

ΕΝΟΤΗΤΑ 4 : ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

Ευάγγελος Τυρλής

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Τομέας Φυσικής Περιβάλλοντος & Μετεωρολογίας

1. ΒΑΣΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΣΤΗΝ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

- Διάνυσμα θέσης, ταχύτητα & επιτάχυνση
- Μοναδιαία διανύσματα

2. ΒΑΣΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΣΕ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΑΓΜΕΝΕΣ

- Εφαρμογή

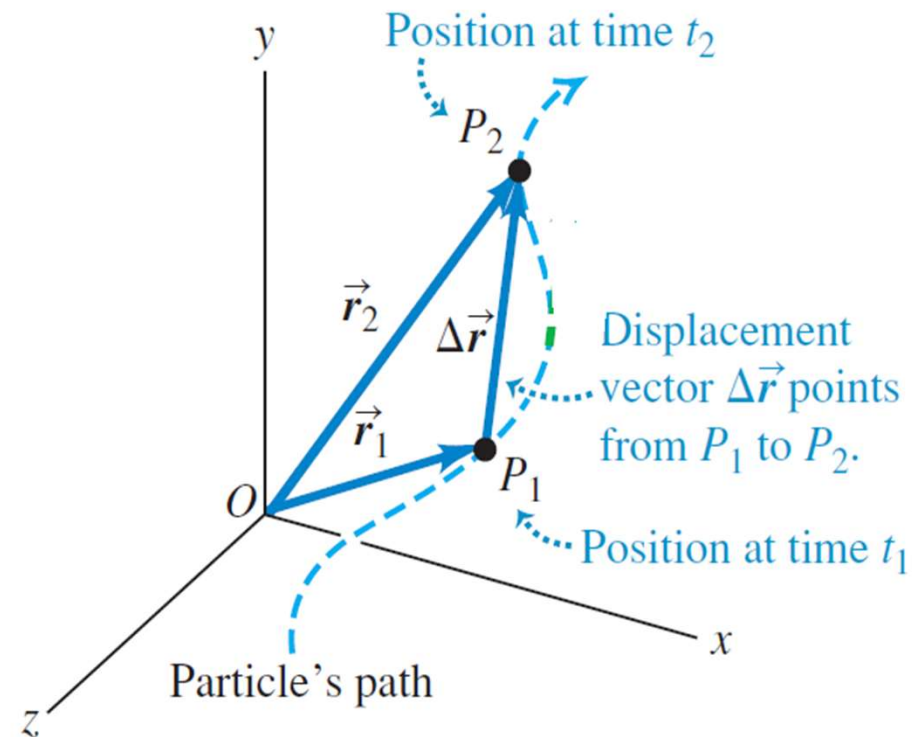
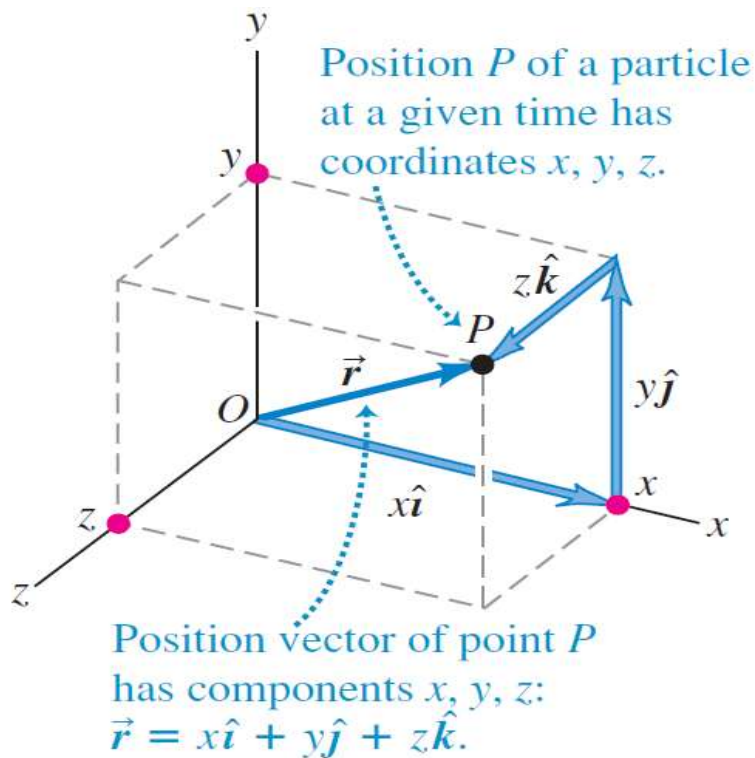
3. ΜΕΛΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΕΛΙΚΑΣ

4. ΜΕΛΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

5. ΜΕΛΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΕ ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

1. Βασικά μεγέθη: Διάνυσμα θέσης

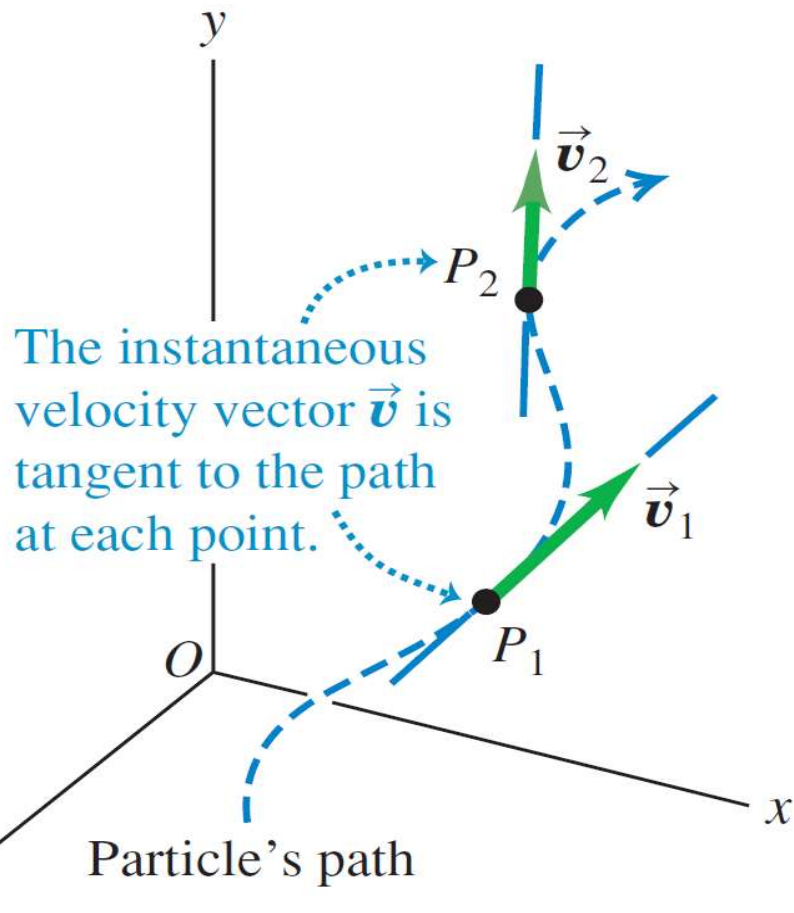
Διάνυσμα θέσης: ένα δέσμιο διάνυσμα, με αρχή του στην αρχή των αξόνων. Καθώς ο χρόνος t μεταβάλλεται, η κορυφή του διανύσματος κινείται μαζί με το κινούμενο σημείο P και διαγράφει μια καμπύλη στον χώρο, την τροχιά του κινητού



$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

1. Βασικά μεγέθη: Διάνυσμα ταχύτητας

Διάνυσμα ταχύτητας: Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας $\vec{v}(t)$ (instantaneous velocity) εφάπτεται της τροχιάς σε κάθε σημείο της.



$$v_x = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$v_y = \dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

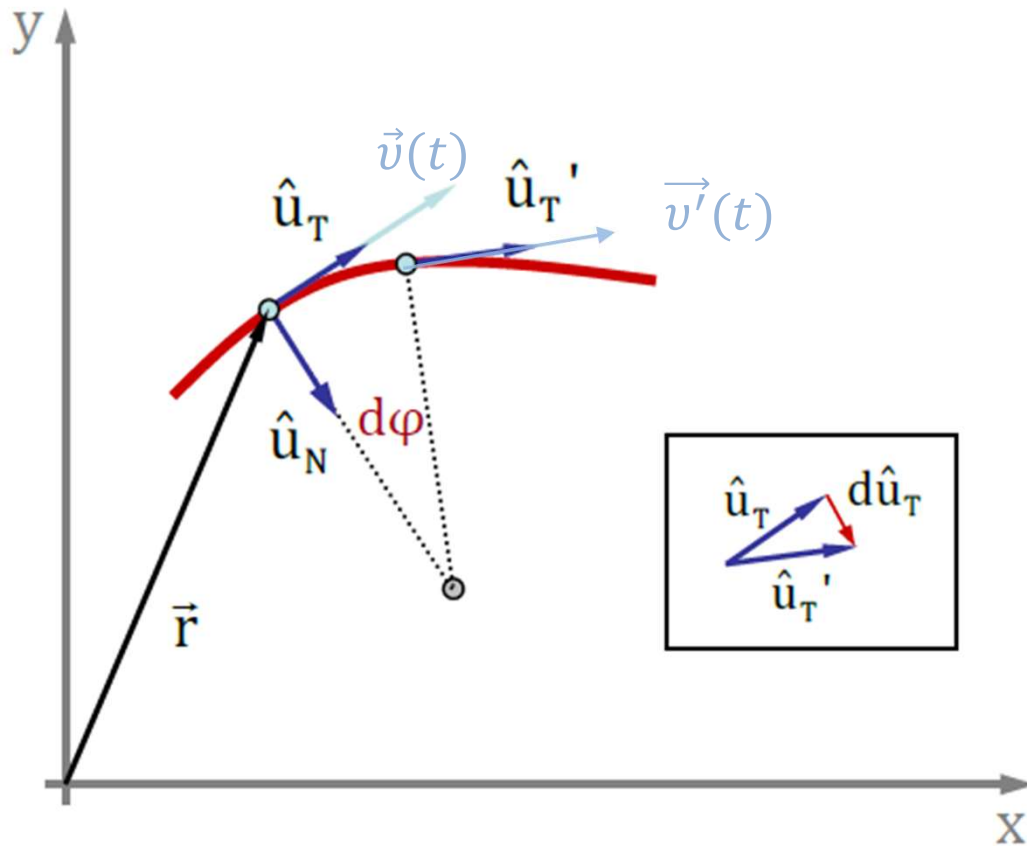
$$v_z = \dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

Κάθε συνιστώσα του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινητού ισούται με τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της αντίστοιχης συντεταγμένης.

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{j} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{k} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

1. Μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{u}_T$

Διάνυσμα ταχύτητας: Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας $\vec{v}(t)$ (instantaneous velocity) εφάπτεται της τροχιάς σε κάθε σημείο της.



$$\hat{u}_T(t) = \frac{1}{|\vec{v}(t)|} \vec{v}(t)$$

$$\hat{u}_T'(t) = \frac{1}{|\vec{v}'(t)|} \vec{v}'(t)$$

Μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτόμενο πάντα της τροχιάς (στην κατεύθυνση της κίνησης).

Αλλάζει συνεχώς διεύθυνση για αυτό έχει εξάρτηση με το χρόνο t .

$$d\hat{u}_T = \hat{u}_T' - \hat{u}_T$$

1. Προσδιορίζοντας το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{u}_N$

Εφαρμογή 1: Ναδειχθεί ότι το $\frac{d\hat{u}_T(t)}{dt}$ είναι κάθετο στο $\hat{u}_T(t)$

$$\hat{u}_T(t) \text{ μοναδιαίο} \Rightarrow \hat{u}_T(t) \cdot \hat{u}_T(t) = |\hat{u}_T(t)| |\hat{u}_T(t)| \cos 0^\circ = 1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (\hat{u}_T(t) \cdot \hat{u}_T(t)) = 0$$

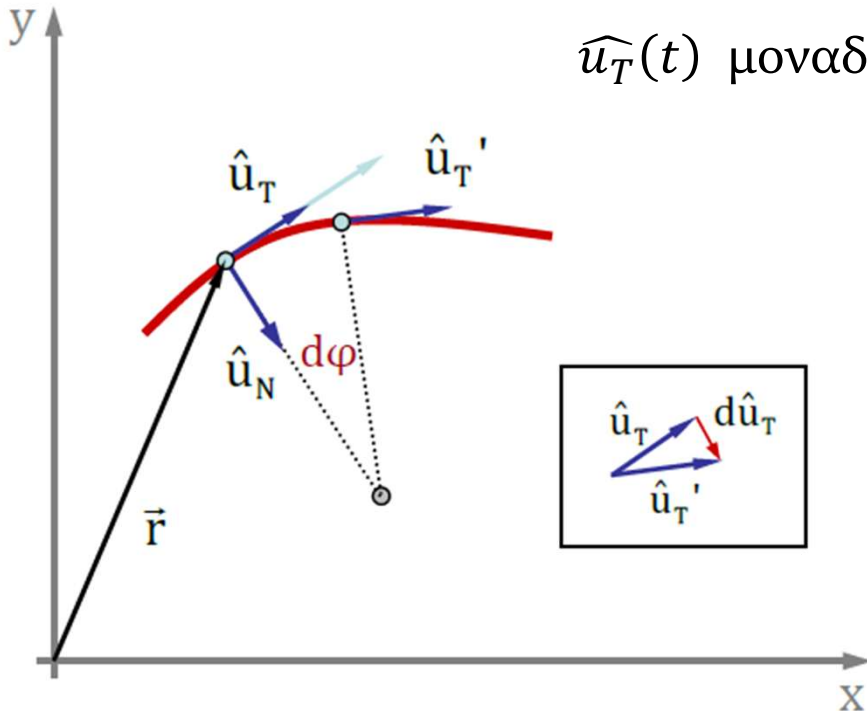
$$\Rightarrow 2 \hat{u}_T(t) \cdot \frac{d\hat{u}_T(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{u}_T(t) \cdot \frac{d\hat{u}_T(t)}{dt} = 0$$

Αν το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων $\vec{A}$ & $\vec{B}$ είναι $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ τότε $\vec{A} \perp \vec{B}$

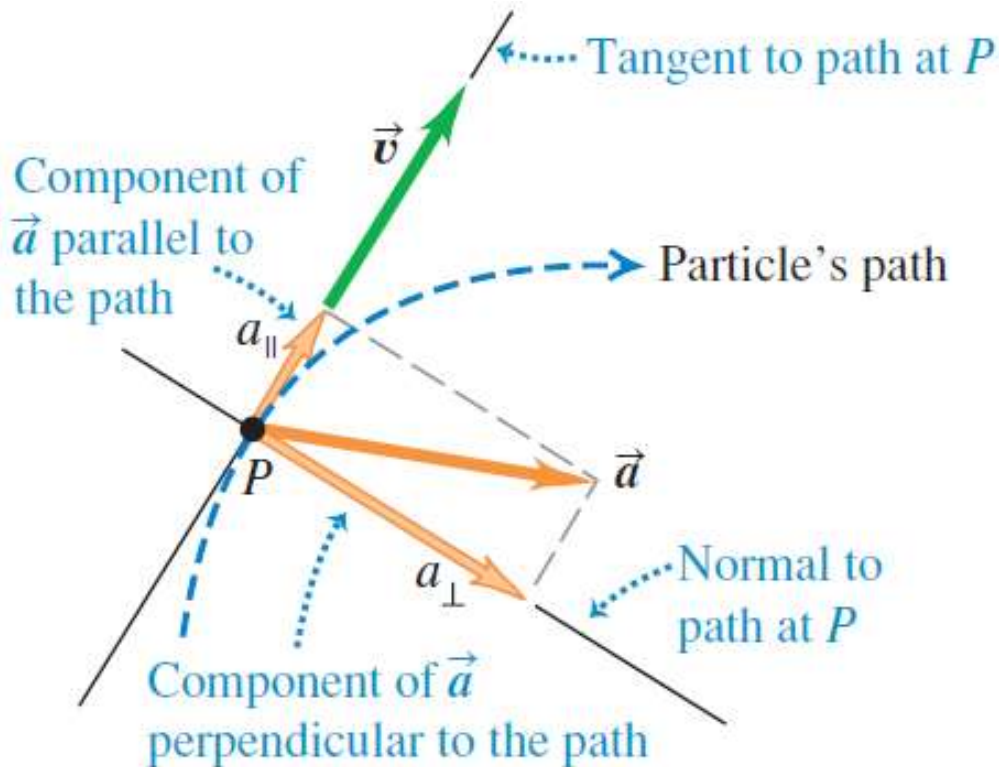
Αφού $\frac{d\hat{u}_T(t)}{dt} \perp \hat{u}_T(t)$ τότε γράφουμε $\frac{d\hat{u}_T(t)}{dt} = \left| \frac{d\hat{u}_T(t)}{dt} \right| \hat{u}_N(t)$

Όπου $\hat{u}_N(t)$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στην τροχιά (και στο $\hat{u}_T(t)$). Έχει κατεύθυνση προς την κοίλη πλευρά της τροχιάς.



1. Βασικά μεγέθη: Διάνυσμα επιτάχυνσης

Διάνυσμα επιτάχυνσης: Για καμπύλη τροχιά, το διάνυσμα της στιγμιαίας επιτάχυνσης $\vec{a}(t)$ κατευθύνεται πάντα προς την κοίλη πλευρά της τροχιάς. Η επιτάχυνση είναι εφαπτόμενη στην τροχιά **μόνο** αν το κινητό κινείται σε ευθεία γραμμή.



$$\alpha_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$$

$$\alpha_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t)$$

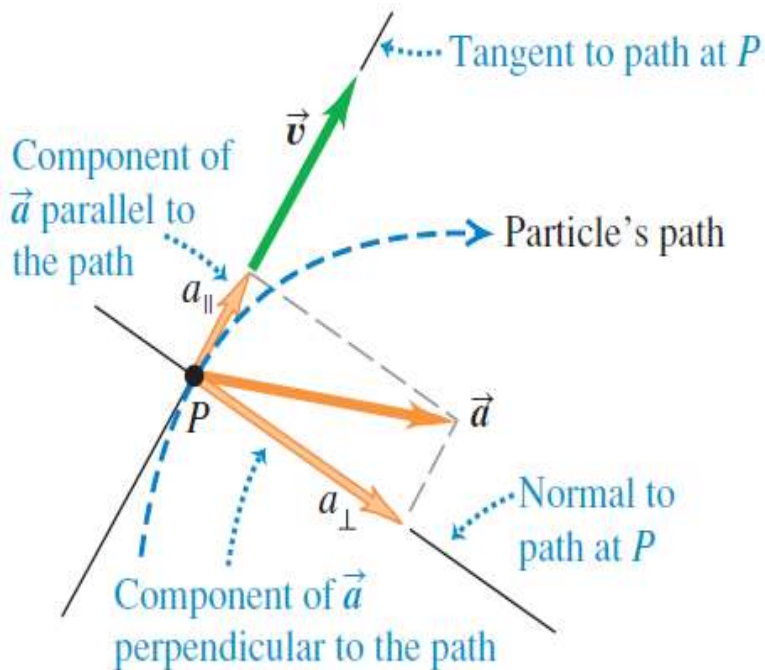
$$\alpha_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z(t)}{dt^2} = \ddot{z}(t)$$

Κάθε συνιστώσα του διανύσματος της στιγμιαίας **επιτάχυνσης** ενός κινητού ισούται με τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της **αντίστοιχης συνιστώσας της ταχύτητάς του**.

$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z(t)}{dt} \hat{k} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

1. Βασικά μεγέθη: Διάνυσμα επιτάχυνσης

Εφαρμογή 2: Ναδειχθεί ότι η επιτάχυνση μπορεί να αναλυθεί σε 2 συνιστώσες :
 $\vec{a}(t) = \alpha_T \hat{u}_T(t) + \alpha_N \hat{u}_N$. Η πρώτη παράλληλη και η δεύτερη κάθετη στην τροχιά.



$$\vec{v}(t) = |\vec{v}(t)| \hat{u}_T(t)$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left(\frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}\right) \hat{u}_T(t) + |\vec{v}(t)| \frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \left(\frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}\right) \hat{u}_T(t) + |\vec{v}(t)| \left|\frac{d\hat{u}_T(t)}{dt}\right| \hat{u}_N(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_T(t) \equiv \alpha_{\parallel}(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \\ \alpha_N(t) \equiv \alpha_{\perp}(t) = |\vec{v}(t)| \left|\frac{d\hat{u}_T(t)}{dt}\right| = v(t) \left|\frac{d\hat{u}_T(t)}{dt}\right| \end{cases}$$

Όπου $v(t) \equiv |\vec{v}(t)|$

Εφαρμογή 1

1. Βασικά μεγέθη: Διάνυσμα επιτάχυνσης

Εφαρμογή 3: Ναδειχθεί ότι $\frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \vec{a} \cdot \hat{u}_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$

$$f = f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Πραγματική συνάρτηση 3 μεταβλητών όπου η κάθε μια μεταβλητή είναι συνάρτηση του t

$$|\vec{v}| = f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$|\vec{v}|(t) = f(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

$$\dot{x} = \dot{x}(t), \quad \dot{y} = \dot{y}(t), \quad \dot{z} = \dot{z}(t)$$

Σύνθετη συνάρτηση μιας μεταβλητής $|\vec{v}|(t) \rightarrow g(t) = f(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$. Ολική παράγωγος της g ως προς t

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{d\dot{y}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \frac{d\dot{z}}{dt}$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης μιας μεταβλητής

Έστω συνάρτηση $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ όπου με τη σειρά τους οι μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι και αυτές συναρτήσεις μιας άλλης μεταβλητής t . Δηλαδή ισχύει

$$\left. \begin{aligned} f &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_1 &= x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t) \end{aligned} \right\}$$

Ορίζεται **σύνθετη** συνάρτηση μιας μεταβλητής $h(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$

Η ολική παράγωγος της συνάρτησης g ως προς t είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \frac{dg(t)}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \end{aligned}$$

1. Επεξηγηματικό μαθηματικό συμπλήρωμα

$$|\vec{v}| = f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Το μέτρο της ταχύτητας είναι μια συνάρτηση f , η οποία έχει 3 μεταβλητές όπου η κάθε μια μεταβλητή είναι συνάρτηση του t

$$|\vec{v}|(t) = f(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

$$f = f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$\dot{x} = \dot{x}(t), \quad \dot{y} = \dot{y}(t), \quad \dot{z} = \dot{z}(t)$$

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{d\dot{y}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \frac{d\dot{z}}{dt}$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}, \quad \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt}, \quad \ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}$$

Πώς να υπολογίσω τις μερικές παραγώγους

Προς στιγμή θεώρησε ότι έχουμε μια συνάρτηση

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Η f είναι μια σύνθετη συνάρτηση $f = F(h(x, y, z))$

Όπου $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
 $F(h) = \sqrt{h}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F(h(x, y, z))}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{dF}{dh} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{h}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$(F(h(x)))' = F'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Θυμήσου τον γενικό κανόνα που είχαμε δώσει για συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Γενικεύεται και για συναρτήσεις h πολλών μεταβλητών αλλά ο 2ος όρος θα είναι μερική παράγωγος!

Αντικατέστησε τώρα $x \rightarrow \dot{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{-1/2} (\dot{x})$$

Ανάλογα $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{-1/2} (\dot{y})$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{z}} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{-1/2} (\dot{z})$$

1. Βασικά μεγέθη: Διάνυσμα επιτάχυνσης

Εφαρμογή 3: Ναδειχθεί ότι $\frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \vec{a} \cdot \widehat{u}_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$ $f = f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$

Πραγματική συνάρτηση 3 μεταβλητών όπου
η κάθε μια μεταβλητή είναι συνάρτηση του t

$$\dot{x} = \dot{x}(t), \quad \dot{y} = \dot{y}(t), \quad \dot{z} = \dot{z}(t)$$

$$f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Σύνθετη συνάρτηση μιας μεταβλητής $|\vec{v}|(t) \rightarrow g(t) = f(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$. Ολική παράγωγος της g ως προς t

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{d\dot{y}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \frac{d\dot{z}}{dt}$$

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{-1/2} (2\dot{x})\ddot{x} + \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{-1/2} (2\dot{y})\ddot{y} + \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{-1/2} (2\dot{z})\ddot{z} =$$

$$\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{-1/2} 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = \frac{1}{2} \frac{(2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \frac{1}{|\vec{v}|} (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \widehat{u}_T$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε τις 2 συνιστώσες της επιτάχυνσης ως εξής:

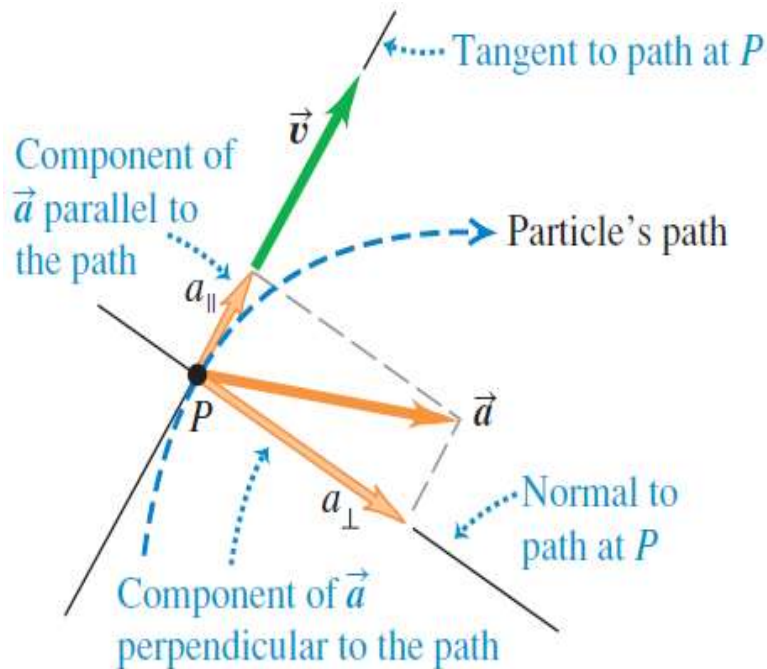
$$\alpha_T(t) \equiv \alpha_{\parallel}(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \vec{a} \cdot \widehat{u}_T$$

$$\alpha_N(t) \equiv \alpha_{\perp}(t) = |\vec{v}(t)| \left| \frac{d\widehat{u}_T(t)}{dt} \right|$$

Ουσιαστικά είναι η προβολή της επιτάχυνσης
στη διεύθυνση του $\widehat{u}_T$

1. Συνιστώσες επιτάχυνσης : Σύνοψη

Επομένως, το διάνυσμα της επιτάχυνσης μπορεί να αναλυθεί ως εξής



Προβολή του $\vec{a}$ στη διεύθυνση του $\widehat{u}_T$. (Εσ. γινόμενο είναι βαθμωτό).

$$\vec{a} = \alpha_T(t)\widehat{u}_T(t) + \alpha_N(t)\widehat{u}_N(t)$$

$$\alpha_T(t) \equiv \alpha_{\parallel}(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \vec{a} \cdot \widehat{u}_T$$

$$\alpha_N(t) \equiv \alpha_{\perp}(t) = |\vec{v}(t)| \left| \frac{d\widehat{u}_T(t)}{dt} \right| = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{R}$$

Ακτίνα καμπυλότητας

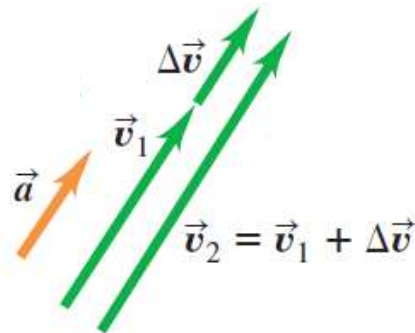
Συμπεράσματα

- Η **μεταβολή στο μέτρο της ταχύτητας** (δηλαδή $\frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} \neq 0$) εισάγει συνιστώσα της επιτάχυνσης κατά τη διεύθυνση του διανύσματος της $\vec{v}$ ή $\widehat{u}_T$. Δηλαδή $\alpha_T(t) \neq 0$.
- Στην περίπτωση που το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό ($|\vec{v}(t)|=c$), τότε η αλλαγή και **μόνο στη διεύθυνση της ταχύτητας** (αλλαγή διεύθυνσης $\widehat{u}_T$ & $\widehat{u}_N$) εισάγει συνιστώσα της επιτάχυνσης κάθετη στην ταχύτητα. Δηλαδή $\alpha_N(t) \neq 0$.

1. Συνιστώσες επιτάχυνσης : Σύνοψη

(α) Επιτάχυνση $\vec{a}$ παράλληλη στην ταχύτητα $\vec{v}$

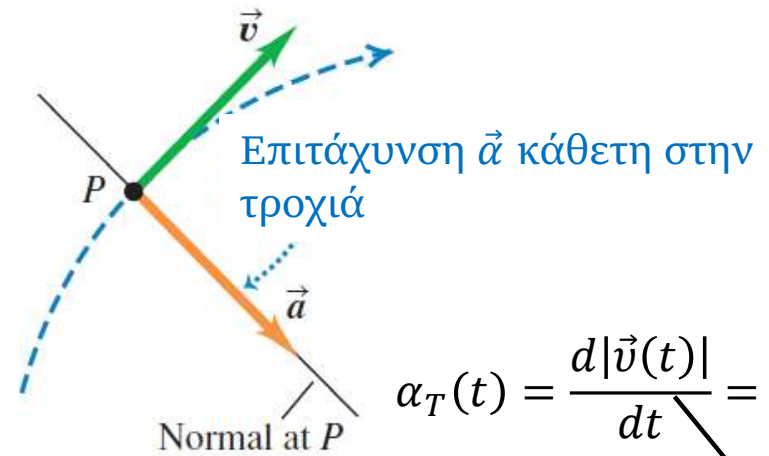
Μέτρο ταχύτητας
αλλάζει αλλά όχι η
διεύθυνση



$$\alpha_N(t) = |\vec{v}(t)| \left| \frac{d\widehat{u}_T(t)}{dt} \right| = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{R} = 0$$

$\searrow \quad \quad \quad \searrow$
 $0 \quad \quad \quad \infty$

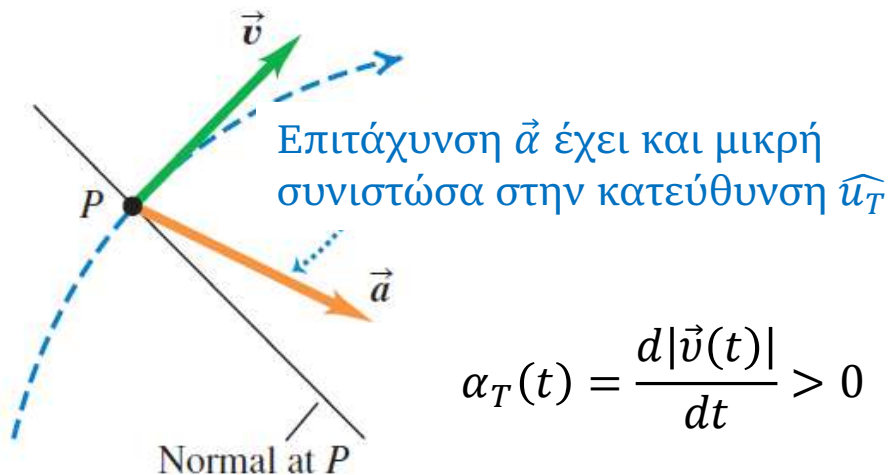
(β) Μέτρο ταχύτητας $|\vec{v}| = c$ κατά μήκος καμπύλης τροχιάς. Αλλάζει μόνο η κατεύθυνσή της



$$\alpha_T(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = 0$$

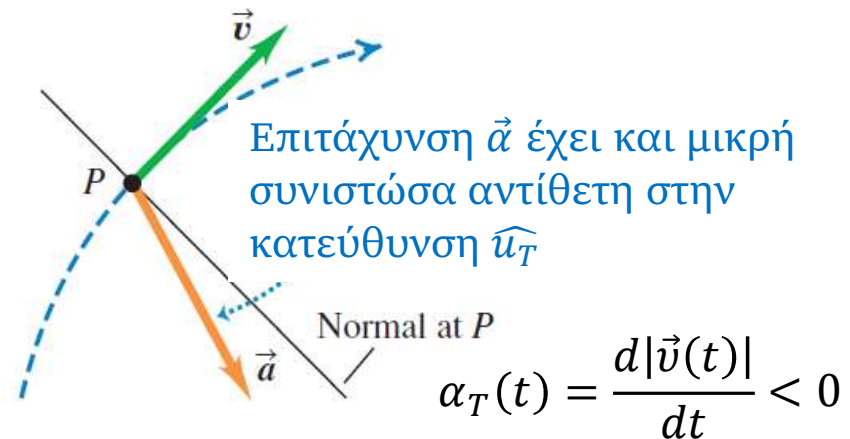
$\searrow$
 0

(γ) Μέτρο ταχύτητας $|\vec{v}|$ αυξάνει κατά μήκος καμπύλης τροχιάς



$$\alpha_T(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} > 0$$

(δ) Μέτρο ταχύτητας $|\vec{v}|$ μειώνεται κατά μήκος καμπύλης τροχιάς



$$\alpha_T(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} < 0$$

2. Βασικά μεγέθη σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Εφαρμογή 4: Για κίνηση σε επίπεδο να βρεθούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα $\widehat{u}_T$, $\frac{d\widehat{u}_T}{dt}$, $\widehat{u}_N$, a_N και a_T .

$$\widehat{u}_T = \widehat{u}_T(t) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \text{ όπου } \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} \text{ και } \dot{y} = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\frac{d\widehat{u}_T}{dt} = \frac{d}{dt} \{ (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2} \} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{d}{dt} \{ (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2} \} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2} \begin{bmatrix} \frac{d\dot{x}}{dt} \\ \frac{d\dot{y}}{dt} \end{bmatrix}$$

$$= + \frac{-1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-3/2} (2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y}) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \begin{bmatrix} \dot{x}^2 \ddot{x} + \dot{x} \dot{y} \ddot{y} \\ \dot{x} \ddot{x} \dot{y} + \dot{y}^2 \ddot{y} \end{bmatrix}$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{d\dot{y}}{dt}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = f(\dot{x}, \dot{y}) = g(t)$$

**Εφάρμοσε τους ίδιους κανόνες
όπως στην διαφάνεια #19
για να υπολογίσεις το**

$$\frac{d}{dt} \{ (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2} \}$$

2. Βασικά μεγέθη σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Εφαρμογή 4: Για κίνηση σε επίπεδο να βρεθούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα $\widehat{u}_T$, $\frac{d\widehat{u}_T}{dt}$, $\widehat{u}_N$, a_N και a_T .

$$\widehat{u}_T = \widehat{u}_T(t) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \text{ όπου } \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} \text{ και } \dot{y} = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\frac{d\widehat{u}_T}{dt} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \begin{bmatrix} \dot{x}^2 \ddot{x} + \dot{x} \dot{y} \ddot{y} \\ \dot{x} \ddot{x} \dot{y} + \dot{y}^2 \ddot{y} \end{bmatrix}$$

$$= (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-3/2} \begin{bmatrix} \cancel{\ddot{x}\dot{x}^2} + \cancel{\ddot{x}\dot{y}^2} - \cancel{\dot{x}^2\ddot{x}} - \cancel{\dot{x}\dot{y}\ddot{y}} \\ \cancel{\dot{y}\dot{x}^2} + \cancel{\dot{y}\dot{y}^2} - \cancel{\dot{x}\ddot{x}\dot{y}} - \cancel{\dot{y}^2\ddot{y}} \end{bmatrix} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-3/2} \begin{bmatrix} -\dot{y}(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}) \\ \dot{x}(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

2. Βασικά μεγέθη σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Εφαρμογή 4: Για κίνηση σε επίπεδο να βρεθούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα $\widehat{u}_T$, $\frac{d\widehat{u}_T}{dt}$, $\widehat{u}_N$, a_N και a_T .

$$\widehat{u}_T = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\widehat{u}_T}{dt} = \left| \frac{d\widehat{u}_T(t)}{dt} \right| \widehat{u}_N(t)$$

$$\frac{d\widehat{u}_T}{dt} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = K \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

$$\left| \frac{d\widehat{u}_T(t)}{dt} \right| = \sqrt{(K)^2 \frac{1}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} (-\dot{y})^2 + (K)^2 \frac{1}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} (\dot{x})^2} = |K| \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = |K| = \begin{cases} K, & K > 0 \\ -K, & K < 0 \end{cases}$$

$$\widehat{u}_N = \frac{\frac{d\widehat{u}_T}{dt}}{\left| \frac{d\widehat{u}_T(t)}{dt} \right|} = \frac{K \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix}}{|K|} = \pm \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

Προσοχή: το πρόσημο εξαρτάται από το πρόσημο του K και ουσιαστικά από το πρόσημο του “ $\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}$ ”. Επιλέγεται το “+” αν $K > 0$

2. Βασικά μεγέθη σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Εφαρμογή 4: Για κίνηση σε επίπεδο να βρεθούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα $\widehat{u}_T$, $\frac{d\widehat{u}_T}{dt}$, $\widehat{u}_N$, $\mathbf{a}_N$ και $\mathbf{a}_T$.

$$\alpha_T(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}$$

$$\alpha_N(t) = |\vec{v}(t)| \left| \frac{d\widehat{u}_T(t)}{dt} \right|$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$\left| \frac{d\widehat{u}_T(t)}{dt} \right| = \left| \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right| = |\mathbf{K}|$$

$$\begin{aligned} \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} &= \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{d\dot{y}}{dt} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} (2\dot{x})\ddot{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} (2\dot{y})\ddot{y} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\ \alpha_T(t) &= \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \end{aligned}$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{d\dot{y}}{dt}$$

$$f(\dot{x}, \dot{y}) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Εφάρμοσε τους ίδιους κανόνες όπως στη διαφάνεια #19 για να υπολογίσεις το

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$\begin{aligned} \alpha_N(t) &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \left| \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{|\dot{x}^2 + \dot{y}^2|} = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}} |\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}| = \\ &= \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} |\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}| = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} |\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}| = \pm \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \end{aligned}$$

Το πρόσημο εξαρτάται από αυτό του K και άρα του " $\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}$ ".
Επιλέγεται το "+" αν $K > 0$

2. Βασικά μεγέθη σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Εφαρμογή 4: Για κίνηση σε επίπεδο να βρεθούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα $\widehat{u}_T$, $\frac{d\widehat{u}_T}{dt}$, $\widehat{u}_N$, $\mathbf{a}_N$ και $\mathbf{a}_T$.

$$\widehat{u}_T = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

$$\widehat{u}_N = \pm \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

Το πρόσημο εξαρτάται από αυτό του K και άρα του “ $\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}$ ”.
Επιλέγεται το “+” αν $K > 0$

$$\frac{d\widehat{u}_T}{dt} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$\alpha_T(t) = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

$$\alpha_N(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} |\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}| = \pm \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

Το πρόσημο εξαρτάται από αυτό του K και άρα του “ $\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}$ ”.
Επιλέγεται το “+” αν $K > 0$

3. Παράδειγμα υπολογισμών: Κυκλική τροχιά

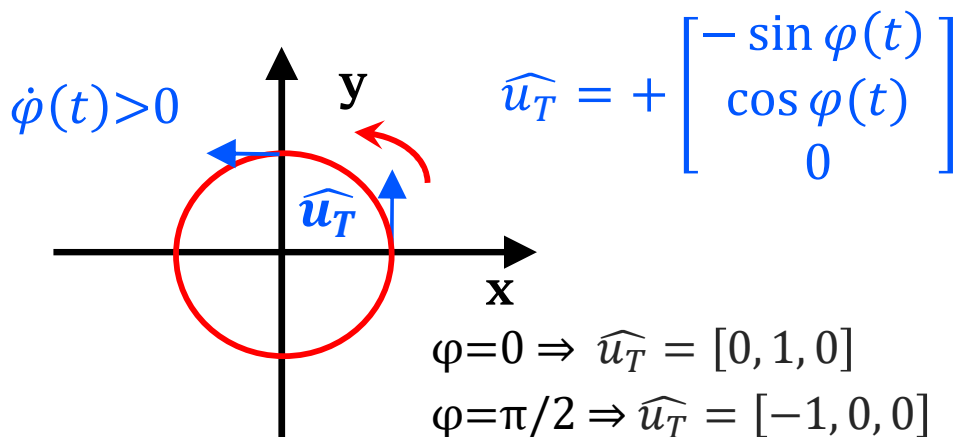
Παράδειγμα: Έστω κυκλική τροχιά με ακτίνα $R > 0$:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} R \cos \varphi(t) \\ R \sin \varphi(t) \\ z_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} -R \sin \varphi(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} \\ R \cos \varphi(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{v}(t) = R \dot{\varphi}(t) \begin{bmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

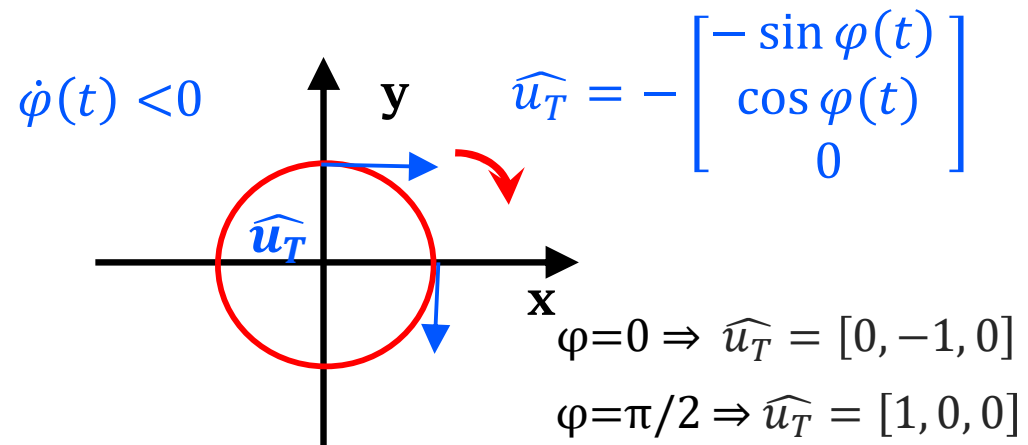
$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(-R \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t))^2 + (R \dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t))^2 + 0} = \sqrt{(R \dot{\varphi}(t))^2} = R |\dot{\varphi}(t)|$$

$$\widehat{u}_T = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{R \dot{\varphi}(t)}{R |\dot{\varphi}(t)|} \begin{bmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} + \dots, & \dot{\varphi}(t) > 0 \\ - \dots, & \dot{\varphi}(t) < 0 \end{cases}$$

Κίνηση αντίθετα με αυτή δεικτών ρολογιού. Η φάση αυξάνει με το χρόνο.



Κίνηση σύμφωνα με αυτή δεικτών ρολογιού. Η φάση μειώνεται με το χρόνο.



3. Παράδειγμα υπολογισμών: Κυκλική τροχιά

Παράδειγμα: Έστω κυκλική τροχιά με ακτίνα $R > 0$:

$$|\vec{v}(t)| = R |\dot{\varphi}(t)| \quad \begin{cases} +R \dot{\varphi}(t), & \dot{\varphi}(t) > 0 \\ -R \dot{\varphi}(t), & \dot{\varphi}(t) < 0 \end{cases} \quad \widehat{u}_T = \begin{cases} \begin{bmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad \frac{d\widehat{u}_T}{dt} = \begin{cases} \dot{\varphi}(t) \begin{bmatrix} -\cos \varphi(t) \\ -\sin \varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix}, & \dot{\varphi}(t) > 0 \\ -\dot{\varphi}(t) \begin{bmatrix} -\cos \varphi(t) \\ -\sin \varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix}, & \dot{\varphi}(t) < 0 \end{cases}$$

$$\frac{d\widehat{u}_T}{dt} = |\dot{\varphi}(t)| \begin{bmatrix} -\cos \varphi(t) \\ -\sin \varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{R} |\vec{v}(t)| \begin{bmatrix} -\cos \varphi(t) \\ -\sin \varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left| \frac{d\widehat{u}_T(t)}{dt} \right| = \frac{1}{R} |\vec{v}(t)| = \kappa |\vec{v}(t)|$$

$$\widehat{u}_N = \frac{\frac{d\widehat{u}_T}{dt}}{\left| \frac{d\widehat{u}_T(t)}{dt} \right|} = - \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

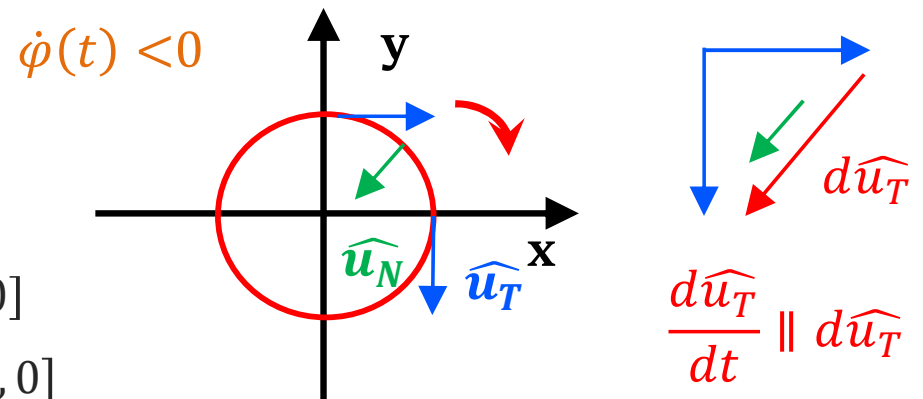
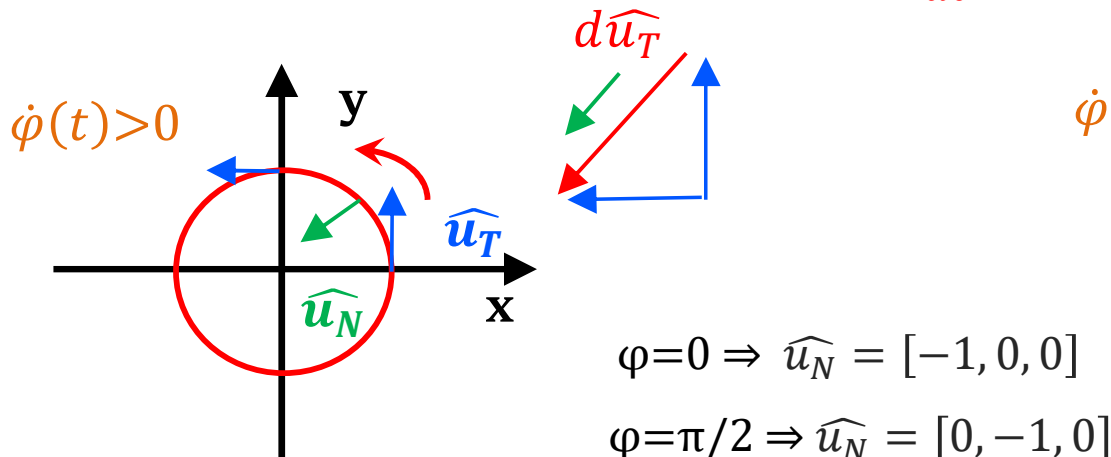
Τοπική καμπυλότητα της τροχιάς.
Αντίστροφο της ακτίνας R του κύκλου

$$\kappa = \frac{1}{|\vec{v}(t)|} \left| \frac{d\widehat{u}_T}{dt} \right|$$

$$\frac{d\widehat{u}_T}{dt} = \frac{1}{R} |\vec{v}(t)| \widehat{u}_N$$

$$\frac{d\widehat{u}_T}{dt} \parallel d\widehat{u}_T$$

$$\frac{d\widehat{u}_T}{dt} = \frac{1}{R} |\vec{v}(t)| \widehat{u}_N$$

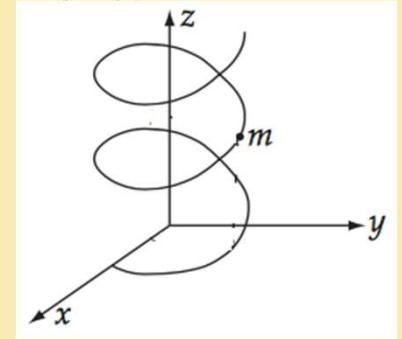


4. Κίνηση κατά μήκος έλικας

Εφαρμογή: Κινητό κινούμενο κατά μήκος έλικας έχει την παρακάτω τροχιά

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} R \cos \omega t \\ R \sin \omega t \\ bt \end{bmatrix} \quad \mu\epsilon \quad \omega > 0$$

$$\kappa(t) = \frac{1}{|\vec{v}(t)|} \left| \frac{d\hat{u}_T}{dt} \right|$$



Να υπολογισθούν τα μεγέθη $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$, $\hat{u}_T(t)$, $\hat{u}_N(t)$ καθώς και η **καμπυλότητα $\kappa(t)$** της τροχιάς.

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} -R\omega \sin \omega t \\ R\omega \cos \omega t \\ b \end{bmatrix}, \quad |\vec{v}(t)| = \sqrt{(-R\omega \sin \omega t)^2 + (R\omega \cos \omega t)^2 + b^2} = \sqrt{(R\omega)^2 + b^2}$$

$$\hat{u}_T = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{(R\omega)^2 + b^2}} \begin{bmatrix} -R\omega \sin \omega t \\ R\omega \cos \omega t \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{R\omega^2}{\sqrt{(R\omega)^2 + b^2}} \begin{bmatrix} -\cos \omega t \\ -\sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left| \frac{d\hat{u}_T}{dt} \right| = \frac{R\omega^2}{\sqrt{(R\omega)^2 + b^2}}, \quad \hat{u}_N = \frac{\frac{d\hat{u}_T}{dt}}{\left| \frac{d\hat{u}_T}{dt} \right|} = \begin{bmatrix} -\cos \omega t \\ -\sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } \kappa = \frac{1}{|\vec{v}(t)|} \left| \frac{d\hat{u}_T}{dt} \right| = \frac{R\omega^2}{(R\omega)^2 + b^2} = \text{σταθ.}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -R\omega^2 \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix} = R\omega^2 \hat{u}_N$$

Η επιτάχυνση δεν έχει συνιστώσα παράλληλη στην τροχιά (επιτροχία). Αναμενόμενο επειδή η ταχύτητα έχει σταθερό μέτρο και αλλάζει μόνο διεύθυνση.

4. Κίνηση κατά μήκος έλικας

$$\widehat{u}_N = \begin{bmatrix} -\cos \omega t \\ -\sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(R \omega)^2 + b^2}$$

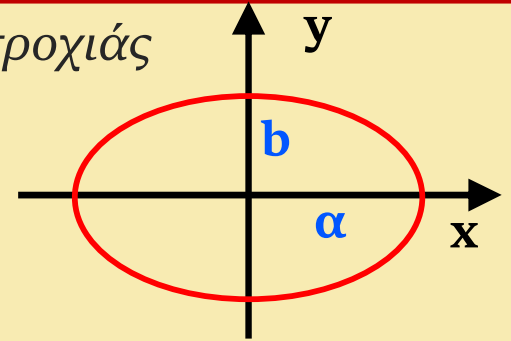
$$\kappa = \frac{R \omega^2}{(R \omega)^2 + b^2}$$

* Εάν $b=0 \Rightarrow \kappa = \frac{R \omega^2}{(R \omega)^2} = \frac{1}{R}$
Κίνηση σε κύκλο
ακτίνας a

5. Κίνηση κατά μήκος έλλειψης

Εφαρμογή: Μελέτη κινητού κινούμενου κατά μήκος ελλειπτικής τροχιάς

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} a \cos \omega t \\ b \sin \omega t \end{bmatrix}, \quad \omega > 0,$$



$$\vec{v}(t) = \omega \begin{bmatrix} -a \sin \omega t \\ b \cos \omega t \end{bmatrix}, \quad \text{Μέτρο ταχύτητας} \quad |\vec{v}(t)| = \omega \sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}$$

$$\text{Εφαπτόμενο μοναδιαίο} \quad \widehat{u}_T = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}} \begin{bmatrix} -a \sin \omega t \\ b \cos \omega t \end{bmatrix}$$

$$\text{ή αλλιώς γράφουμε} \quad \widehat{u}_T = A(t) \begin{bmatrix} -a \sin \omega t \\ b \cos \omega t \end{bmatrix}, \quad A(t) = (a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{-1/2}$$

$$\frac{d\widehat{u}_T}{dt} = \dot{A}(t) \begin{bmatrix} -a \sin \omega t \\ b \cos \omega t \end{bmatrix} - \omega A(t) \begin{bmatrix} a \cos \omega t \\ b \sin \omega t \end{bmatrix}$$

$$\dot{A}(t) = -\frac{1}{2} (a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{-\frac{3}{2}} (2\omega a^2 \sin \omega t \cos \omega t - 2\omega b^2 \cos \omega t \sin \omega t)$$

$$= -\frac{1}{2} [(a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{-\frac{1}{2}}]^3 [2\omega(a^2 - b^2) \sin \omega t \cos \omega t]$$

5. Κίνηση κατά μήκος έλλειψης

$$\dot{A}(t) = -\frac{1}{2} [(\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{-\frac{1}{2}}]^3 [2\omega(\alpha^2 - b^2) \sin \omega t \cos \omega t]$$

$$= -\omega(\alpha^2 - b^2) A(t)^3 \sin \omega t \cos \omega t$$

$$A(t) = (\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{-1/2}$$

$$\text{Επομένως } \frac{d\widehat{u}_T}{dt} = \dot{A}(t) \begin{bmatrix} -a \sin \omega t \\ b \cos \omega t \end{bmatrix} - \omega A(t) \begin{bmatrix} a \cos \omega t \\ b \sin \omega t \end{bmatrix}$$

$$= A(t)^3 \left\{ [-\omega(\alpha^2 - b^2)] \sin \omega t \cos \omega t \begin{bmatrix} -a \sin \omega t \\ b \cos \omega t \end{bmatrix} - \omega \frac{1}{A(t)^2} \begin{bmatrix} a \cos \omega t \\ b \sin \omega t \end{bmatrix} \right\}$$

$$= A(t)^3 \left\{ [-\omega(\alpha^2 - b^2)] \sin \omega t \cos \omega t \begin{bmatrix} -a \sin \omega t \\ b \cos \omega t \end{bmatrix} - \omega [\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t] \begin{bmatrix} a \cos \omega t \\ b \sin \omega t \end{bmatrix} \right\}$$

$$= A(t)^3 (-\omega) \begin{bmatrix} -\alpha^3 \sin^2 \omega t \cancel{\cos \omega t} + ab^2 \sin^2 \omega t \cos \omega t + \alpha^3 \sin^2 \omega t \cancel{\cos \omega t} + ab^2 \cos^3 \omega t \\ ba^2 \sin \omega t \cos^2 \omega t - b^3 \sin \omega t \cancel{\cos^2 \omega t} + ba^2 \sin^3 \omega t + b^3 \sin \omega t \cancel{\cos^2 \omega t} \end{bmatrix}$$

$$= A(t)^3 (-\omega) \begin{bmatrix} ab^2 \cos \omega t (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \\ ba^2 \sin \omega t (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \end{bmatrix} = A(t)^3 (-\omega) \begin{bmatrix} ab^2 \cos \omega t \\ ba^2 \sin \omega t \end{bmatrix}$$

5. Κίνηση κατά μήκος έλλειψης

$$A(t) = (\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{-1/2}$$

$$\frac{d\widehat{u}_T}{dt} = A(t)^3 (-\omega) \begin{bmatrix} ab^2 \cos \omega t \\ ba^2 \sin \omega t \end{bmatrix} = \frac{-\omega ab}{(\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{3/2}} \begin{bmatrix} b \cos \omega t \\ a \sin \omega t \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{\omega ab}{\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t} \frac{1}{\sqrt{(\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)}} \begin{bmatrix} b \cos \omega t \\ a \sin \omega t \end{bmatrix}$$

$$\left| \frac{d\widehat{u}_T}{dt} \right| = \frac{\omega ab}{\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}$$

$$\widehat{u}_N = -\frac{1}{\sqrt{(\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)}} \begin{bmatrix} b \cos \omega t \\ a \sin \omega t \end{bmatrix}$$

$$\widehat{u}_T = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}} \begin{bmatrix} -a \sin \omega t \\ b \cos \omega t \end{bmatrix}$$

$$\widehat{u}_N = \frac{\frac{d\widehat{u}_T}{dt}}{\left| \frac{d\widehat{u}_T}{dt} \right|}$$

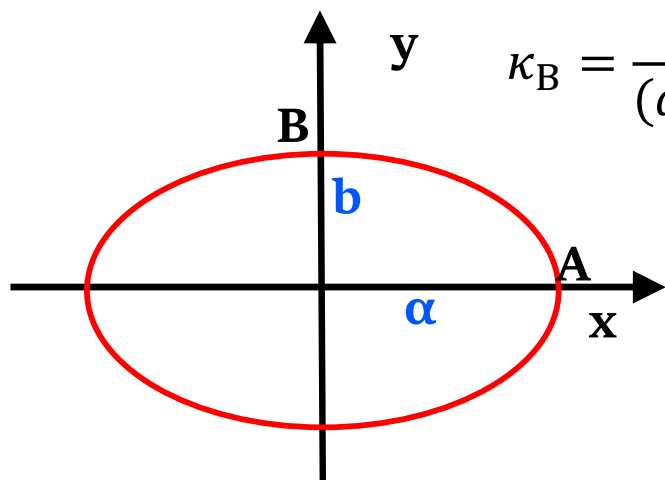
Εύκολα δείχνουμε $\widehat{u}_N \cdot \widehat{u}_T = 0 \Rightarrow \widehat{u}_N \perp \widehat{u}_T$

5. Κίνηση κατά μήκος έλλειψης

Άρα η καμπυλότητα είναι

$$\kappa(t) = \frac{1}{|\vec{v}(t)|} \left| \frac{d\widehat{u}_T}{dt} \right| = \frac{1}{\omega \sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}} \frac{\omega ab}{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}$$

$$= \frac{ab}{(a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{3/2}}$$



$$\kappa_B = \frac{ab}{(a^2)^{3/2}} = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2}$$

$$\kappa_A = \frac{ab}{(b^2)^{3/2}} = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}$$

Αν $a > b$ (π.χ. $a = 2b$) τότε $\kappa_A = \frac{2}{b}$ & $\kappa_B = \frac{1}{4b}$.

Άρα $\kappa_A = 8\kappa_B$. Στα υπόλοιπα σημεία της τροχιάς ισχύει $\kappa_B < \kappa < \kappa_A$. Άρα $\kappa \in [\frac{b}{a^2}, \frac{a}{b^2}]$

Στο σημείο A η μεγαλύτερη καμπυλότητα της τροχιάς είναι εμφανής. Εξαρτάται και από το b , όχι μόνο από το a/b . Όσο μειώνεται το b τόσο αυξάνεται η καμπυλότητα στο A.

- Στο σημείο A έχουμε τη μέγιστη καμπυλότητα.
- Στο σημείο B έχουμε την ελάχιστη καμπυλότητα.

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} a \cos \omega t \\ b \sin \omega t \end{bmatrix}, \quad \omega > 0$$