

ΕΝΟΤΗΤΑ 1 : ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ & ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Ευάγγελος Τυρλής

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Τομέας Φυσικής Περιβάλλοντος & Μετεωρολογίας

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

A. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Έννοια και ορισμός παραγώγου:

- Γεωμετρική προσέγγιση
- Ρυθμός μεταβολής συνάρτησης
- Γραμμική προσέγγιση συνάρτησης σε περιοχή σημείου

B. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- Μερική παράγωγος
- Παράγωγος σύνθετων συναρτήσεων
- Βαθμίδα συνάρτησης

Γ. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Εισαγωγή στα διανύσματα

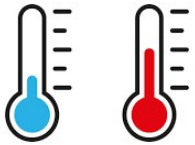
ΒΑΘΜΩΤΑ & ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

ΒΑΘΜΩΤΟ

Φυσική ποσότητα η οποία περιγράφεται πλήρως από έναν **αριθμό** (ο οποίος αντιστοιχεί στο μέγεθος) και μια **μονάδα μέτρησης**



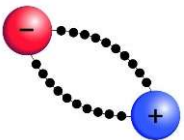
Χρόνος 15 sec



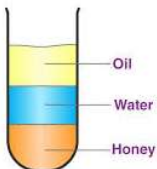
Θερμοκρασία 20°C



Μάζα 70 kgr



Ηλ. φορτίο 5 mCoulomb

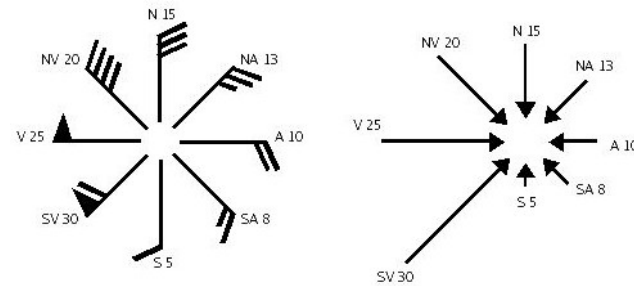


Πυκνότητα $1 \frac{\text{kgr}}{\text{m}^3}$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ

Φυσική ποσότητα η οποία περιγράφεται όχι μόνον από έναν **αριθμό** και **μονάδα μέτρησης** αλλά απαιτεί να οριστεί και μια **κατεύθυνση**.

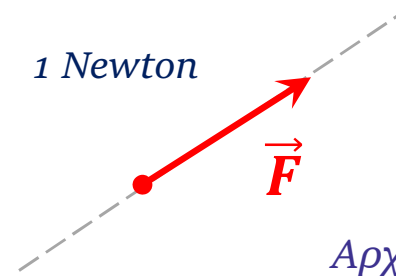
Ταχύτητα ανέμου **Βόρειος** 5 m/sec



Δύναμη

Φορά + διεύθυνση =
Κατεύθυνση

1 Newton



Μετατόπιση

Τελική θέση: P_2

Παριστάνουμε τη μετατόπιση υλικού σημείου με διάνυσμα.

$\vec{A}$

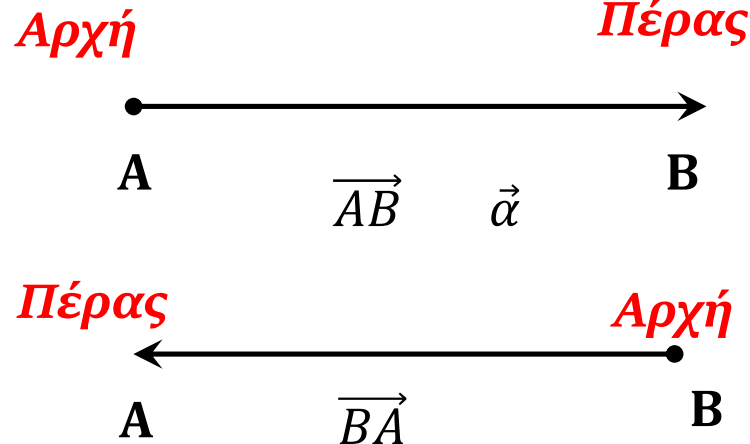
1 km

Αρχική θέση: P_1

Δηλαδή η φυσική ποσότητα που έχει **μέτρο** (αριθμός που περιγράφει πόσο μεγάλη είναι η φυσική ποσότητα) και **κατεύθυνση** στο χώρο.



“Διάνυσμα είναι η μαθηματική εικόνα ή μαθηματική παράσταση ενός διανυσματικού μεγέθους”



Δύο σημεία A & B όπου το ένα χαρακτηρίζεται ως **αρχή** (A) και το άλλο ως **πέρας** (B), μαζί με το τμήμα που ορίζουν αυτά τα σημεία αποτελεί μια καλή **απεικόνιση** ενός διανυσματικού μεγέθους.

“Ονομάζουμε διάνυσμα ένα ευθύγραμμο τμήμα, με ορισμένα άκρα, μαζί με μια φορά πάνω σε αυτό το τμήμα”

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της **μετατόπισης** για να κατανοήσουμε τις βασικές ιδιότητες των διανυσμάτων.

Τελική θέση: P_2

Πέρασ

$\vec{A}$

Αρχή

Αρχική θέση: P_1

Το μέτρο διανύσματος είναι μια βαθμωτή ποσότητα (πάντα θετική). Περιγράφει την ένταση/ισχύ του διαν. μεγέθους (άνεμος, δύναμη, μετατόπιση).

$$A = |\vec{A}|$$

Τελική θέση: P_2

$\vec{A}$

Αρχική θέση: P_1

Τελική θέση: P_4

$\vec{B}$

Αρχική θέση: P_3

Βόρειος vs Νότιος άνεμος

$\vec{A}$

$\vec{C}$

$\vec{B}$

$\vec{D}$

$$\vec{C} = -\vec{D}$$

Αν δυο διανύσματα έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** τότε είναι **αντίρροπα**.

Αν επιπλέον έχουν και το **ίδιο μέτρο** τότε λέγονται **αντίθετα**.

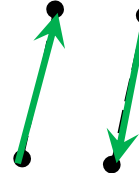
Αν δυο διανύσματα έχουν την **ίδια διεύθυνση** (ακόμα και αν έχουν διαφορετικό μέτρο) τότε είναι **παράλληλα**.

Αν δυο διανύσματα (όπου και να βρίσκονται στο χώρο) έχουν την **ίδια κατεύθυνση** και **ίδιο μέτρο** τότε είναι **ίσα**.

Αντίρροπα

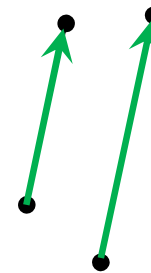


Αντίθετα

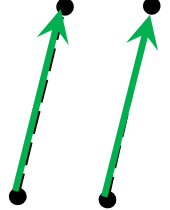


Ίδιο μέτρο

Παράλληλα



Ίσα

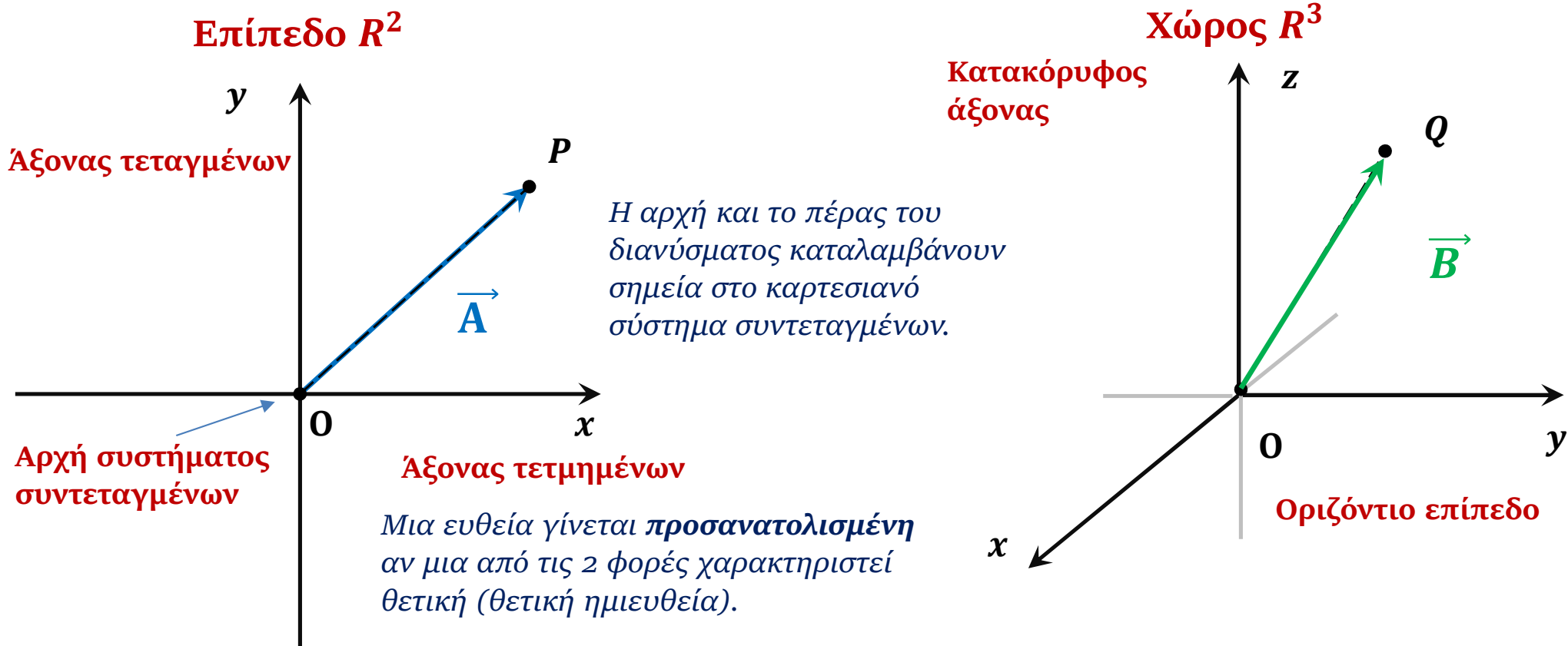


Ίδιο μέτρο

Ισχύει για διανύσματα που βρίσκονται οπουδήποτε στο χώρο

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Ένα διάνυσμα στο επίπεδο (2D) ή στο χώρο (3D) ορίζεται όταν οριστούν τα σημεία της αρχής και πέρατος. Ο ορισμός απαιτεί τη χρήση **καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων**.



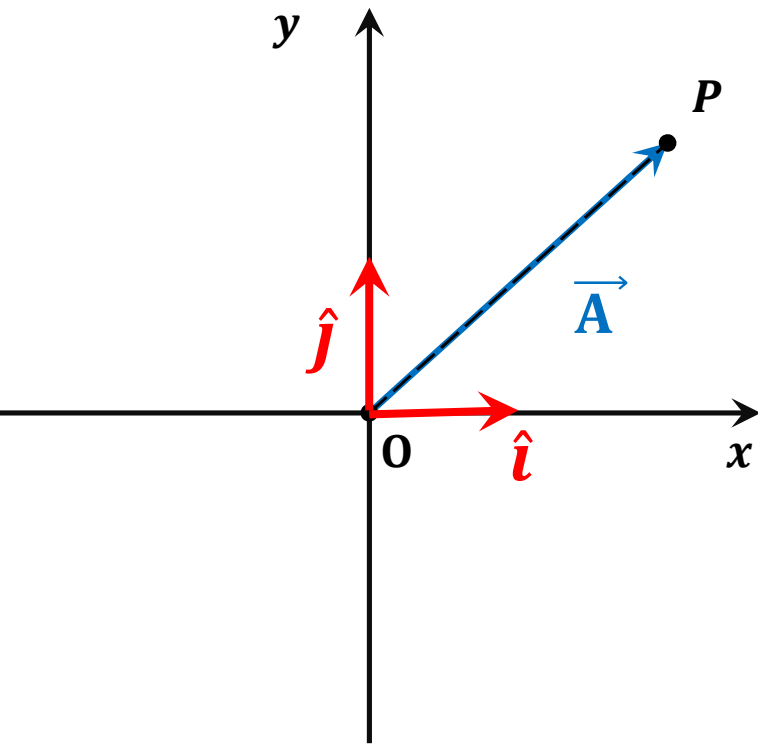
Το σύστημα συντεταγμένων του Καρτέσιου στο επίπεδο ορίζεται με τη βοήθεια δύο **προσανολισμένων ευθειών** οι οποίες τέμνονται κάθετα στο σημείο O .

Το σύστημα συντεταγμένων του Καρτέσιου στον τρισδιάστατο χώρο ορίζεται με τη βοήθεια **τριών** **προσανολισμένων ευθειών** οι οποίες τέμνονται κάθετα στο σημείο O . Εκτός από τους **οριζόντιους άξονες x & y** ορίζεται και **τρίτος άξονας z** , ο οποίος είναι **κάθετος** στο επίπεδο που ορίζουν οι x & y .

ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

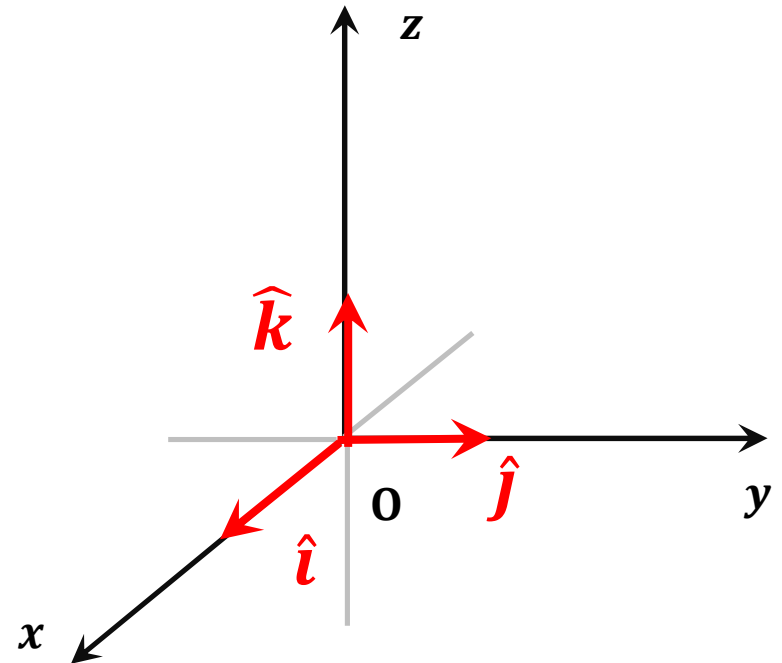
Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ορίζονται **μοναδιαία διανύσματα** τα οποία έχουν μέτρο ίση με την μονάδα. Μοναδική τους χρήση είναι να **δείχνουν προς τη θετική κατεύθυνση των προσανατολισμένων αξόνων**.

Επίπεδο R^2



$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

Χώρος R^3

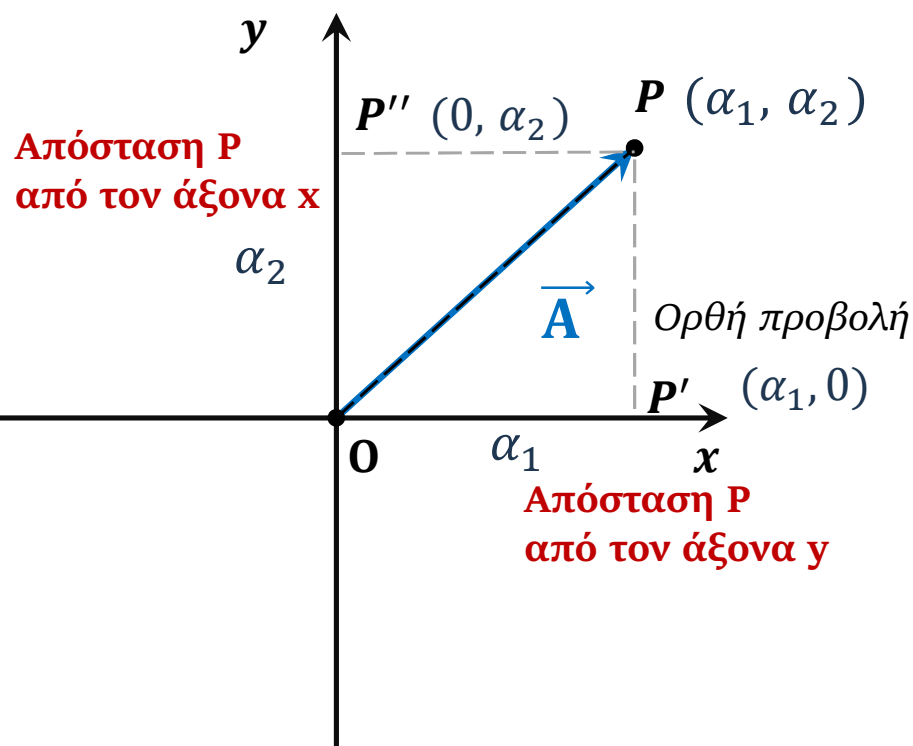


$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Η **αρχή** και **πέρας** ενός διανύσματος προσδιορίζονται σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων 2D ή 3D, με τη βοήθεια ενός ζεύγους ή τριάδας αριθμών, αντίστοιχα. Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται **συντεταγμένες αρχής** και **πέρατος** του διανύσματος.

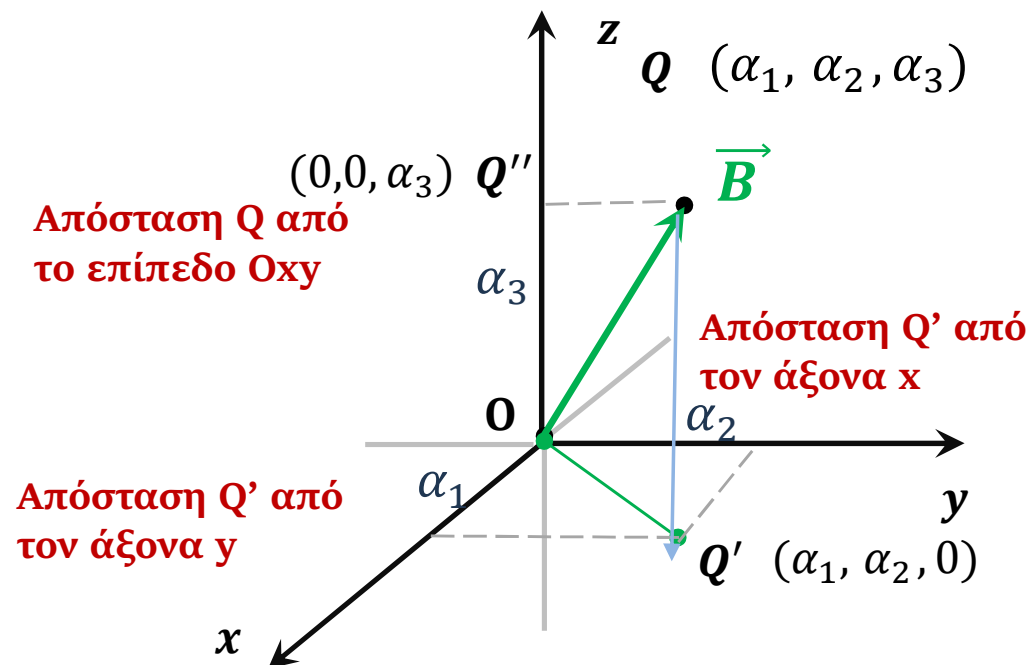
Επίπεδο R^2



Τετμημένη α_1 : Απόσταση από άξονα y

Τεταγμένη α_2 : Απόσταση από άξονα x

Χώρος R^3



Από το σημείο Q βρίσκουμε την προβολή του στο επίπεδο Oxy , φέρνοντας παράλληλη στον άξονα Oz , η οποία τέμνει κάθετα το επίπεδο.

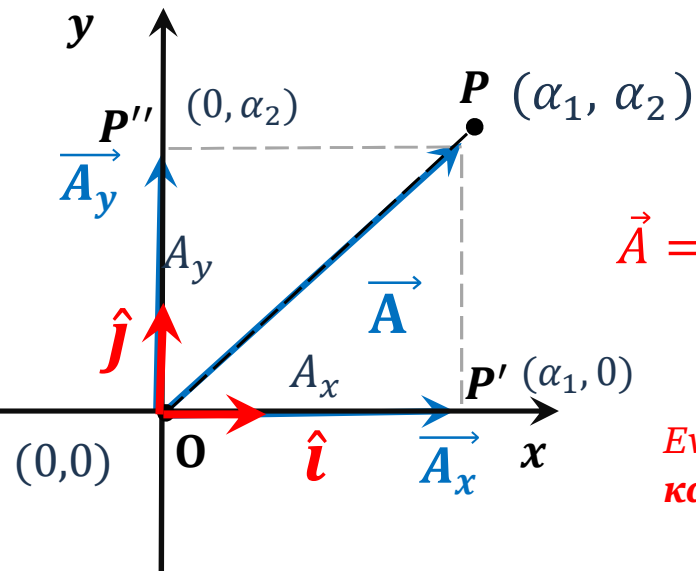
Η τριάδα αριθμών της αρχής και του πέρατος του διανύσματος ορίζει με μοναδικό τρόπο το διάνυσμα.

ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Οι πράξεις με διανύσματα διευκολύνονται με την εύρεση των **συνιστωσών** διανυσμάτων.

Διάνυσμα με αρχή το Ο

Επίπεδο R^2



$$\vec{A} = (A_x \ A_y)$$

$$\vec{B} = (B_x \ B_y)$$

Εναλλακτική γραφή
κάθετων συνιστωσών

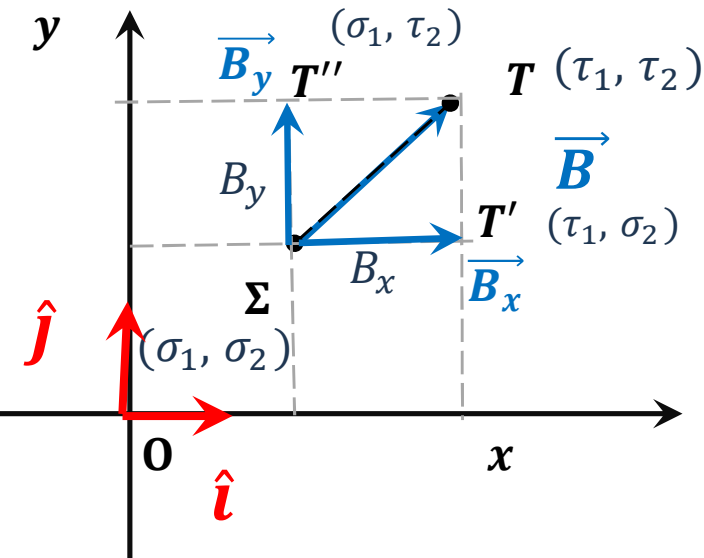
$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

$$(\alpha_1 - 0)\hat{i} + (\alpha_2 - 0)\hat{j} = \alpha_1 \hat{i} + \alpha_2 \hat{j}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Διάνυσμα με αρχή το Σ

Επίπεδο R^2



$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} =$$

$$(\tau_1 - \sigma_1)\hat{i} + (\tau_2 - \sigma_2)\hat{j}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

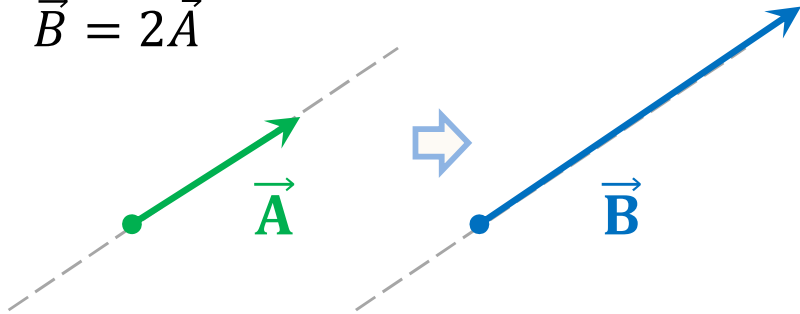
Αν το $\vec{A}$ αντιστοιχεί σε μετατόπιση, τότε η μετατόπιση από το Ο στο Ρ μπορεί εναλλακτικά να καλυφθεί πηγαίνοντας απόσταση A_x προς την κατεύθυνση $+x$ ($\hat{i}$) και μετά απόσταση A_y προς την κατεύθυνση $+y$ ($\hat{j}$).

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ (I)

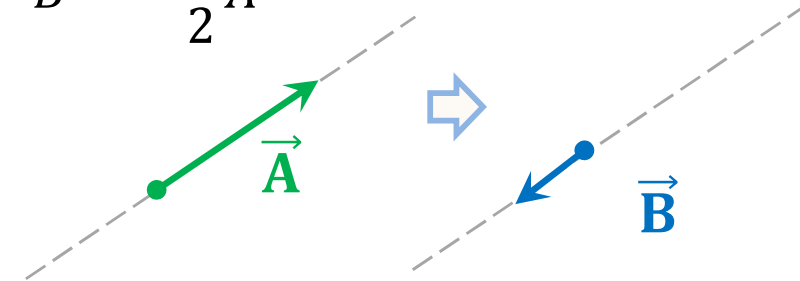
Αριθμητικό πολλαπλάσιο

Χρήση διαγραμμάτων υπό κλίμακα

$$\vec{B} = 2\vec{A}$$

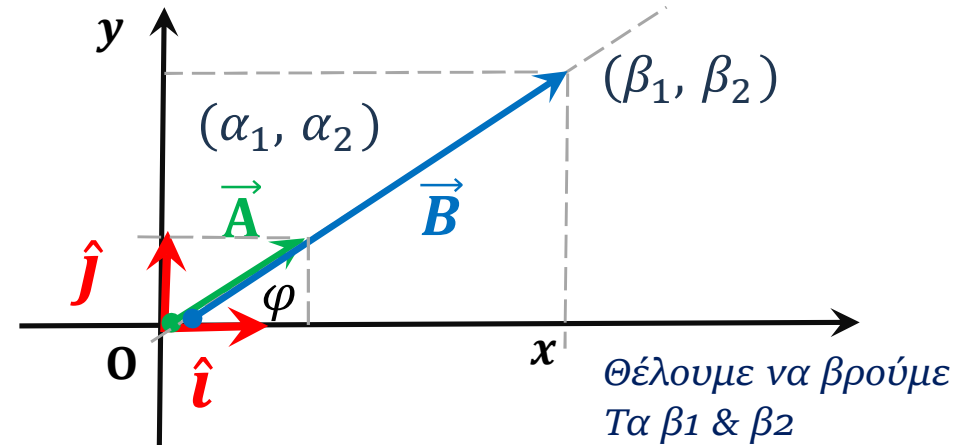


$$\vec{B} = -\frac{1}{2}\vec{A}$$



Πολλαπλασιασμός με σταθερά δεν αλλάζει τη **διεύθυνση** του διανύσματος παρά μόνο τη φορά (κατεύθυνση) ή/και το μέτρο του

Χρήση συνιστωσών



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} = \alpha_1 \hat{i} + \alpha_2 \hat{j}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} = \beta_1 \hat{i} + \beta_2 \hat{j}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \quad |\vec{B}| = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$$

$$\left. \begin{aligned} |\vec{B}| &= 2|\vec{A}| \Rightarrow \beta_1^2 + \beta_2^2 = 4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \\ \tan \varphi &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1} \end{aligned} \right\}$$

Προσοχή: Γενικά

$$\beta_1 \neq 2\alpha_1$$

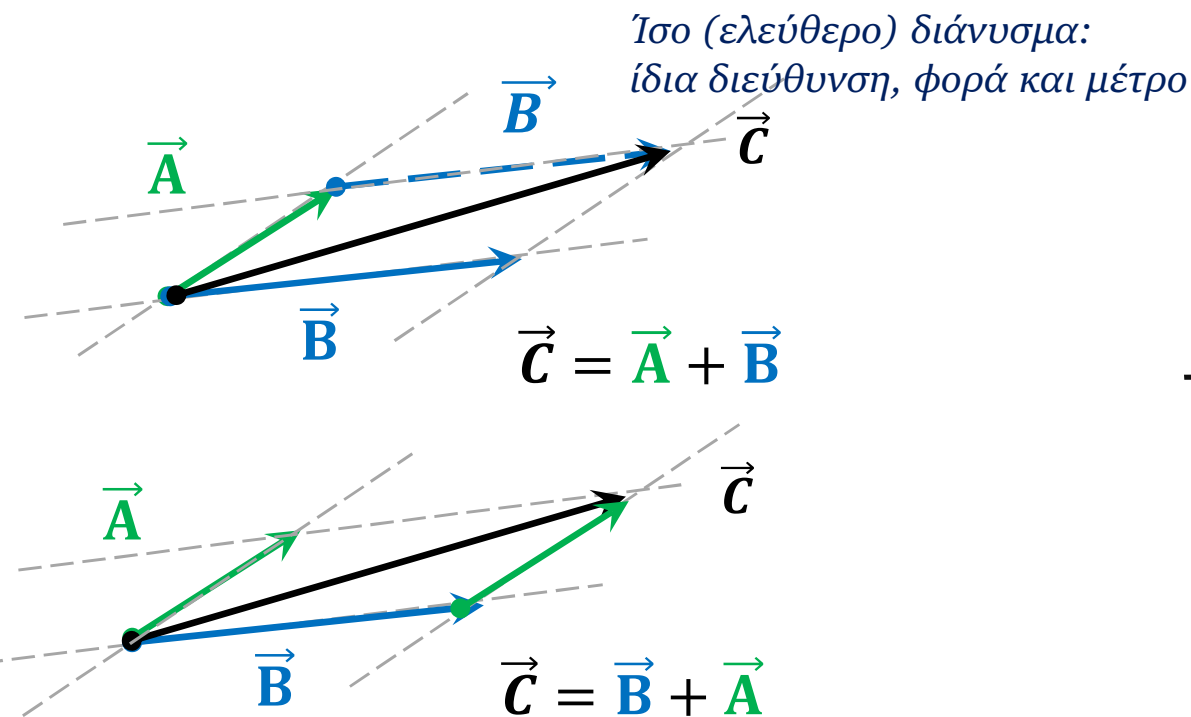
$$\beta_2 \neq 2\alpha_2$$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ (II)

Άθροισμα διανυσμάτων

Χρήση διαγραμμάτων υπό κλίμακα

Ίσο (ελεύθερο) διάνυσμα:
ίδια διεύθυνση, φορά και μέτρο

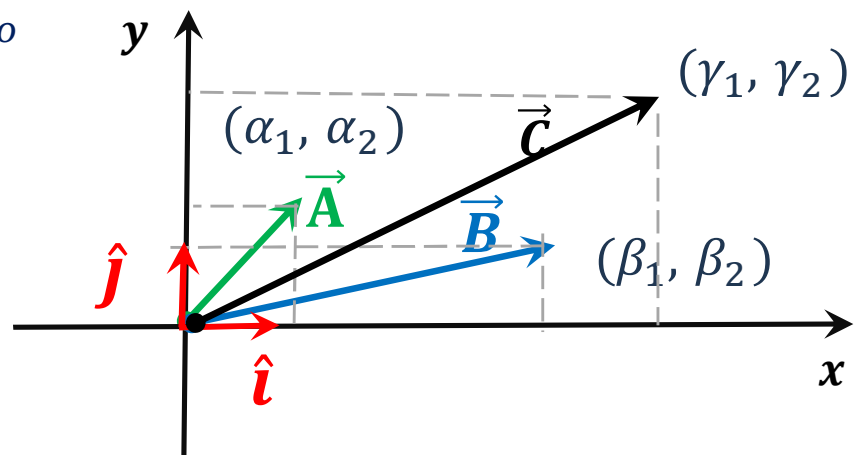


Μνημονικός κανόνας:
σχηματισμός παραλληλογράμμου

Τοποθετούμε την αρχή του δεύτερου διανύσματος στο πέρας του πρώτου (διαδοχικά).

Ισχύει ο **νόμος της μετάθεσης**, δεν έχει σημασία η σειρά πρόσθεσης των διανυσμάτων.

Χρήση συνιστωσών



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} = \alpha_1 \hat{i} + \alpha_2 \hat{j}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} = \beta_1 \hat{i} + \beta_2 \hat{j}$$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \alpha_1 \hat{i} + \alpha_2 \hat{j} + \beta_1 \hat{i} + \beta_2 \hat{j} =$$

$$(\alpha_1 + \beta_1) \hat{i} + (\alpha_2 + \beta_2) \hat{j} = \gamma_1 \hat{i} + \gamma_2 \hat{j}$$

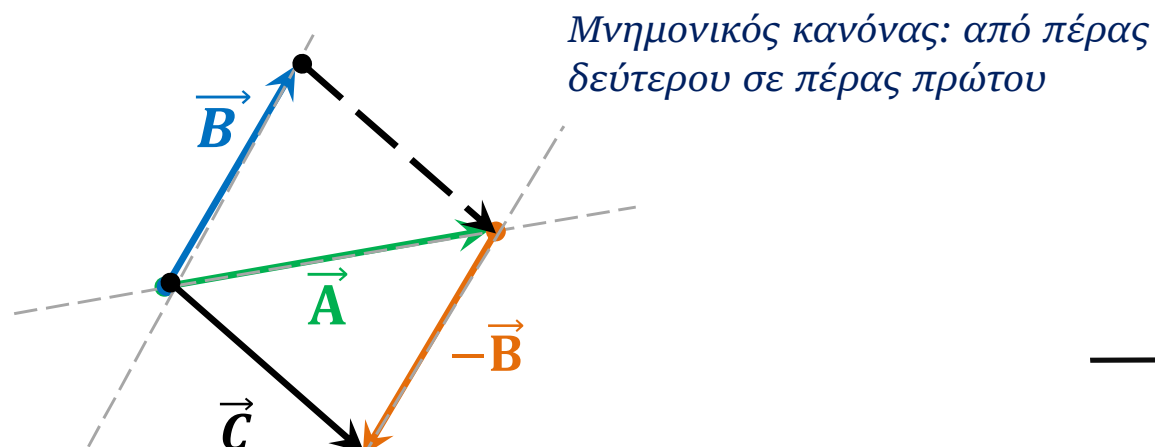
$$\vec{C} = \vec{C}_x + \vec{C}_y = C_x \hat{i} + C_y \hat{j} = \gamma_1 \hat{i} + \gamma_2 \hat{j}$$

Προσοχή: Γενικά δεν ισχύει $|\vec{C}| = |\vec{A}| + |\vec{B}|$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ (III)

Διαφορά διανυσμάτων

Χρήση διαγραμμάτων υπό κλίμακα

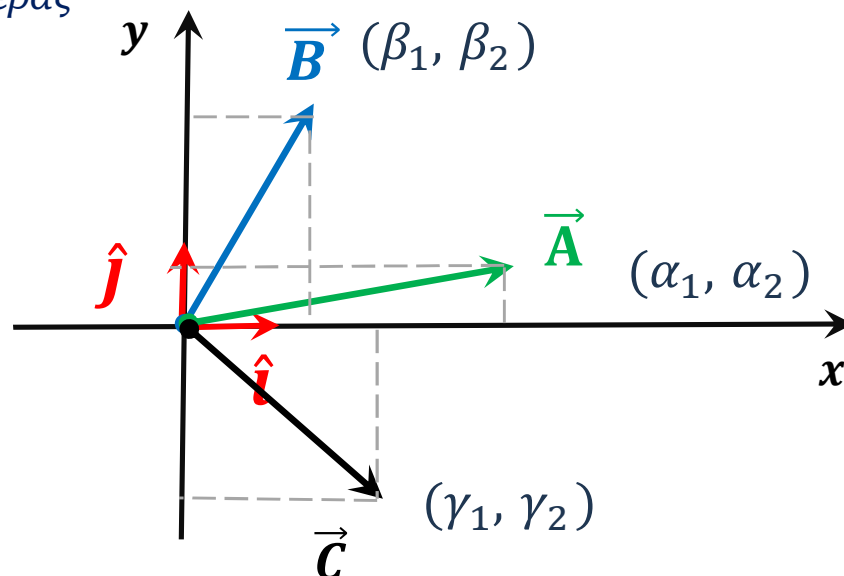


$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

Ουσιαστικά βρίσκουμε το αντίθετο του δεύτερου διανύσματος και τοποθετούμε την αρχή του νέου διανύσματος στο πέρας του πρώτου (διαδοχικά).

Όταν το β_2 είναι πολύ μεγαλύτερο του α_2 (όπως συμβαίνει στο επάνω παράδειγμα) τότε το πέρας της διαφοράς θα έχει αρνητική τεταγμένη.

Χρήση συνιστωσών



$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} = \alpha_1 \hat{i} + \alpha_2 \hat{j}$$

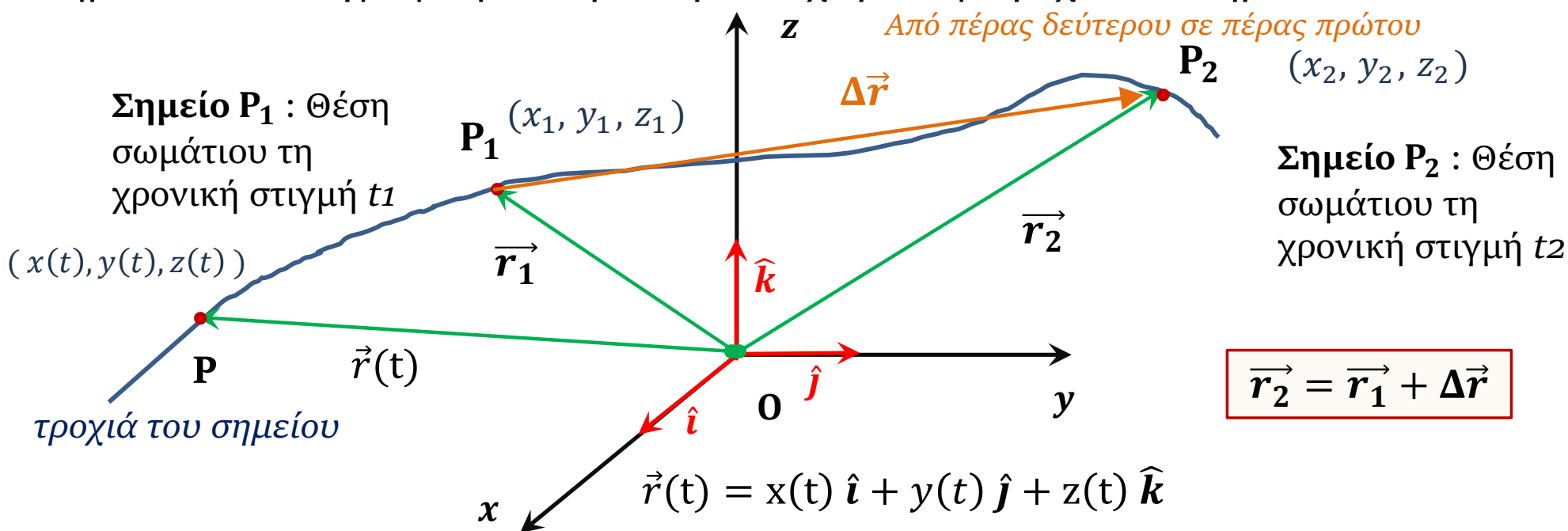
$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} = \beta_1 \hat{i} + \beta_2 \hat{j}$$

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = (\alpha_1 - \beta_1) \hat{i} + (\alpha_2 - \beta_2) \hat{j}$$

$$\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j} = \gamma_1 \hat{i} + \gamma_2 \hat{j}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΗΣ

Διάνυσμα θέσεως: δέσμιο διάνυσμα, με αρχή του στην αρχή των αξόνων. Καθώς ο χρόνος t μεταβάλλεται, η κορυφή του διανύσματος κινείται μαζί με το κινούμενο σημείο P και διαγράφει μια καμπύλη στον χώρο, την τροχιά του σημείου.



$$\vec{r}_1 = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k}$$

$$\vec{r}_2 = x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k}$$

Οι τριάδες συντεταγμένων δίνουν τις θέσεις του σωμάτιου (πέρας διανύσματος θέσεως) τις χρονικές στιγμές t_1 & t_2 .

$$\vec{P}_{12} = \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \quad \text{Διάνυσμα μετατόπισης}$$

Εισαγωγή στις πραγματικές συναρτήσεις

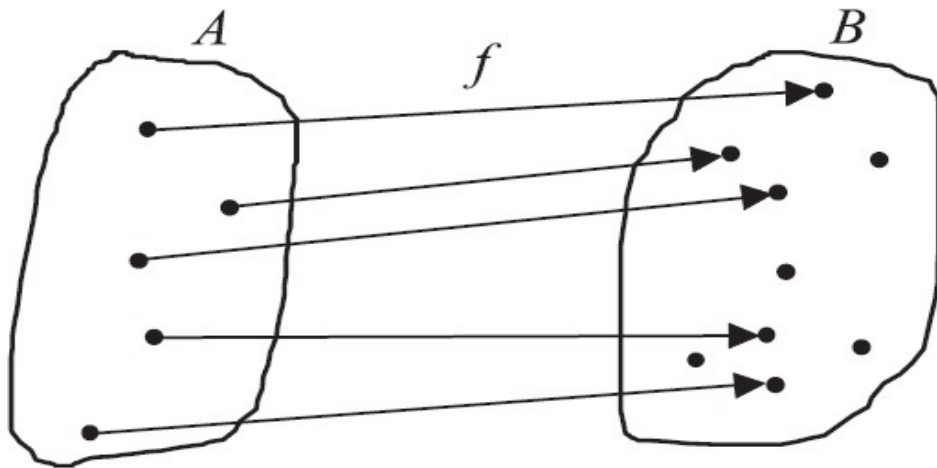


Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, καλούμε ως **πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού** το A μια **διαδικασία** f , κατά την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Πεδίο ορισμού f

Σύνολο τιμών f

ΣΥΜΒΟΛΙΚΑ



$$f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) \equiv y$$

Ανεξάρτητη μεταβλητή

Εξαρτημένη μεταβλητή

Πεδίο ορισμού $A = (0, e]$
είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
Πεδίο τιμών f είναι $\mathbb{R}$.

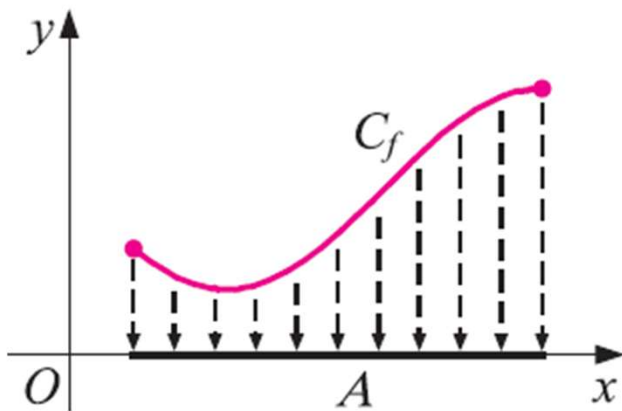
$$f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$$

$$\text{Ορίζεται μόνο αν } 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln e \Leftrightarrow 0 < x \leq e$$

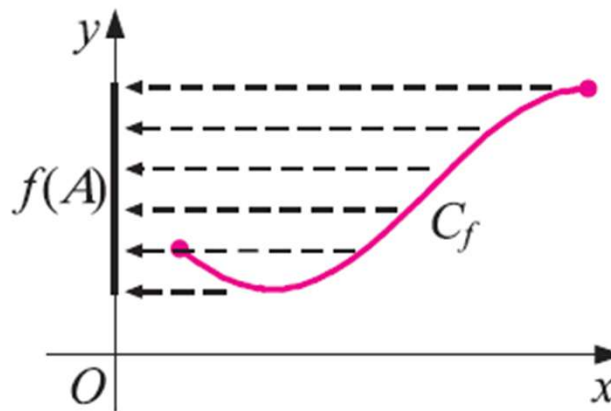
ΚΑΜΠΥΛΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . **Γραφική παράσταση ή καμπύλη C_f** της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy καλείται το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ για όλα τα $x \in A$.

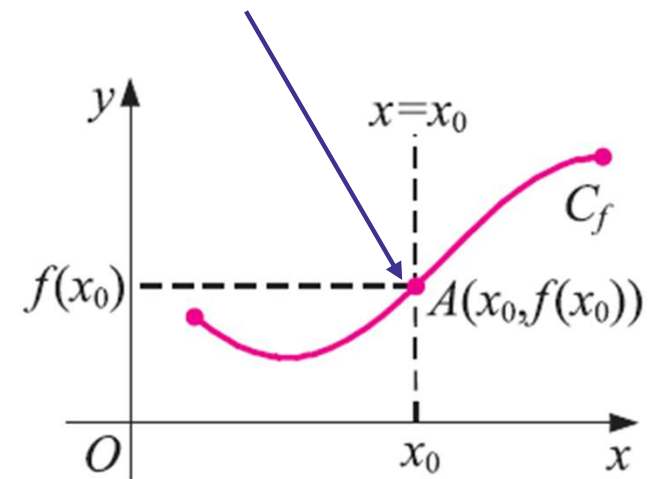
Πεδίο ορισμού A



Σύνολο τιμών $f(A)$



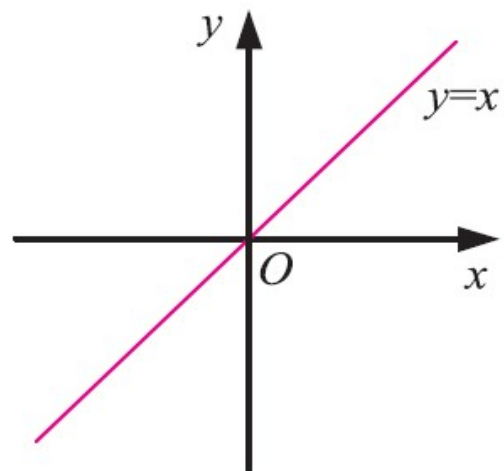
Σημείο του επιπέδου $M(x, y)$ ανήκει στην καμπύλη μόνο όταν $y=f(x)$



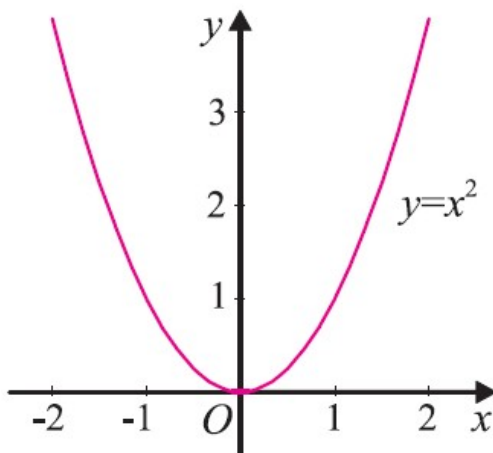
Η εξίσωση $y=f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x, y) που είναι συντεταγμένες σημείων της καμπύλης C_f και καλείται **εξίσωση της γραφικής παράστασης της f** .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

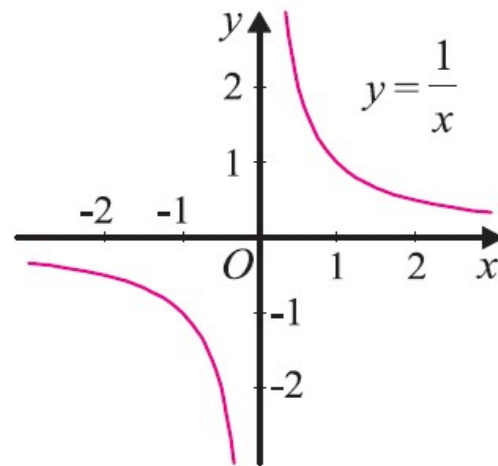
Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.



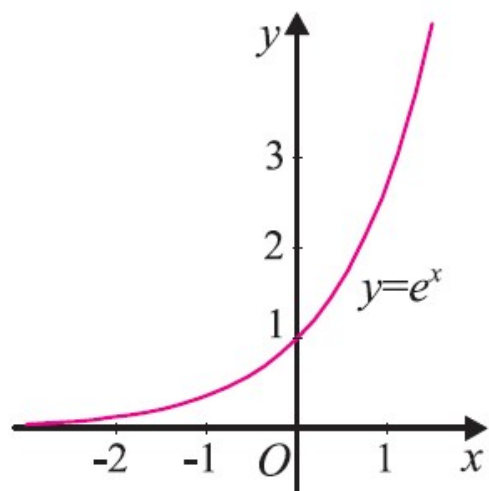
Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι μια παραβολή.



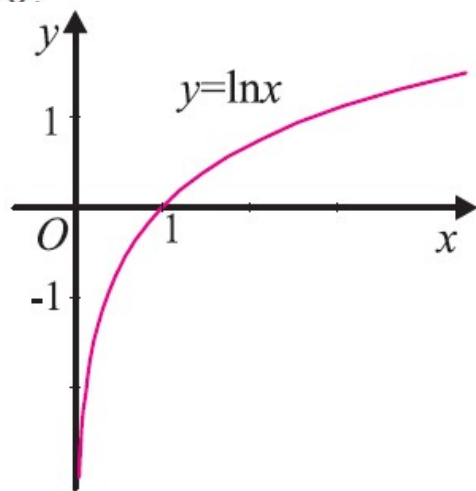
Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή.



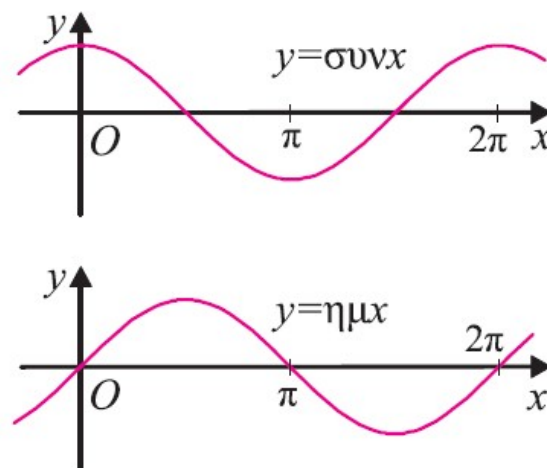
Η καμπύλη της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = e^x$ είναι “πάνω” από τον άξονα x , αφού $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.



Η καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \ln x$ είναι “δεξιά” του άξονα yy' , αφού ο λογάριθμος ορίζεται μόνο για $x > 0$.



Οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π .



A. Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής

Α. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ Πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής



Έστω $f : x \rightarrow f(x)$ $x, f(x) \in \mathcal{R}$, $\alpha < x < \beta$

Έστω σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν το παρακάτω όριο της συνάρτησης υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και ορίζεται ως εξής:

$$f'(x_0) \equiv \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \equiv \frac{df(x_0)}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

 “ f τονούμενο του x_0 ”

Η έννοια της παραγώγου σε σημείο x_0 γίνεται κατανοητή ως

1. **Κλίση** της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο x_0 (Γεωμετρία).
2. **Ρυθμός μεταβολής** ή «ταχύτητα» της συνάρτησης.
3. Εργαλείο στη **γραμμική προσέγγιση συνάρτησης** στη περιοχή του σημείου x_0

Παράγωγος συνάρτηση

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

Όταν A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη **παράγωγο συνάρτηση**

$$\begin{array}{l} f' : A_1 \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f'(x) \end{array}$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f** ή απλά **παράγωγος της** και συμβολίζεται με $\frac{df(x)}{dx}$. Η παράγωγος $y = f'(x)$ συμβολίζεται και ως $y = (f(x))'$.

Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της f και συμβολίζεται με f''

Επαγωγικά ορίζονται παράγωγοι ανώτερης τάξεως. Η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης f συμβολίζεται ως $f^{(n)}$ ή $\frac{d^n f}{dx^n}$ βάσει του παρακάτω κανόνα

$$f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} \right]$$

1. Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

$$\frac{dc}{dx} = 0$$

c: σταθερά

$$\frac{dx^\nu}{dx} = \nu x^{\nu-1}$$

$\nu \in \mathbb{N}$: φυσικός αριθμός

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

$\nu=1$

$$\frac{dx^\rho}{dx} = \rho x^{\rho-1}$$

$\rho \in \mathbb{Q}$: ρητός αριθμός

$\mathbb{Q} = \{\frac{\alpha}{\beta}, \alpha \text{ \& } \beta \text{ ακέραιοι με } \beta \neq 0\}$

Άρρητος $\pi=3.14159....$

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{d e^x}{dx} = e^x$$

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$$

Βάση φυσικού λογαρίθμου

$\ln x \equiv \log_e x$

$e=2,71828..$

2α. Ιδιότητες της παραγώγου

$$\frac{d(f_1 + f_2)}{dx} = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dx}$$

$$f_1=f_1(x) \text{ \& } f_2=f_2(x)$$

$$\frac{d(cf)}{dx} = c \frac{df}{dx}$$

c: σταθερά

$$\frac{d(fg)}{dx} = f \frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx} g$$

$$f=f(x) \text{ \& } g=g(x)$$

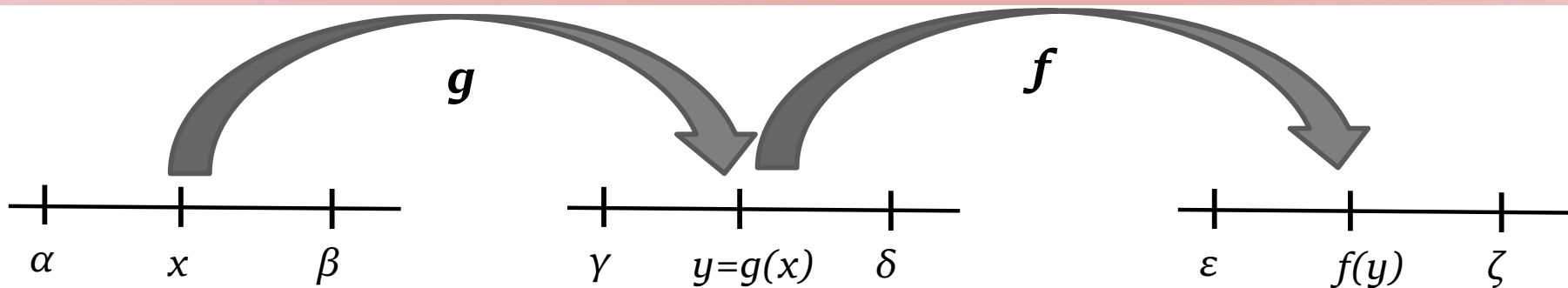
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \left(\frac{1}{g^2} \right) \left(\frac{df}{dx} g - f \frac{dg}{dx} \right)$$

$$g(x) \neq 0$$

$$\frac{d}{dx} [f(g(x))] = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$

$f(g(x))$ σύνθετη συνάρτηση

2β. Σύνθεση συναρτήσεων



Αν συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$ και f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η **σύνθεσή** τους $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $F = \sqrt{x^2 + 1}$ παρατηρούμε ότι προκύπτει αν στην $f(y) = \sqrt{y} = \sqrt{g(x)}$ θέσουμε όπου y το $g(x) = x^2 + 1$. Δηλαδή είναι $F(x) = f(g(x))$.

Δηλαδή για να παραγωγίσουμε τη σύνθετη συνάρτηση $f(g(x))$, σε πρώτη φάση παραγωγίζουμε την f σαν να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την $g(x)$ και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο της g (ως προς x).

3α. Παραδείγματα

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{d\sqrt{x^2 + a^2}}{dx} = ?$$

$$\frac{dx^\rho}{dx} = \rho x^{\rho-1}$$

3α. Παραδείγματα

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{d\sqrt{x^2 + a^2}}{dx} = ?$$

$$\frac{dx^\rho}{dx} = \rho x^{\rho-1}$$

Η σύνθετη συνάρτηση $F = \sqrt{x^2 + a^2}$ παρατηρούμε ότι προκύπτει αν στην $f(y) = \sqrt{y} = y^{1/2}$ θέσουμε όπου y το $g(x) = x^2 + a^2$. Δηλαδή είναι $F(x) = f(g(x))$.

$$f'(y) = \frac{df}{dy} = \frac{1}{2} (y)^{-1/2} = \frac{1}{2} (x^2 + a^2)^{-1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$g'(x) = \frac{dg}{dx} = 2x$$

$$\frac{d\sqrt{x^2 + a^2}}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

3β. Παραδείγματα

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{de^{\sin x}}{dx} = ?$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

3β. Παραδείγματα

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{de^{\sin x}}{dx} = ?$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

Η σύνθετη συνάρτηση $F = e^{\sin x}$ παρατηρούμε ότι προκύπτει αν στην $f(y) = e^y$ θέσουμε όπου y το $g(x) = \sin x$. Δηλαδή είναι $F(x) = f(g(x))$.

$$f'(y) = \frac{df}{dy} = e^y = e^{\sin x}$$

$$g'(x) = \frac{dg}{dx} = \cos x$$

$$\frac{de^{\sin x}}{dx} = e^{\sin x} \cos x$$

3γ. Παραδείγματα

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sin x} \right) = ?$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

3γ. Παραδείγματα

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sin x} \right) = ?$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Η σύνθετη συνάρτηση $F(x) = \frac{1}{\sin x}$ παρατηρούμε ότι προκύπτει αν στην $f(y) = \frac{1}{y}$ θέσουμε όπου y το $g(x) = \sin x$. Δηλαδή είναι $F(x) = f(g(x))$.

$$h \equiv h(x)$$

$$s \equiv s(x) \neq 0$$

$$g'(x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{h}{s} \right) = \left(\frac{1}{s^2} \right) \left(\frac{dh}{dx} s - h \frac{ds}{dx} \right)$$

$$f'(g(x)) = ?$$

$$f'(y) = \left(\frac{1}{y^2} \right) \left(\frac{d}{dy} y - 1 \frac{dy}{dy} \right) = \left(\frac{1}{y^2} \right) (0 - 1) = -\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sin x} \right) = -\frac{1}{\sin^2 x} \cos x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής



Έστω $f : x \rightarrow f(x)$ $x, f(x) \in \mathcal{R}$, $\alpha < x < \beta$

Έστω σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν το παρακάτω όριο της συνάρτησης υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και ορίζεται ως εξής:

$$f'(x_0) \equiv \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \equiv \frac{df(x_0)}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

 “ f τονούμενο του x_0 ”

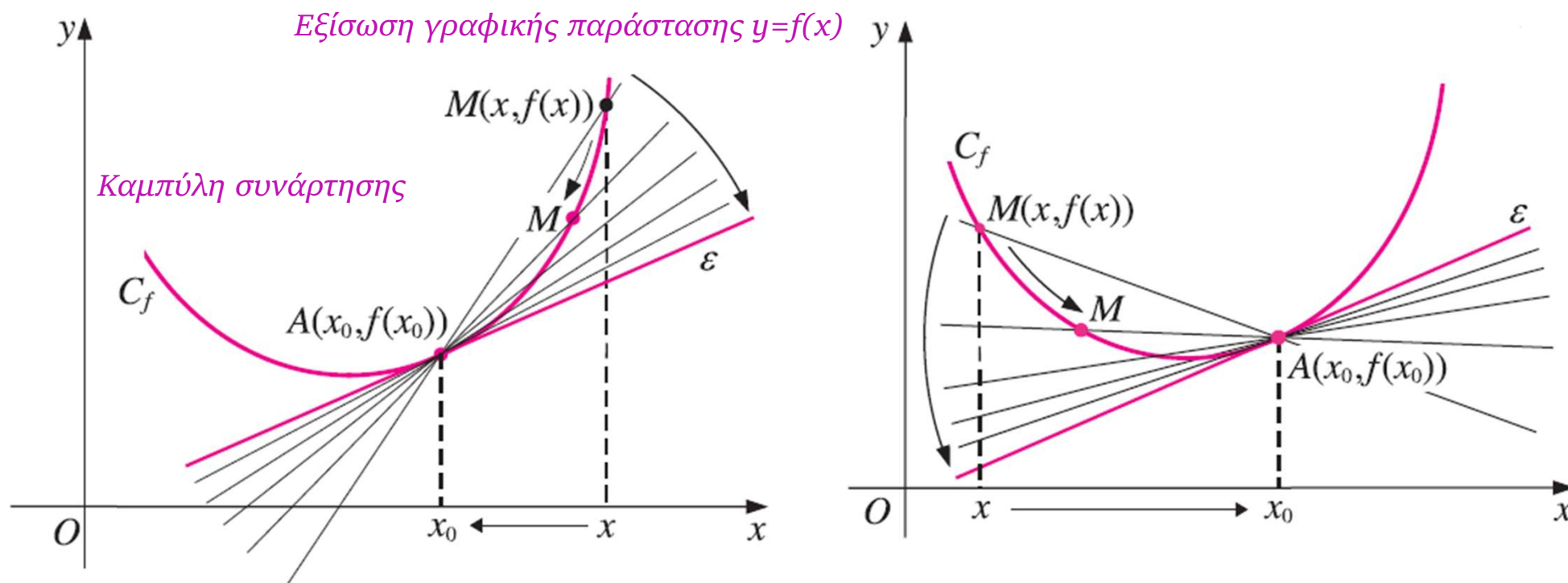
Η έννοια της παραγώγου σε σημείο x_0 γίνεται κατανοητή ως

1. **Κλίση** της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο x_0 (Γεωμετρία).
2. **Ρυθμός μεταβολής** ή «ταχύτητα» της συνάρτησης.
3. Εργαλείο στη **γραμμική προσέγγιση συνάρτησης** στη περιοχή του σημείου x_0

Εφαπτομένη & τέμνουσα καμπύλης



Έστω σημείο $A(x_0, f(x_0))$ καμπύλη C_f της συνάρτησης f και ένα επιπλέον σημείο $M(x, f(x))$, τα οποία ορίζουν την ευθεία AM (τέμνουσα της καμπύλης).



Όταν x πλησιάζει το x_0 , είτε από δεξιά ($x > x_0$) είτε από αριστερά ($x < x_0$), η τέμνουσα λαμβάνει μια **οριακή θέση (ϵ)** έχοντας ένα και **μόνο σημείο τομής** με την καμπύλη. Η τελευταία ονομάζεται **εφαπτομένη** της καμπύλης στο σημείο A .

Κλίση και εξίσωση τέμνουσας ευθείας

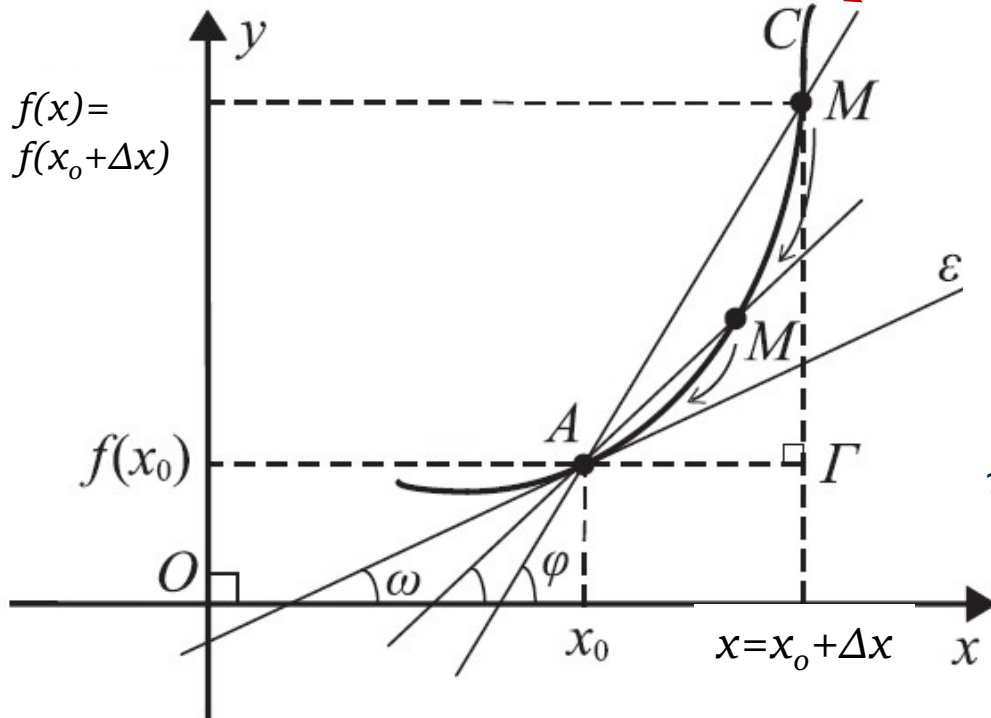


Ερώτηση: Ποια η κλίση και η εξίσωση μιας τέμνουσας ευθείας;

Περίπτωση $\Delta x \neq 0$

Πεπερασμένο

Τότε η ευθεία που διέρχεται από το Α τέμνει την καμπύλη και στο σημείο Μ. Σχηματίζει γωνία ϕ με οριζόντιο άξονα.



Κλίση ή συντελεστής διεύθυνσης της
τέμνουσας ευθείας ΑΜ

$$\tan \phi = \lambda = \frac{M\Gamma}{A\Gamma} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Η ποσότητα αυτή αντιπροσωπεύει τη μεταβολή της τιμής της f ως προς τη μεταβολή του x ή αλλιώς $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Μ

$$y = f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \tan \phi = f(x_0) + \lambda(x - x_0)$$

Σχηματίζει γωνία ϕ με τον οριζόντιο άξονα. Η ευθεία αυτή για κάθε $\Delta x \neq 0$ τέμνει τοπικά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε δύο σημεία.

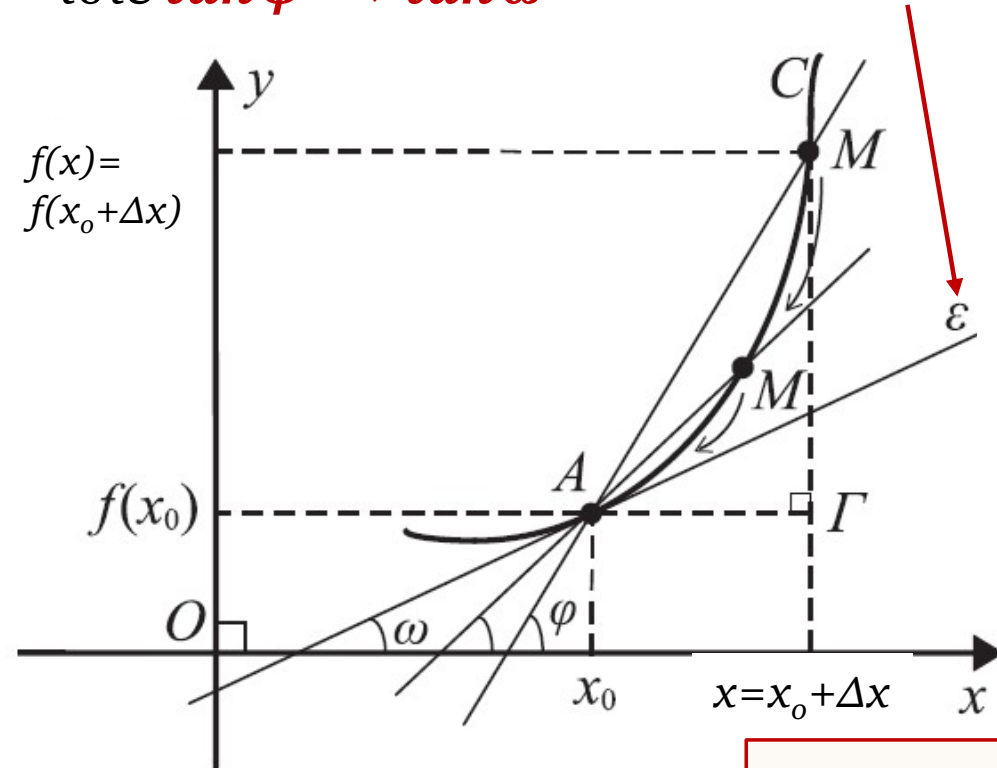
Κλίση και εξίσωση εφαπτομένης ευθείας



Ερώτηση: Ποιά η κλίση και η εξίσωση μιας εφαπτομένης ευθείας στο σημείο A;

Περίπτωση $\Delta x \Rightarrow 0$
τότε $\tan \varphi \Rightarrow \tan \omega$

Τότε η ευθεία που διέρχεται από το A είναι εφαπτομένη αφού το M σχεδόν ταυτίζεται με το A. Σχηματίζει γωνία $\varphi = \omega$ με οριζόντιο άξονα.



Κλίση ή συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο A είναι

$\tan \omega = \lambda = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{df(x_0)}{dx}$

Ορισμός παραγώγου

Η ποσότητα αυτή αντιστοιχεί στη μεταβολή της τιμής της f ως προς την μεταβλητή x στο σημείο x_0 ή αλλιώς $\frac{df(x_0)}{dx} = \tan \omega$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης C_f στο σημείο A

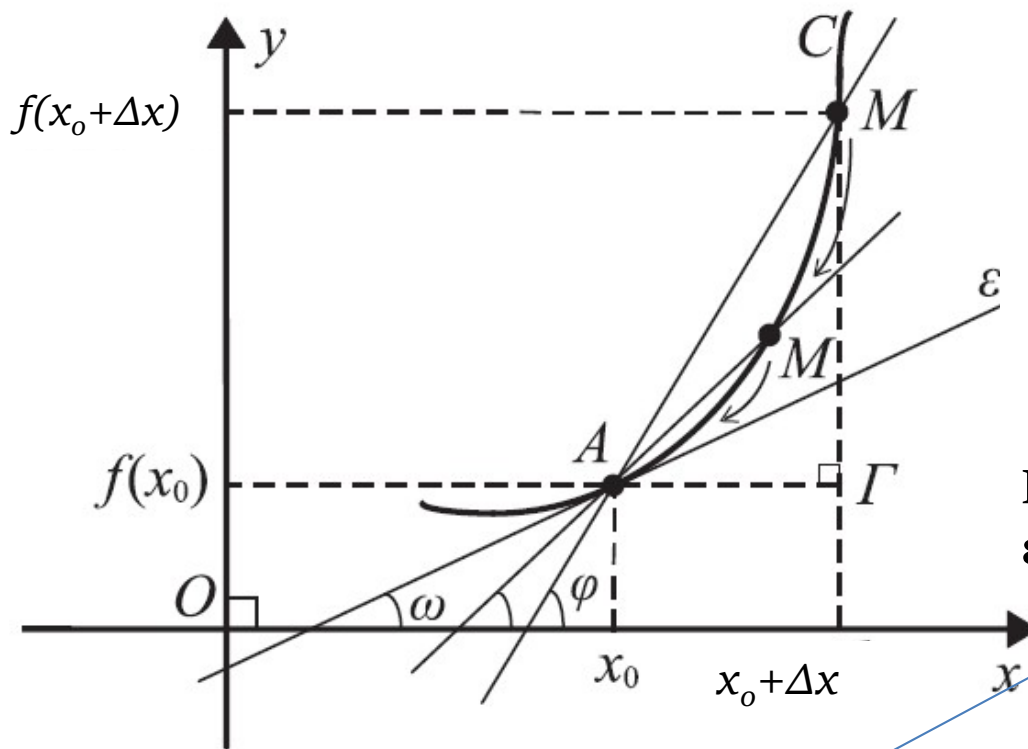
$$\begin{aligned} y = f(x) &= f(x_0) + \tan \omega (x - x_0) = f(x_0) + \lambda (x - x_0) \\ &= f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) (x - x_0) \end{aligned}$$

Η ευθεία αυτή έχει τοπικά (στην περιοχή του σημείο x_0) μόνο ένα κοινό σημείο με τη C_f . Εφάπτεται δηλαδή της καμπύλης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

4α. Γεωμετρική Προσέγγιση



Αν υπάρχει το $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .



$$f'(x_0) \equiv \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \equiv \frac{df(x_0)}{dx}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης στο $x = x_0$ είναι η **κλίση** της εφαπτομένης ευθείας.

$$y = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) (x - x_0)$$

4β. Ρυθμός μεταβολής συνάρτησης



- Περίπτωση $\Delta x \neq 0$

Σχετική μεταβολή της τιμής της συνάρτησης f ως προς τη μεταβολή της μεταβλητής x

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Περίπτωση $\Delta x \Rightarrow 0$

Ρυθμός μεταβολής της τιμής της f ή “ταχύτητα” της συνάρτησης στο σημείο $x = x_0$

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

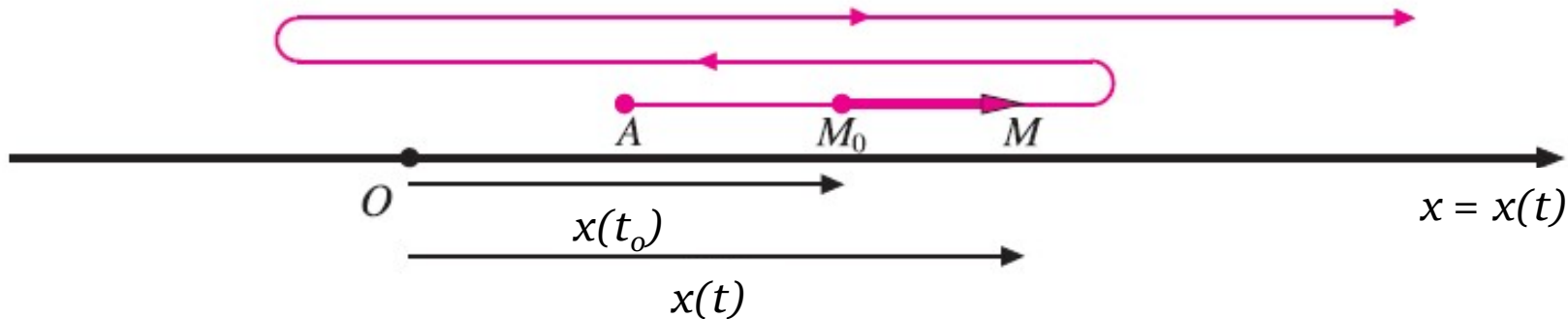
Παράδειγμα: Η **στιγμιαία ταχύτητα** ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η **θέση** του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0 , $v(t_0) = f'(t_0) \equiv \frac{df(t_0)}{dt}$

δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς t όταν $t = t_0$.

Η παράγωγος εκφράζει το **ρυθμό μεταβολής** ή **ταχύτητα** μιας συνάρτησης

Παράδειγμα: Στιγμιαία ταχύτητα

Θεωρούμε κίνηση σώματος σε **μια διάσταση** όπου η **συνάρτηση θέσης** $x(t)$ καθορίζει τη θέση του κινητού κατά μήκος του άξονα κατά τη χρονική στιγμή t .



Με τη παρέλευση χρόνου $\Delta t = t - t_0$ το κινητό μετακινείται από το σημείο M_0 στο M διανύοντας απόσταση $\Delta x = x(t) - x(t_0)$. Η **μέση ταχύτητα** του κατά την μετακίνηση

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{Απόσταση}}{\text{Χρόνος}}$$

Αν το Δt είναι πολύ μικρό τότε έχουμε πολύ καλή προσέγγιση του **ρυθμού μεταβολής** της θέσης ή **στιγμιαίας ταχύτητας** του κινητού στο σημείο M_0 :

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \quad (\text{Παράγωγος συνάρτησης θέσεως})$$

Εφαρμογή

Θεωρούμε κίνηση σώματος σε **μια διάσταση** όπου η **συνάρτηση θέσης** $x(t)$ καθορίζει τη θέση του κινητού κατά μήκους του άξονα κατά τη χρονική στιγμή t .

$$x(t) = x_o + v_o(t - t_o) + \frac{1}{2} \alpha (t - t_o)^2$$

Ταχύτητα $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_o + \alpha (t - t_o)$

Επιτάχυνση $\alpha(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \alpha$

Το κινητό κινείται με **σταθερή επιτάχυνση α** :

Τη χρονική στιγμή $t = t_o$ βρίσκεται στη θέση x_o και έχει ταχύτητα v_o

Εφαρμογή

Θεωρούμε κίνηση σώματος σε **μια διάσταση** όπου η **συνάρτηση θέσης** $x(t)$ καθορίζει τη θέση του κινητού κατά μήκους του άξονα κατά τη χρονική στιγμή t .

$$x(t) = x_o \cos(\omega t) + \frac{v_o}{\omega} \sin(\omega t)$$

Ταχύτητα $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega x_o \sin(\omega t) + v_o \cos(\omega t)$

Επιτάχυνση $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x_o \cos(\omega t) - \omega v_o \sin(\omega t)$

Το κινητό κινείται με **μεταβλητή στο χρόνο επιτάχυνση**

$$x(0) = x_o$$

$$v(0) = v_o$$

$$a(t) = -\omega^2 \left[x_o \cos(\omega t) + \frac{v_o}{\omega} \sin(\omega t) \right] = -\omega^2 x(t)$$

4γ. Γραμμική προσέγγιση f στην περιοχή x_0 ★

Η **παράγωγος σε σημείο $x = x_0$, $f'(x_0)$** , χρησιμοποιείται για την **προσέγγιση της τιμής της f** στην ευρύτερη περιοχή του $x = x_0$

Με $\Delta x \neq 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df(x_0)}{dx} + \eta(x_0, \Delta x)$$

Παράγοντας διόρθωσης (σφάλμα στη προσέγγιση) ο οποίος εξαρτάται από το σημείο $x = x_0$ αλλά και πόσο μακριά είμαστε από το σημείο (Δx).

$$\Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \frac{df(x_0)}{dx} + \Delta x \eta(x_0, \Delta x)$$

Όταν $\Delta x \Rightarrow 0$ τότε

$$\eta(x_0, \Delta x) \Rightarrow 0$$

Αν $\frac{df(x_0)}{dx} \neq 0$ τότε μπορούμε πάντα να διαλέξουμε ένα Δx τέτοιο ώστε $\eta(x_0, \Delta x) \lll \frac{df(x_0)}{dx}$.

Αν για παράδειγμα ισχύει $\eta(x_0, \Delta x) \sim 10^{-3} \frac{df(x_0)}{dx}$

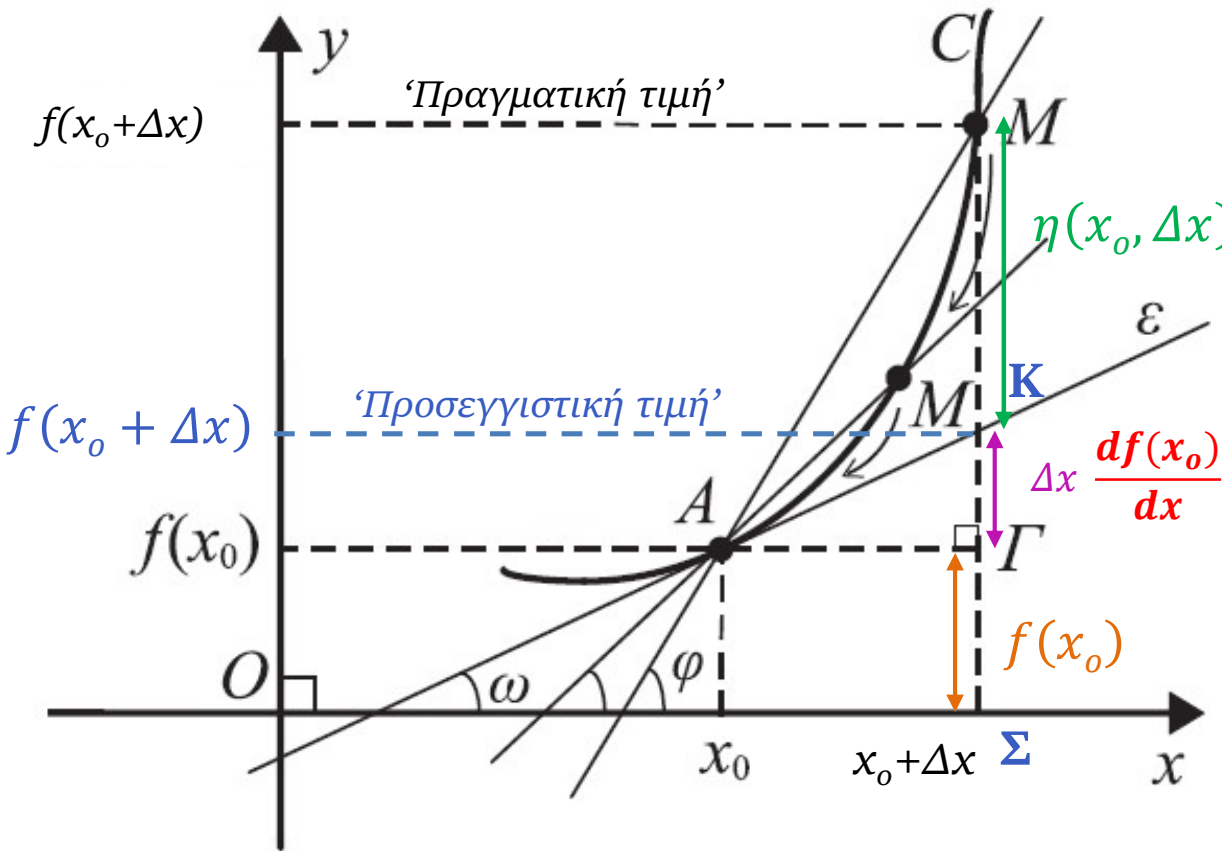
$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \frac{df(x_0)}{dx} [1 + 10^{-3}] = f(x_0) + \Delta x \frac{df(x_0)}{dx} + \Delta x 10^{-3} \frac{df(x_0)}{dx}$$

Όπου ο **3^{ος} (διορθωτικός) όρος** μπορεί να γίνει όσο μικρός θέλουμε μειώνοντας το Δx .

Μπορούμε να κάνουμε **γραμμική προσέγγιση** της τιμής της συνάρτησης **στην περιοχή του x_0** με τη βοήθεια της παραγώγου:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \Delta x \frac{df(x_0)}{dx}$$

4γ. Γραμμική προσέγγιση f στην περιοχή x_0 ★



“Γραμμική προσέγγιση”

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \Delta x \frac{df(x_0)}{dx} = \Gamma\Sigma + K\Gamma$$

$$f'(x_0) \equiv \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \equiv \frac{df(x_0)}{dx}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης στο $x = x_0$ είναι η **κλίση** της εφαπτομένης ευθείας.

$$\tan \omega = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{K\Gamma}{\Gamma\Sigma} = \frac{K\Gamma}{\Delta x}$$

$$K\Gamma = \Delta x \frac{df(x_0)}{dx}$$

Εξίσωση εφαπτομένης ευθείας

$$y = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} (x - x_0)$$

Κάνοντας γραμμική προσέγγιση στην περιοχή του $x = x_0$ ουσιαστικά δεν ακολουθούμε την καμπύλη της συνάρτησης που είναι η C_f αλλά την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$. Αυτή η προσέγγιση δεν είναι καλή όταν το Δx μεγαλώνει σημαντικά.

Παράδειγμα: Στιγμιαία ταχύτητα - επιτάχυνση

Για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή

$$v(t_o) = \frac{dx(t_o)}{dt}$$

Στιγμιαία ταχύτητα κινητού τη χρονική στιγμή t_o

Για κάθε χρονική στιγμή

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Στιγμιαία ταχύτητα κινητού ως συνάρτηση χρόνου t
(ανεξάρτητη μεταβλητή)

Για κάθε χρονική στιγμή

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Επιτάχυνση κινητού ως συνάρτηση χρόνου t

Γραμμική προσέγγιση θέσεως κινητού για μετατοπίσεις με παρέλευση μικρού χρονικού διαστήματος Δt

$$x(t_o + \Delta t) \approx x(t_o) + \Delta t \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t_o} = x(t_o) + v(t_o) \Delta t$$

Αν γνωρίζουμε την **ταχύτητα** και τη **θέση** κινητού σε μια χρονική στιγμή μπορούμε να κάνουμε μια **πρόβλεψη της θέσης** σε **μελλοντική** στιγμή (με κάποιο σφάλμα)

B. Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Β. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ Πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών



Έστω $f = f(x_1, x_2)$. Ορίζεται η **μερική παράγωγος** της συνάρτησης f ως προς τη μεταβλητή x_i . Εκφράζει τη μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης f για απειροελάχιστη μεταβολή μόνο της ανεξάρτητης μεταβλητής x_i , δηλαδή “προς τη κατεύθυνση της μεταβλητής x_i ”.

x_1 : εισόδημα

x_2 : περιουσία

$x_1 = 10000$ ευρώ

$x_2 = 100$ τμ

$\Delta x_1 = 100$ ευρώ

$\Delta x_2 = 0$ τμ

2200 ευρώ

2000 ευρώ

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2)$$

Η μερική παράγωγος συνάρτησης είναι μια συνάρτηση. Το πλήθος τους είναι ίσο με το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών.

Ο ορισμός μας δίνει την τιμή της μερικής παραγώγου ως προς x_1 για εισόδημα $x_1 = 10000$ ευρώ & περιουσία $x_2 = 100$ τμ

$x_1 = 10000$ ευρώ

$x_2 = 100$ τμ

$\Delta x_1 = 0$ ευρώ

$\Delta x_2 = 20$ τμ

2300 ευρώ

2000 ευρώ

$$\lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2)$$

Ο ορισμός μας δίνει την τιμή της μερικής παραγώγου ως προς x_2 για εισόδημα $x_1 = 10000$ ευρώ & περιουσία $x_2 = 100$ τμ

Β. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ Πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών



Έστω $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ορίζεται η **μερική παράγωγος** της συνάρτησης f ως **προς τη μεταβλητή x_i** . Εκφράζει τη μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης f για απειροελάχιστη μεταβολή μόνο της ανεξάρτητης μεταβλητής x_i , δηλαδή “προς τη κατεύθυνση της μεταβλητής x_i ”.

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

...

*Η μερική παράγωγος συνάρτησης είναι μια συνάρτηση.
Ο ορισμός μας δίνει την τιμή της μερικής παραγώγου ως προς τις αντίστοιχες μεταβλητές.*

$$\lim_{\Delta x_n \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Β. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ Πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών



Έστω $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ορίζεται η **μερική παράγωγος** της συνάρτησης f ως προς τη μεταβλητή x_i . Εκφράζει τη μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης f για απειροελάχιστη μεταβολή μόνο της ανεξάρτητης μεταβλητής x_i , δηλαδή “προς τη κατεύθυνση της μεταβλητής x_i ”.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Έστω $f = f(x, y)$ τότε ορίζονται οι πρώτες μερικές παράγωγοι

$$x_1 = x$$

Ο ορισμός μας δίνει την τιμή της μερικής συνάρτησης για τις τιμές των μεταβλητών (x_0, y_0)

$$x_2 = y$$

Μεταβάλλεται η τιμή της f λόγω μεταβολής **μόνο** της x κατά Δx

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ y = \text{στα}}} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Μνημονικός κανόνας: Η μερική παράγωγος ως προς μια μεταβλητή μεταπίπτει στη συνηθισμένη παράγωγο όταν θεωρήσουμε τις άλλες μεταβλητές ως σταθερές.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ x = \text{σταθ}}} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Μεταβάλλεται η τιμή της f λόγω μεταβολής **μόνο** της y κατά Δy

Παραδείγματα

Έστω συνάρτηση $f(x,y,z) = 5xy + 2(x^2 + y^2)z$. Ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ?, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ?, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = ?$$

Παραδείγματα

Έστω συνάρτηση $f(x,y,z) = 5xy + 2(x^2 + y^2)z$. Ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5y + 4xz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5x + 4yz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = ?? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = ?? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \equiv f_{zx} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = ??$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = ?? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = ?? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \equiv f_{zy} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = ??$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \equiv f_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = ?? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \equiv f_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = ?? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv f_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = ??$$

Παραδείγματα

Έστω συνάρτηση $f(x,y,z) = 5xy + 2(x^2 + y^2)z$. Ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5y + 4xz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5x + 4yz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 4z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \equiv f_{zx} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 4z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \equiv f_{zy} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \equiv f_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \equiv f_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv f_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0$$

Παραδείγματα

Έστω συνάρτηση $f(x,y,z) = 5xy + 2(x^2 + y^2)z$. Ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5y + 4xz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5x + 4yz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 4z \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \equiv f_{zx} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 5 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 4z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \equiv f_{zy} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \equiv f_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \equiv f_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv f_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0$$

Παραδείγματα

Έστω συνάρτηση $f(x,y,z) = 5xy + 2(x^2 + y^2)z$. Ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5y + 4xz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5x + 4yz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 4z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \equiv f_{zx} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 4z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \equiv f_{zy} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \equiv f_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \equiv f_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv f_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0$$

Παραδείγματα

Έστω συνάρτηση $f(x,y,z) = 5xy + 2(x^2 + y^2)z$.

Ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5y + 4xz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5x + 4yz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$$

Δηλαδή η σειρά με την οποία γίνεται η παραγωγή δεν έχει σημασία. Αυτό είναι **γενικός κανόνας** για μια συνάρτηση $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Όπου x_i, x_j ανήκουν στις μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης μιας μεταβλητής

Έστω συνάρτηση $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ όπου με τη σειρά τους οι μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι και αυτές συναρτήσεις μιας άλλης μεταβλητής t . Δηλαδή ισχύει

$$\left. \begin{aligned} f &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_1 &= x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t) \end{aligned} \right\}$$

Ορίζεται συνάρτηση μιας μεταβλητής $g(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$

Η συνηθισμένη παράγωγος της συνάρτησης g ως προς t είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \frac{dg(t)}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Ανεξάρτητες μεταβλητές x, y

$$f = f(x, y) = xy$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

$$x = x(t) = \alpha \cos(\omega t)$$

$$y = y(t) = \alpha \sin(\omega t)$$

Ανεξάρτητη μεταβλητή t

$$x_1 = x \quad x_2 = y$$

Ορίζεται συνάρτηση $g = g(t) = f(x, y) = \alpha^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t)$ Ανεξάρτητη μεταβλητή t

Η ολική παράγωγος της g ως προς t είναι

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \textcolor{red}{y} \frac{dx}{dt} + \textcolor{green}{x} \frac{dy}{dt}$$

$$= \textcolor{red}{\alpha \sin(\omega t)} \{-\alpha \omega \sin(\omega t)\} + \textcolor{green}{\alpha \cos \omega t} \{\alpha \omega \cos(\omega t)\}$$

Εκφράζουμε τα πάντα ως προς t

$$\frac{dg(t)}{dt} = \alpha^2 \omega (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t)$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Έστω συνάρτηση $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ όπου με τη σειρά τους οι μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι και αυτές συναρτήσεις **πολλών μεταβλητών** $y_1, y_2, \dots, y_n$. Δηλαδή ισχύει

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$x_1 = x_1(y_1, y_2, \dots, y_m), \quad x_2 = x_2(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, \quad x_n = x_n(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

Ανεξάρτητες μεταβλητές

Ορίζεται συνάρτηση **πολλών μεταβλητών** $g(y_1, y_2, \dots, y_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Η **μερική παράγωγος** της συνάρτησης g ως προς **y_i** είναι η εξής:

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} \equiv g_{y_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_i}$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i}$$

Επειδή η g είναι συνάρτηση πολλών μεταβλητών ορίζονται μερικές παράγωγοι ως προς κάθε μεταβλητή.

Παράδειγμα

Ανεξάρτητες μεταβλητές x, y

$$f = f(x, y) = \mathbf{x} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s, t) = \mathbf{s} + \mathbf{t}^2$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(s, t) = \mathbf{s} + \mathbf{t} \quad \text{Ανεξάρτητες μεταβλητές } s, t$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_i}$$

$$x_1 = x$$

$$y_1 = s$$

$$x_2 = y$$

$$y_2 = t$$

Ανεξάρτητες μεταβλητές s, t

$$\text{Ορίζεται σύνθετη συνάρτηση } g = g(s, t) = f(x, y) = (\mathbf{s} + \mathbf{t}^2)(\mathbf{s} + \mathbf{t}) = s^2 + st + st^2 + t^3$$

Η μερική παράγωγος της g ως προς s είναι

Είναι μια νέα συνάρτηση με
ανεξάρτητες μεταβλητές s, t

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \mathbf{y} \frac{\partial x}{\partial s} + \mathbf{x} \frac{\partial y}{\partial s} = (\mathbf{s} + \mathbf{t})1 + (\mathbf{s} + \mathbf{t}^2)1 = 2s + t + t^2$$

Η μερική παράγωγος της g ως προς t είναι

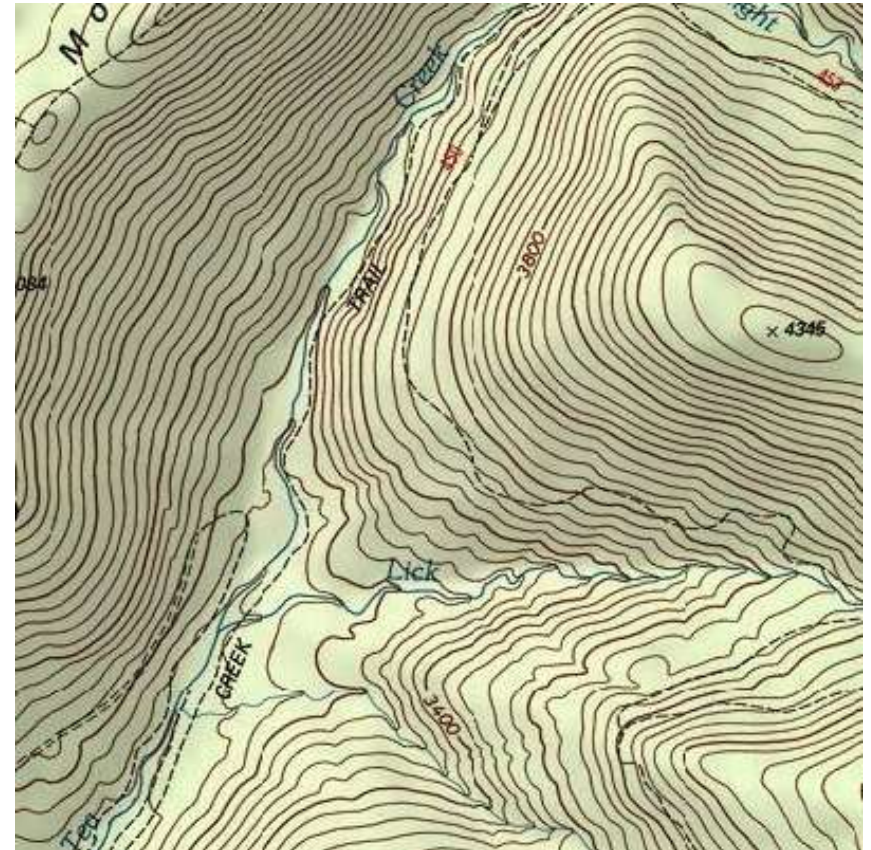
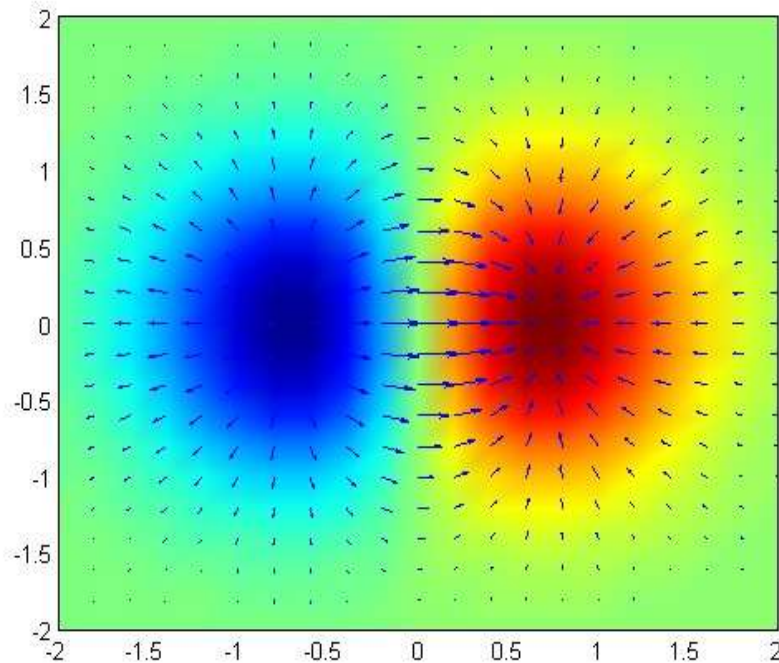
$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \mathbf{y} \frac{\partial x}{\partial t} + \mathbf{x} \frac{\partial y}{\partial t} = (\mathbf{s} + \mathbf{t})2t + (\mathbf{s} + \mathbf{t}^2)1 = s + 2st + 3t^2$$

Βαθμίδα συνάρτησης

Έστω $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Η **βαθμίδα** (gradient) της συνάρτησης είναι **διανυσματικό** μέγεθος και ορίζεται ως εξής

↙ Τελεστής Ανάδελτα ή Nabla

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

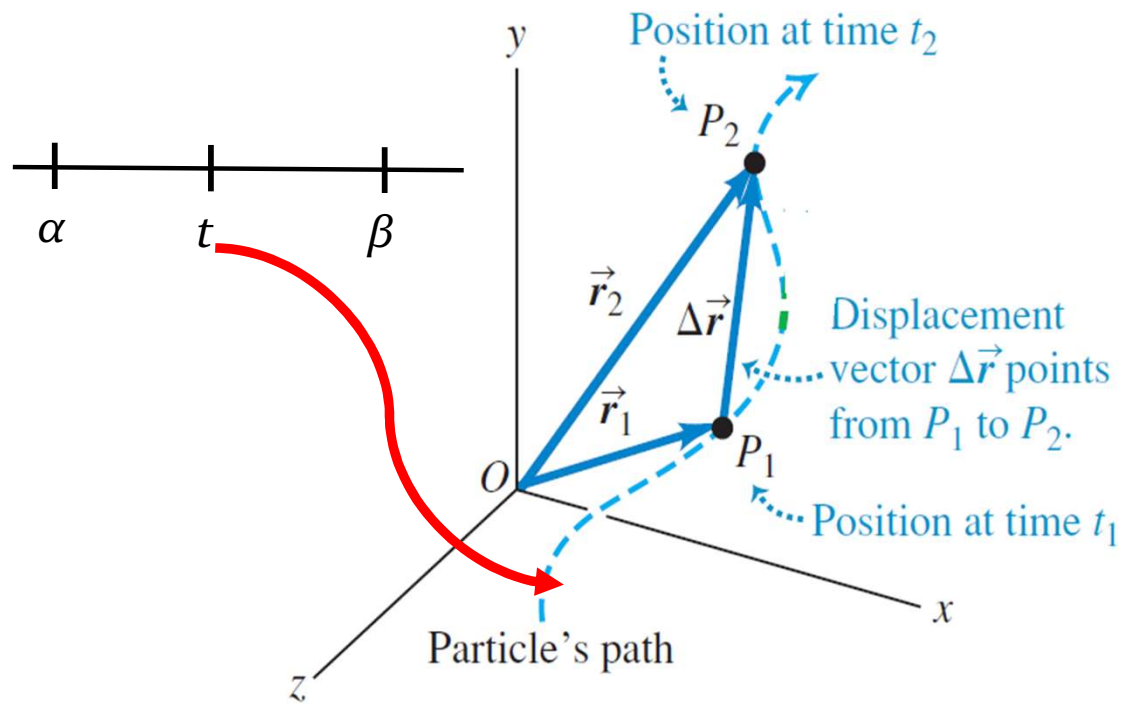
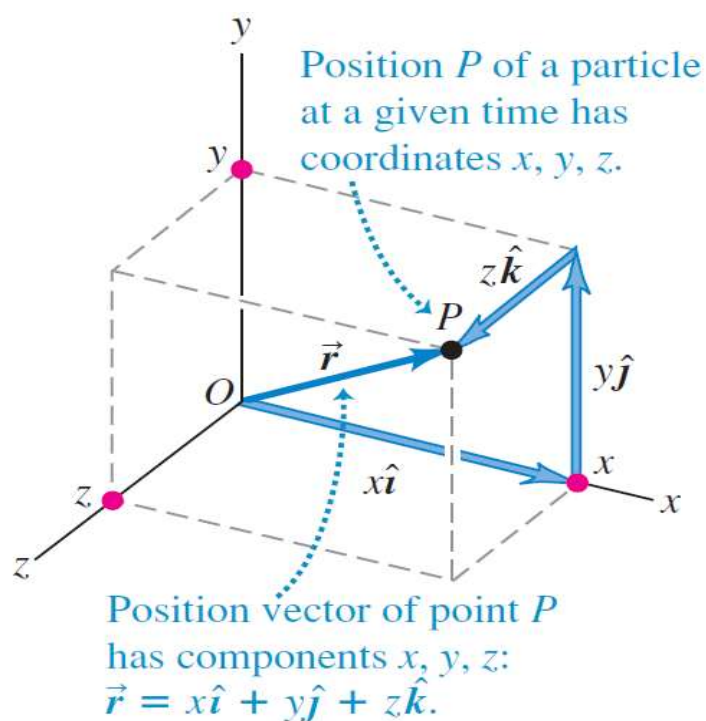


Το διάνυσμα της βαθμίδας είναι πάντα κάθετο στις επιφάνειες στις οποίες η συνάρτηση έχει σταθερή τιμή (2D: π.χ. ισοψείς σε τοπογραφικό χάρτη). Έχει κατεύθυνση προς τη μέγιστη αύξηση της συνάρτησης.

*Γ. Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης
μιας μεταβλητής*

Διανυσματική συνάρτηση : διάνυσμα θέσεως

Τέτοια είναι το **διάνυσμα θέσεως**, ένα δέσμιο διάνυσμα, με αρχή του στην αρχή των αξόνων. Καθώς ο χρόνος t μεταβάλλεται, η κορυφή του διανύσματος κινείται μαζί με το κινούμενο σημείο P και διαγράφει μια καμπύλη στον χώρο, την τροχιά του σημείου.



$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Οι συντεταγμένες του πέρατος του διανύσματος θέσεως είναι οι συντεταγμένες του κινητού. Είναι συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής t .

Στιγμιαία ταχύτητα κινητού στο χώρο

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} + z(t) \hat{k}$$

Όπως στην περίπτωση κίνησης σε μια διάσταση, η **στιγμιαία ταχύτητα του κινητού** στο χώρο υπολογίζεται ως η παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{r}(t)$ ως προς t .

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(x(t) \hat{i}) + \frac{d}{dt}(y(t) \hat{j}) + \frac{d}{dt}(z(t) \hat{k}) = \frac{dx(t)}{dt} \hat{i} + x(t) \frac{d\hat{i}}{dt} \\ &+ \frac{dy(t)}{dt} \hat{j} + y(t) \frac{d\hat{j}}{dt} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{k} + z(t) \frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{j} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{k}\end{aligned}$$

Τα μοναδιαία διανύσματα είναι σταθερά, οπότε οι παράγωγοί τους είναι 0.

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \frac{dx(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{j} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{k} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

Κάθε **συνιστώσα του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας** ενός κινητού ισούται με τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της αντίστοιχης **συντεταγμένης του κινητού**.

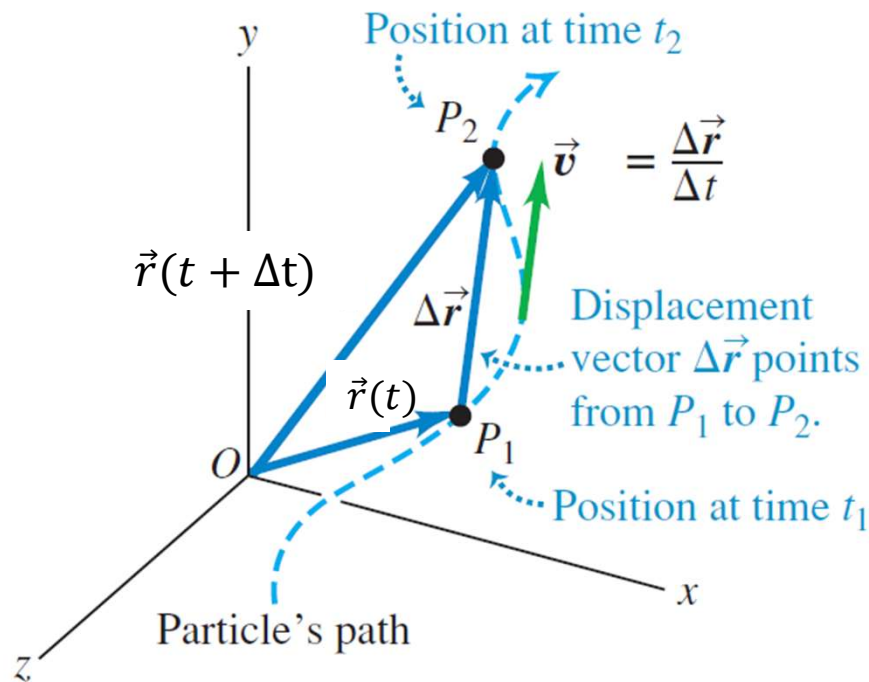
Το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας δίνεται από τη σχέση

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας εφάπτεται στην τροχιά

Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού ισούται με το ρυθμό μεταβολής της θέσης του (η θέση ορίζεται με το $\vec{r}$). Η διαφορά με την κίνηση σε μια διάσταση είναι ότι τόσο η θέση $\vec{r}$ όσο και η ταχύτητα $\vec{v}$ ορίζονται με διανύσματα

$$\vec{P}_{12} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_{t+\Delta t} - \vec{r}_t \quad \text{Διάνυσμα μετατόπισης}$$



$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$* \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} // \Delta\vec{r}$$

Καθώς το Δt τείνει στο 0, τα σημεία P₁ και P₂ πλησιάζουν και το **διάνυσμα μετατόπισης $\Delta\vec{r}$** τείνει να εφάπτεται στην τροχιά. Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας είναι παράλληλο στο $\Delta\vec{r}$ *. **Επομένως σε κάθε σημείο της τροχιάς, το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας εφάπτεται στην τροχιά.**