y_8 \approx y(x_8),\ y_9 \approx y(x_9),\ y_{10} \approx y(x_{10}).$$

Με το σύμβολο ≈ εννοούμε ότι πρόκειται για προσέγγιση και όχι για ισότητα.

Οπότε υπολογίζουμε

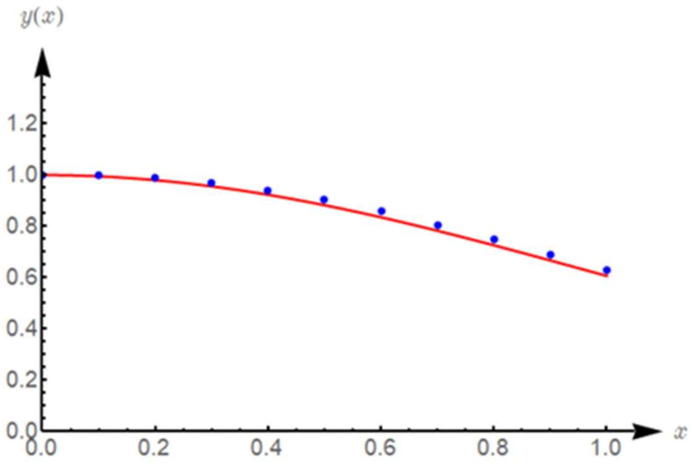
$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h(-x_0 y_0) = 1 + 0.1 \cdot (-0 \cdot 1) = 1$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + h(-x_1 y_1) = 1 + 0.1 \cdot (-0.1 \cdot 1) = 0.99$$
$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = y_2 + h(-x_2 \cdot y_2) = 0.99 + 0.1 \cdot (-0.2 \cdot 0.99) = 0.970$$

Προσέξτε ότι το ακριβές αποτέλεσμα είναι $y_3 = 0.9702$. Στο παράδειγμα όμως γράφουμε συστηματικά μόνο τα 3 πρώτα δεκαδικά ψηφία του αποτελέσματος. Τα υπόλοιπα ψηφία αποκόπτονται. Δεν γίνεται στρογγυλοποίηση. Αυτό αποφασίστηκε διότι αφού λάβαμε $h = 0.1$, αναμένουμε σχετικά μεγάλα σφάλματα και δεν έχει νόημα να γράφουμε τα αποτελέσματα με όλα τα δεκαδικά.

$$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = y_3 + h(-x_3 y_3) = 0.970 + 0.1 \cdot (-0.3 \cdot 0.970) \approx 0.940$$

Εδώ το αποτέλεσμα ήταν 0.9409 αλλά λόγω της αποκοπής γράψαμε τα 3 ψηφία μόνο.

$$y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) = y_4 + h(-x_4 y_4) = 0.940 + 0.1 \cdot (-0.4 \cdot 0.940) \approx 0.902$$
$$y_6 = y_5 + hf(x_5, y_5) = y_5 + h(-x_5 y_5) = 0.902 + 0.1 \cdot (-0.5 \cdot 0.902) \approx 0.856$$
$$y_7 = y_6 + hf(x_6, y_6) = y_6 + h(-x_6 y_6) = 0.856 + 0.1 \cdot (-0.6 \cdot 0.856) \approx 0.804$$
$$y_8 = y_7 + hf(x_7, y_7) = y_7 + h(-x_7 y_7) = 0.804 + 0.1 \cdot (-0.7 \cdot 0.804) \approx 0.747$$
$$y_9 = y_8 + hf(x_8, y_8) = y_8 + h(-x_8 y_8) = 0.747 + 0.1 \cdot (-0.8 \cdot 0.747) \approx 0.687$$
$$y_{10} = y_9 + hf(x_9, y_9) = y_9 + h(-x_9 y_9) = 0.687 + 0.1 \cdot (-0.9 \cdot 0.687) \approx 0.625$$



Σχήμα - 2.

Στο σχήμα-2 βλέπουμε με την κόκκινη γραμμή την πραγματική λύση. Με τις μπλε τελείες σημειώνονται οι προσεγγίσεις με τη μέθοδο του Euler όπως προκύπτουν από το τρέχον παράδειγμα.

Ας σημειωθεί πως η θεωρητική λύση είναι

$$y(x) = e^{-x^2/2}$$

και ενδεικτικά

$$y(1) = e^{-0.5} \approx 0.60653065971263. \blacktriangleleft$$

► Άσκηση:

Λύστε με την μέθοδο Euler το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (σύστημα)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + 1 \\ y_2' &= -y_1 + y_2 + x \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 1/2$. Χρησιμοποιείστε βήμα $h = 0.1$ και προσεγγίστε τα $y(0.1)$, $y(0.2)$.

Λύση: Έχουμε

1ο βήμα

$$y^{[1]} = y^{[0]} + h \cdot \begin{bmatrix} y_1^{[0]} + y_2^{[0]} + 1 \\ -y_1^{[0]} + y_2^{[0]} + x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + 0.1 \cdot \begin{bmatrix} 2 + 1/2 + 1 \\ -2 + 1/2 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.35 \\ 0.35 \end{bmatrix}$$

2ο βήμα

$$y^{[2]} = y^{[1]} + h \cdot \begin{bmatrix} y_1^{[1]} + y_2^{[1]} + 1 \\ -y_1^{[1]} + y_2^{[1]} + x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.35 \\ 0.35 \end{bmatrix} + 0.1 \cdot \begin{bmatrix} 2.35 + 0.35 + 1 \\ -2.35 + 0.35 + 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.72 \\ 0.16 \end{bmatrix}$$

Για την ακριβή λύση γνωρίζουμε ότι

$$y(0.2) \approx \begin{bmatrix} 2.73676731130671 \\ 0.11174548416605 \end{bmatrix}. \blacktriangleleft$$