ΦΥΣΙΚΗ Ι

Κοσμάς Γαζέας

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

- Γενική Αντιμετώπιση
- Διατήρηση της Ορμής σε Συστήματα Μεταβλητής Μάζας
- Κίνηση Πυραύλου
- Διάφορα Προβλήματα

ΦΥΣΙΚΗ Ι

Κοσμάς Γαζέας

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

	ALONSO FINN	GIANCOLI	HALLIDAY-RESNICK WALKER	YOUNG FREEDMAN
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ	7.10	9.10	9.7, 9.12	8.5-8.6
ΚΙΝΗΣΗ ΠΥΡΑΥΛΟΥ	7.10	9.10	9.12	8.6

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Χρονική μεταβολή της μάζας ενός συστήματος

m: σταθερή

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

m: μεταβλητή

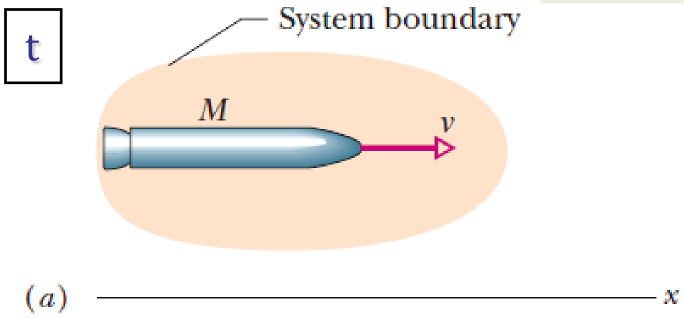
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

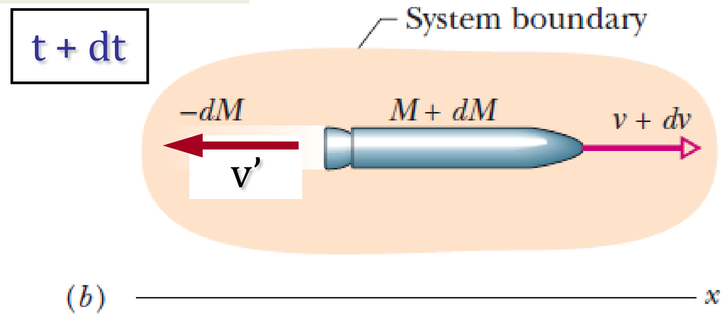
$m\frac{d\vec{v}}{dt}$: Μεταβολή της ορμής εξαιτίας της επιτάχυνσης

$\vec{v}\frac{dm}{dt}$: Μεταβολή της ορμής εξαιτίας της χρονικής μεταβολής της μάζας

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Κίνηση Πυραύλου





$$\vec{P}_i = M\vec{v}$$

$$\vec{P}_f = (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - dM\,\vec{v}'$$

Μεταβολή της Ορμής του Συστήματος

$$d\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \{(M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - dM\vec{v}'\} - M\vec{v}$$

$$\Downarrow$$

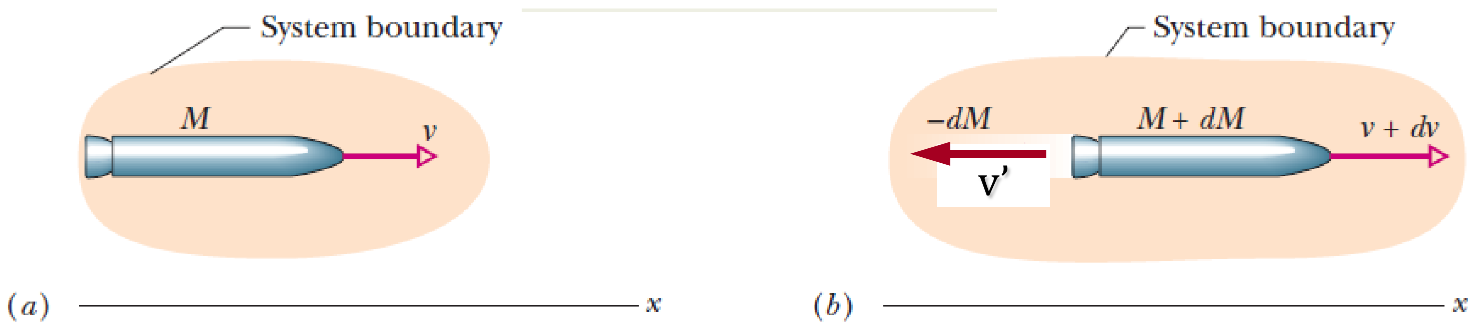
$$d\vec{P} = Md\vec{v} + \vec{v}dM - \vec{v}'dM = Md\vec{v} - dM(\vec{v}' - \vec{v})$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{d\vec{P} = M\,d\vec{v} - \vec{v}_{rel}\,dM}$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Κίνηση Πυραύλου



$$\boxed{d\vec{P} = M\,d\vec{v} - \vec{v}_{rel}\,dM} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{dP = M\,dv + v_{rel}\,dM}$$

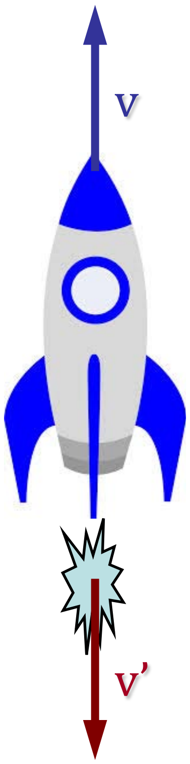
$$\boxed{\frac{dP}{dt} = M\frac{dv}{dt} + v_{rel}\frac{dM}{dt}}$$

Εάν dP/dt = 0 $\quad 0 = M\dfrac{dv}{dt} + v_{rel}\dfrac{dM}{dt} \Rightarrow M\dfrac{dv}{dt} = -v_{rel}\dfrac{dM}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{-v_{rel}\dfrac{dM}{dt}}$

Ωστική Δύναμη

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Κατακόρυφη Κίνηση Πυραύλου σε Βαρυτικό Πεδίο



$$\boxed{\frac{dP}{dt} = M\frac{dv}{dt} + v_{rel}\frac{dM}{dt}}$$

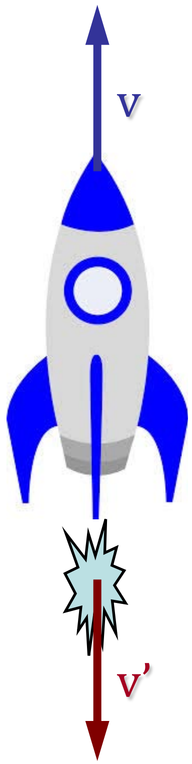
$$M\frac{dv}{dt} + v_{rel}\frac{dM}{dt} = -Mg \Rightarrow dv + \frac{v_{rel}}{M}dM = -g\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{v_0}^{v} dv + v_{rel}\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M} = -g\int_{0}^{t} dt$$

$$v - v_0 + v_{rel}(\ln M - \ln M_0) = -g\,t \Rightarrow \boxed{v = v_0 + v_{rel}\ln\left(\frac{M_0}{M}\right) - gt}$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ



Εάν ο πύραυλος παραμένει ακίνητος στον αέρα σε μικρό ύψος από την επιφάνεια της Γης, τότε συνεχίζει να ισχύει dP/dt = -Mg αλλά dv/dt = 0, οπότε η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = M\frac{dv}{dt} + v_{rel}\frac{dM}{dt}}$$

$$0 + v_{rel}\frac{dM}{dt} = -Mg \Rightarrow \frac{dM}{M} = -\frac{g}{v_{rel}}dt$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M} = -\frac{g}{v_{rel}}\int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{M}{M_0}\right) = -\frac{g}{v_{rel}}t \Rightarrow \boxed{M = M_0 e^{-\frac{g}{v_{rel}}t}}$$

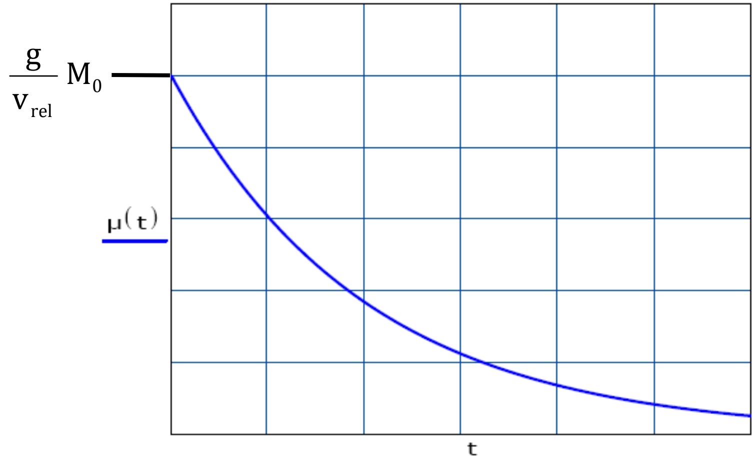
Η συνολική μάζα του πυραύλου βαίνει κατά συνέπεια εκθετικά ελαττούμενη.
Πόσος είναι ο ρυθμός εκτόξευσης των αερίων μ(t) στην περίπτωση αυτή;

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Υπολογισμός του ρυθμού εκτόξευσης των αερίων στην περίπτωση που ο πύραυλος παραμένει ακίνητος

$$\mu(t) = -\frac{dM}{dt} = \frac{g}{v_{rel}} M \Rightarrow \boxed{\mu(t) = \frac{g}{v_{rel}} M_0 e^{-\frac{g}{v_{rel}}t}}$$

Όπως είναι προφανές, ο ρυθμός εκτόξευσης των αερίων μ(t) ελαττώνεται κι αυτός με τον ίδιο εκθετικό ρυθμό που ελαττώνεται και η μάζα του συστήματος.

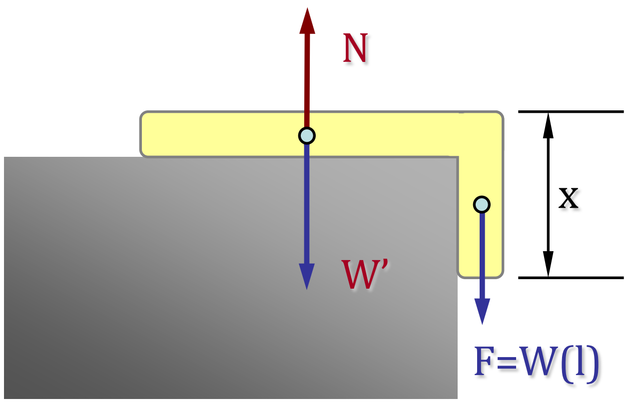


ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Σχοινί κυλίεται χωρίς τριβές υπό την επίδραση του βάρους του τμήματος που κρέμεται ελεύθερο.

M : Συνολική μάζα σχοινιού
L_0 : Αρχικό μήκος του σχοινιού που κρέμεται ελεύθερο
L : Συνολικό μήκος σχοινιού
V_F : Τελική ταχύτητα

Να υπολογιστεί η τελική του ταχύτητα, όταν απελευθερωθεί όλο το μήκος του.



$$\frac{dP}{dt} = F \Rightarrow \frac{dP}{dt} = W_x = M\frac{x}{L}g \Rightarrow M\frac{dv}{dt} = M\frac{x}{L}g$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{L}x \Rightarrow \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{g}{L}x \Rightarrow v\frac{dv}{dx} = \frac{g}{L}x \Rightarrow vdv = \frac{g}{L}x\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{V_F} v dv = \frac{g}{L}\int_{L_0}^{L} x dx \Rightarrow \frac{V_F^2}{2} = \frac{g}{2L}\left(L^2 - L_0^2\right) \Rightarrow \boxed{V_F = \sqrt{\frac{g}{L}\left(L^2 - L_0^2\right)}}$$