

ΕΝΟΤΗΤΑ 5 : ΝΟΜΟΙ ΝΕΥΤΩΝΑ

Ευάγγελος Τυρλής

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Τομέας Φυσικής Περιβάλλοντος & Μετεωρολογίας

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ (5 Ασκήσεις)

Α. ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΜΑΖΑΣ ΣΕ ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ (1)

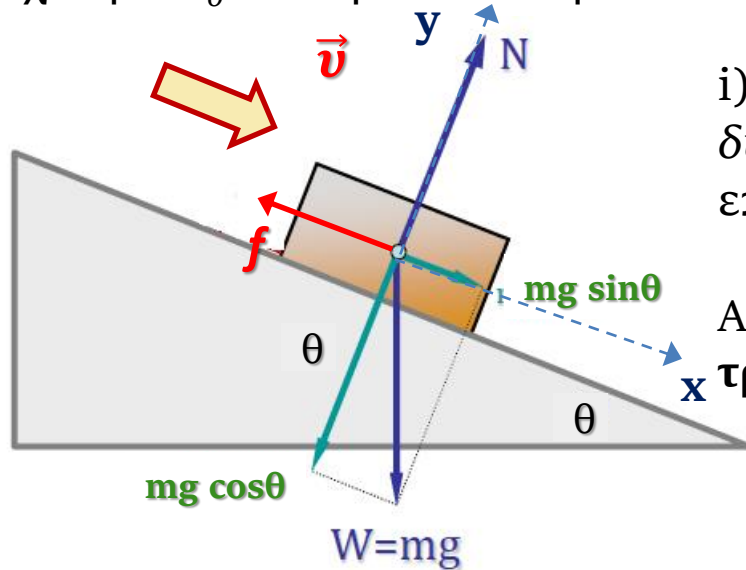
Β. ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΑΖΩΝ ΣΕ ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ (1)

Γ. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΒΟΛΗ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ (1)

Δ. ΚΙΝΗΣΗ ΣΩΜΑΤΟΣ ΣΕ ΜΕΣΟΝ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ (2)

1. Ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο με τριβή

Εφαρμογή: Κύβος μάζας m δύναται να ολισθαίνει ισοταχώς σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ . Ο κύβος εκτοξεύεται προς τα επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο με αρχική ταχύτητα v_0 . Πόση απόσταση θα διανύσει; Θα ολισθήσει προς τα κάτω πάλι;



i) Αξιοποιούμε την πληροφορία ότι ο κύβος έχει τη δυνατότητα ισοταχούς ολίσθησης στο κεκλιμένο επίπεδο.

Αυτό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τον **συντελεστή τριβής ολίσθησης** μ_1 :

Εφαρμογή 2^{ου} Νόμου Νεύτωνα

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow mgsin\theta - f = 0 \Leftrightarrow mgsin\theta - \mu_1 N = 0 \Leftrightarrow mgsin\theta = \mu_1 N \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow N - mgcos\theta = 0 \Leftrightarrow mgcos\theta = N \quad (2)$$

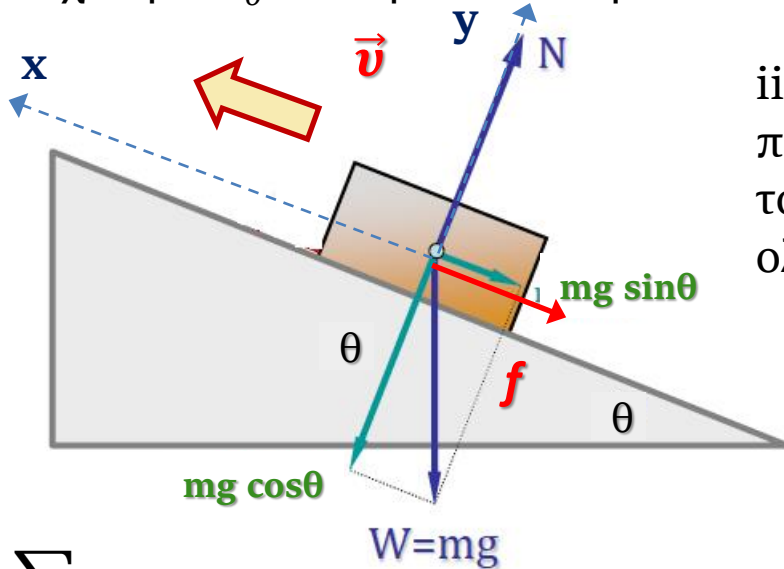
Από (1), (2) έχουμε

$$\mu_1 = \tan \theta$$

Ο συντελεστής χαρακτηρίζει την ολίσθηση του κύβου στο συγκεκριμένο κεκλιμένο επίπεδο ανεξαρτήτως φοράς κίνησης.

1. Ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο με τριβή

Εφαρμογή: Κύβος μάζας m δύναται να ολισθαίνει ισοταχώς σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ . Ο κύβος εκτοξεύεται προς τα επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο με αρχική ταχύτητα v_0 . Πόση απόσταση θα διανύσει; Θα ολισθήσει προς τα κάτω πάλι;



ii) Μελέτη της κίνησης του κύβου όταν εκτοξεύεται προς τα επάνω. Προσαρμόζουμε τους άξονες ώστε το x να είναι θετικό προς τα επάνω. Η τριβή ολίσθησης f είναι προς τα κάτω.

Εφαρμογή 2^{ου} Νόμου Νεύτωνα

$$\sum F_x = ma \Leftrightarrow -mg \sin \theta - f = ma \Leftrightarrow -mg \sin \theta - \mu_1 N = ma \quad (1)$$

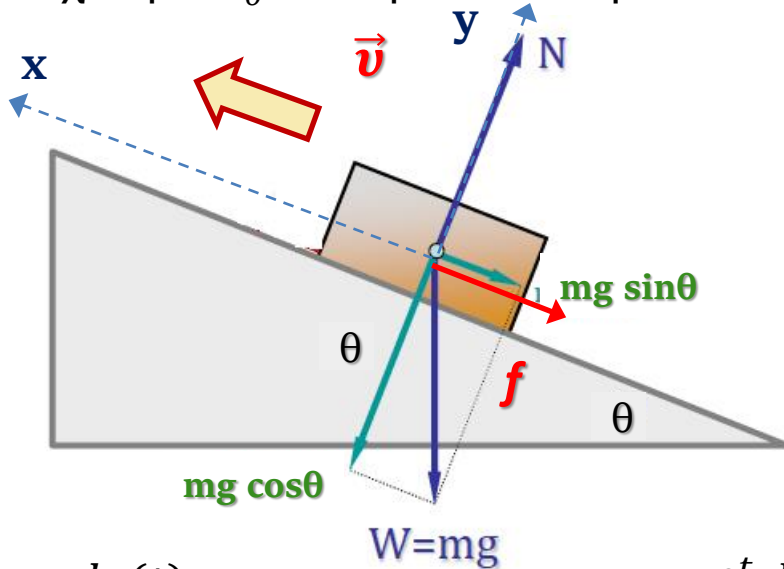
$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow N - mg \cos \theta = 0 \Leftrightarrow mg \cos \theta = N \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε $-mg \sin \theta - \tan \theta mg \cos \theta = ma \Leftrightarrow a = -2g \sin \theta$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -2g \sin \theta \Leftrightarrow \int_0^t \frac{dv(t')}{dt'} dt' = -2g \sin \theta \int_0^t dt' \Leftrightarrow v(t) - v(0) = -2g t \sin \theta$$

1. Ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο με τριβή

Εφαρμογή: Κύβος μάζας m δύναται να ολισθαίνει ισοταχώς σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ . Ο κύβος εκτοξεύεται προς τα επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο με αρχική ταχύτητα v_0 . Πόση απόσταση θα διανύσει; Θα ολισθήσει προς τα κάτω πάλι;



$$v(t) = v_0 - 2 g t \sin \theta$$

Άρα ο κύβος ακινητοποιείται σε χρόνο

$$\tau = \frac{v_0}{2g \sin \theta}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_0(t) - 2 g t \sin \theta \Leftrightarrow \int_0^t \frac{dx(t')}{dt'} dt' = \int_0^t v_0 dt' - 2g \sin \theta \int_0^t t' dt'$$

$$\Leftrightarrow x(t) - \textcolor{red}{x(0)} = v_0 t - g t^2 \sin \theta \Leftrightarrow x(t) = v_0 t - g t^2 \sin \theta$$

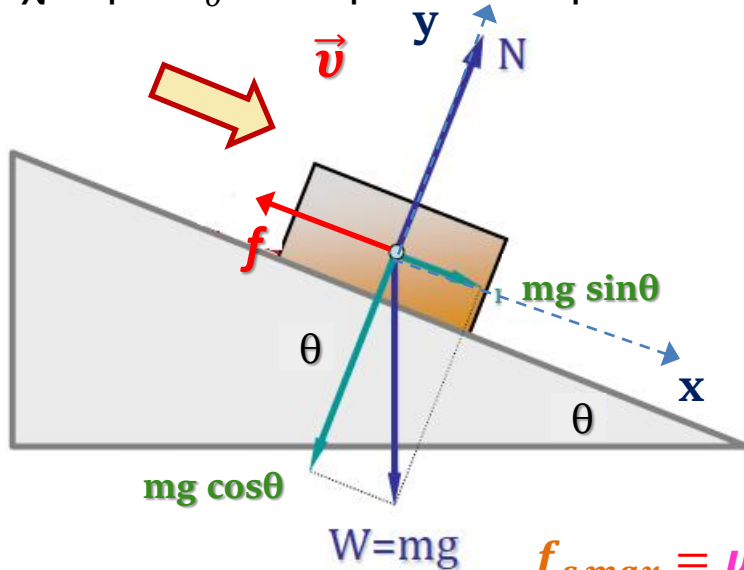
Άρα μέχρι να ακινητοποιηθεί ο κύβος θα διανύσει απόσταση $s = x(\tau)$.

*Για $t=0$ ο κύβος
βρίσκονταν στην αρχή του
άξονα x . Άρα $x(0)=0$*

$$s = \frac{v_0^2}{4g \sin \theta}$$

1. Ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο με τριβή

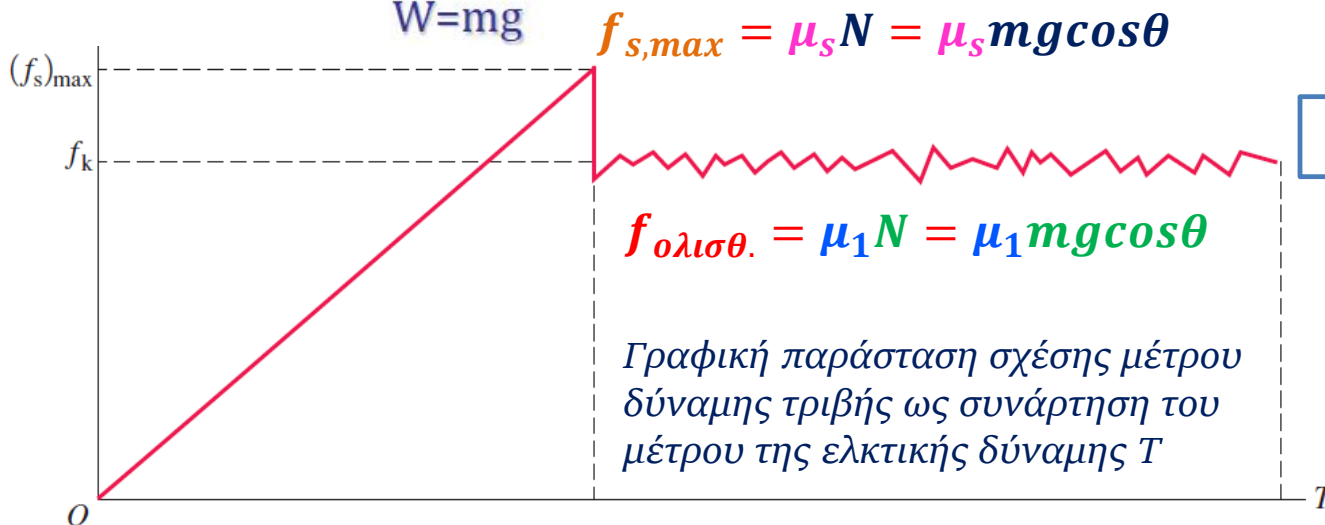
Εφαρμογή: Κύβος μάζας m δύναται να ολισθαίνει ισοταχώς σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ . Ο κύβος εκτοξεύεται προς τα επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο με αρχική ταχύτητα v_0 . Πόση απόσταση θα διανύσει; Θα ολισθήσει προς τα κάτω πάλι;



iii) Μόλις φτάσει στο ανώτατο σημείο, θα ολισθήσει προς τα κάτω;

Μπορεί η ελκτική δύναμη $T=mg \sin \theta$ να υπερνικήσει τη μέγιστη στατική τριβή;

$$\frac{T}{f_{s,max}} = \frac{mg \sin \theta}{\mu_s mg \cos \theta} = \frac{\tan \theta}{\mu_s} = \frac{\mu_1}{\mu_s}$$



$$f_{ολισθ.} = \mu_1 N = \mu_1 mg \cos \theta$$

Γραφική παράσταση σχέσης μέτρου δύναμης τριβής ως συνάρτηση του μέτρου της ελκτικής δύναμης T

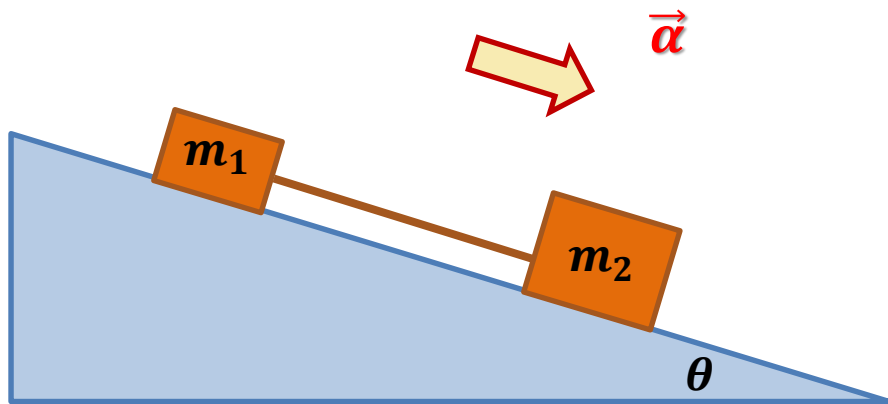
$$\mu_1 \leq \mu_s \Rightarrow T \leq f_{s,max}$$

Άρα ο κύβος δεν θα ολισθήσει εκ νέου προς τα κάτω.

2. Ολίσθηση συστήματος σε κεκλιμένο επίπεδο

Εφαρμογή: Οι μάζες m_1 και m_2 είναι προσδεδεμένες στην αβαρή ράβδο. Το σύστημα ολισθαίνει με επιτάχυνση α . Να βρεθούν τα εξής:

- α) Να υπολογισθεί η τάση T στην ράβδο.
- β) Να υπολογισθεί η επιτάχυνση α .
- γ) Ποιές αλλαγές συμβαίνουν εάν εναλλάγουν οι μάζες;



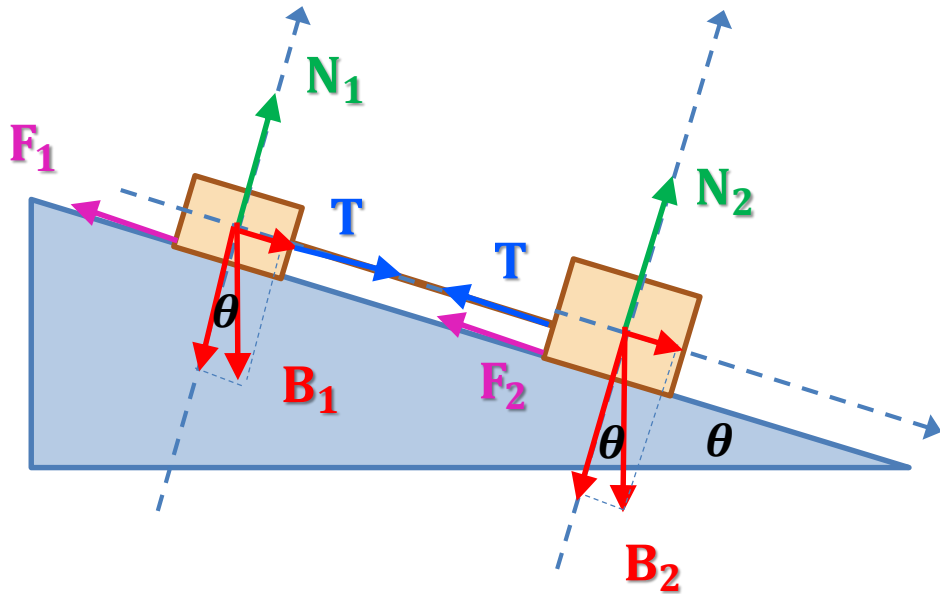
Μάζες	Συντελεστές τριβής ολίσθησης
$m_1 = 1.65 \text{ kg}$	$\mu_1 = 0.226$
$m_2 = 3.30 \text{ kg}$	$\mu_2 = 0.113$

Παρατήρηση: Αφού η ράβδος είναι αβαρής αν εφαρμόσουμε τον 2^ο Νόμο Νεύτωνα καταλήγουμε στο ότι η τάση στο ένα άκρο της ράβδου είναι ίση με την τάση στο άλλο άκρο της.

2. Ολίσθηση συστήματος σε κεκλιμένο επίπεδο

Εφαρμογή: Οι μάζες m_1 και m_2 είναι προσδεμένες στην αβαρή ράβδο. Το σύστημα ολισθαίνει με επιτάχυνση α .

α) Να υπολογισθεί η τάση T στην ράβδο.



Αναλύουμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες κατά μήκος του παράλληλου και κάθετου στην κίνηση των μαζών.

Εφαρμόζουμε τον 2^ο Νόμο Νεύτωνα για κάθε σώμα και κάθε συνιστώσα.

Η ράβδος συγκρατεί τις δύο μάζες μαζί.

$$\left. \begin{aligned} m_1 g \sin \theta - \mu_1 N_1 + T &= m_1 \alpha \\ N_1 &= m_1 g \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} m_2 g \sin \theta - \mu_2 N_2 - T &= m_2 \alpha \\ N_2 &= m_2 g \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

$$m_1 g \sin \theta - \mu_1 m_1 g \cos \theta + T = m_1 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha = g \sin \theta - \mu_1 g \cos \theta + T/m_1$$

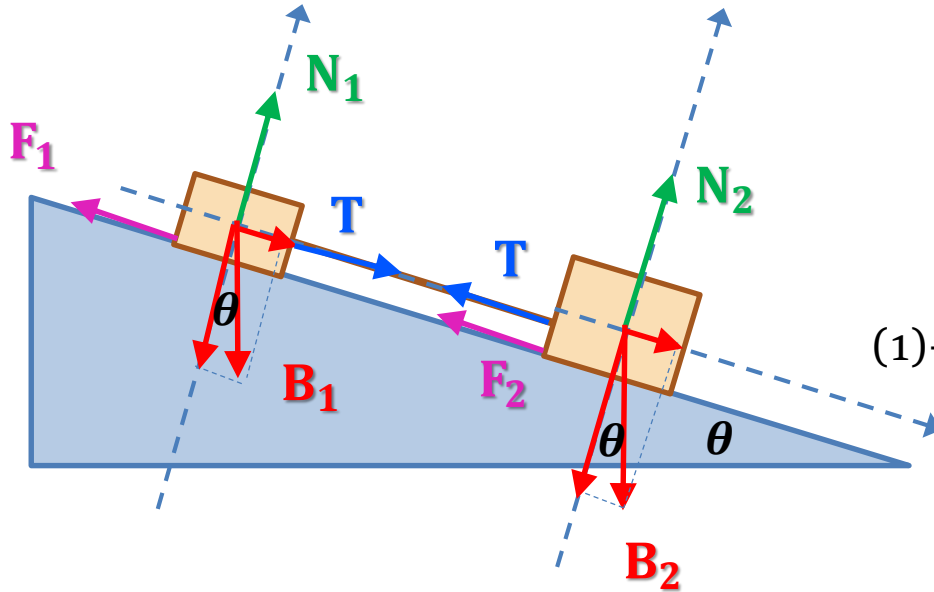
$$m_2 g \sin \theta - \mu_2 m_2 g \cos \theta = m_2 \alpha \Leftrightarrow$$

$$\alpha = g \sin \theta - \mu_2 g \cos \theta - T/m_2$$

2. Ολίσθηση συστήματος σε κεκλιμένο επίπεδο

Εφαρμογή: Οι μάζες m_1 και m_2 είναι προσδεμένες στην αβαρή ράβδο. Το σύστημα ολισθαίνει με επιτάχυνση α .

α) Να υπολογισθεί η τάση T στην ράβδο.



$$\alpha = g \sin \theta - \mu_1 g \cos \theta + T/m_1 \quad (1)$$

$$\alpha = g \sin \theta - \mu_2 g \cos \theta - T/m_2 \quad (2)$$

$$(1)-(2) \Rightarrow -(\mu_1 - \mu_2) \cos \theta + T \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow T = \frac{(\mu_1 - \mu_2) g \cos \theta m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

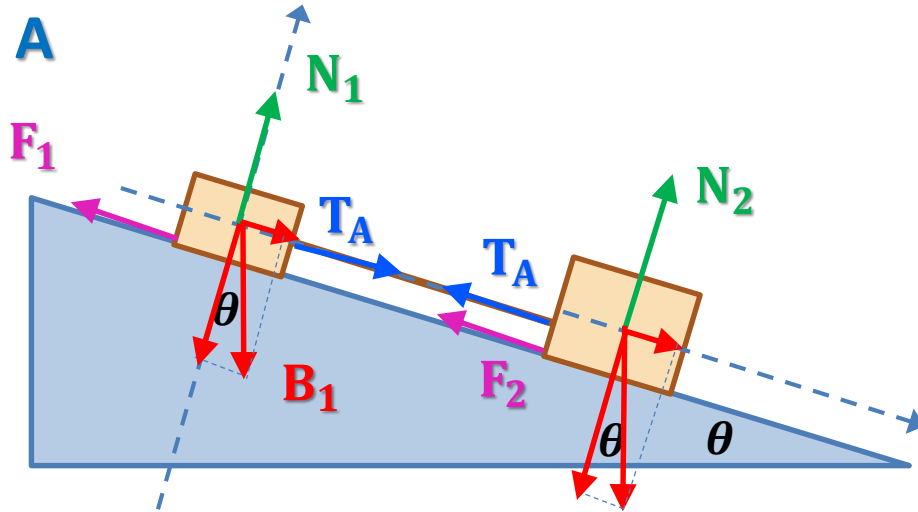
β) Να υπολογισθεί η επιτάχυνση α .

$$(1),(3) \Rightarrow \alpha = g \sin \theta - \mu_1 g \cos \theta + \frac{(\mu_1 - \mu_2) g \cos \theta m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\text{ή } (2),(3) \Rightarrow \alpha = g \sin \theta - \mu_2 g \cos \theta - \frac{(\mu_1 - \mu_2) g \cos \theta m_1}{m_1 + m_2}$$

2. Ολίσθηση συστήματος σε κεκλιμένο επίπεδο

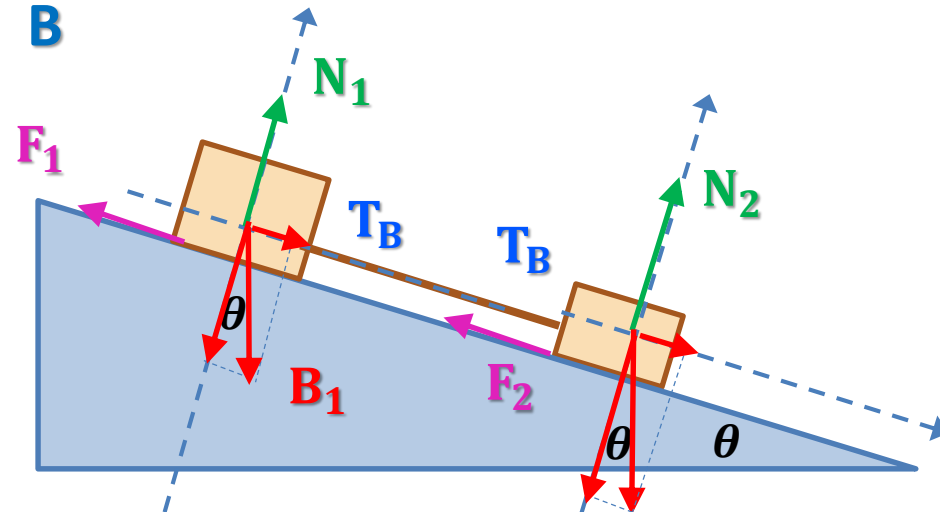
γ) Ποιές αλλαγές συμβαίνουν εάν εναλλαγούν οι μάζες;



$$m_1 = 1.65 \text{ kg} \quad m_2 = 3.30 \text{ kg} \quad \mathbf{B_2}$$

$$\mu_1 = 0.226 \quad \mu_2 = 0.113 \quad \mu_1 > \mu_2$$

$$T = \frac{(\mu_1 - \mu_2) g \cos \theta m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

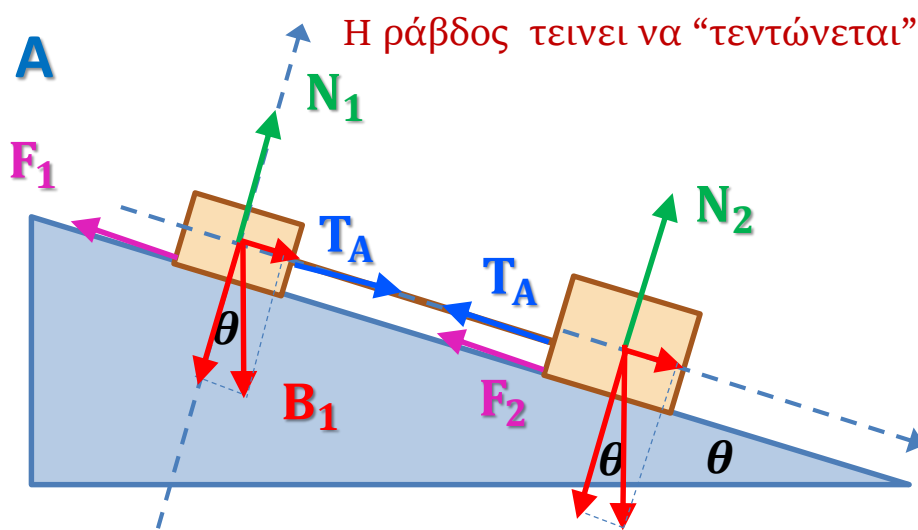


$$m_1 = 3.30 \text{ kg} \quad m_2 = 1.65 \text{ kg} \quad \mathbf{B_2}$$

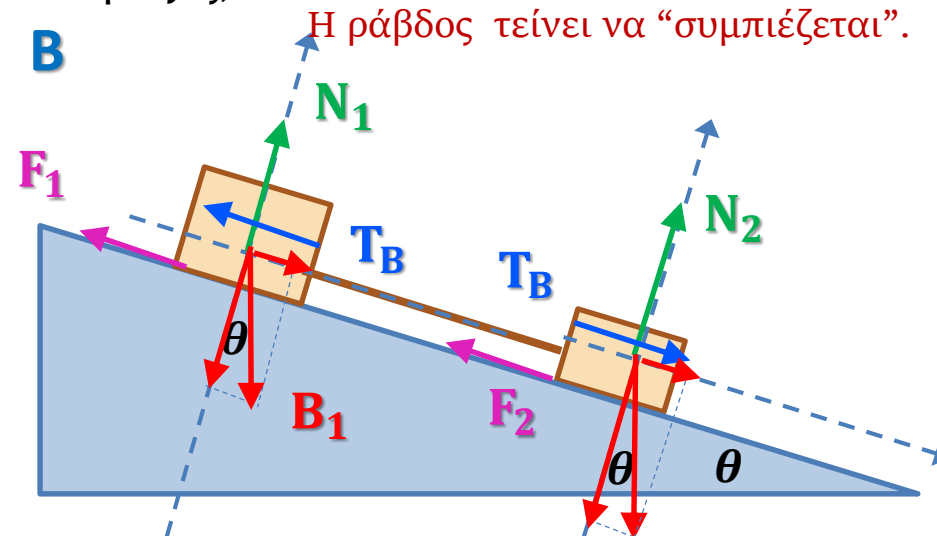
$$\mu_1 = 0.113 \quad \mu_2 = 0.226 \quad \mu_1 < \mu_2$$

2. Ολίσθηση συστήματος σε κεκλιμένο επίπεδο

γ) Ποιές αλλαγές συμβαίνουν εάν εναλλαγούν οι μάζες;



$$m_1 = 1.65 \text{ kg} \quad m_2 = 3.30 \text{ kg} \quad \mu_1 = 0.226 \quad \mu_2 = 0.113 \quad \mu_1 > \mu_2$$



$$m_1 = 3.30 \text{ kg} \quad m_2 = 1.65 \text{ kg} \quad \mu_1 = 0.113 \quad \mu_2 = 0.226 \quad \mu_1 < \mu_2$$

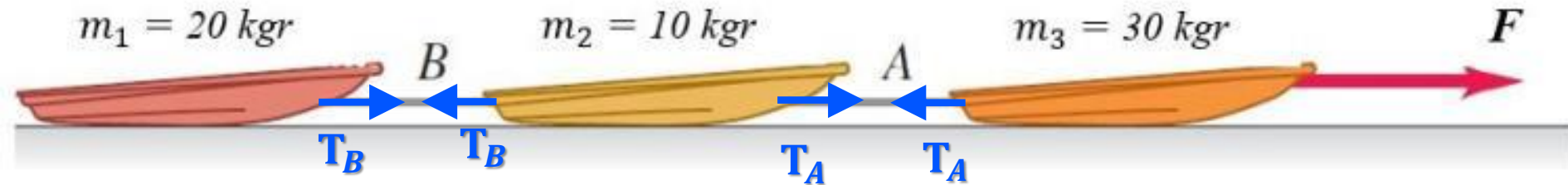
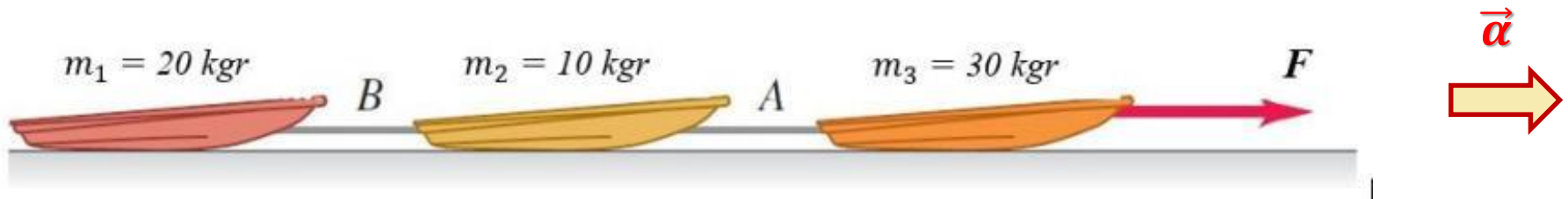
$$T = \frac{(\mu_1 - \mu_2) g \cos \theta m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$T_B = -T_A$$

- 1) Το μέτρο της τάσης εξαρτάται από την διαφορά των συντελεστών τριβής των σωμάτων και τις μάζες τους.
- 2) Αν εναλλαγούν οι μάζες τότε η φορά της τάσης στην ράβδο αλλάζει.

3. Σύστημα ελκήθρων

Εφαρμογή: Τρία έλκηθρα με μάζες m_1 , m_2 & m_3 έλκονται προς τα δεξιά από οριζόντια ελκτική δύναμη $\vec{F}$ με μέτρο 180 N . Κινούνται χωρίς τριβή επάνω σε πάγο και είναι δεμένα μεταξύ τους με οριζόντια σχοινιά. Να υπολογίσετε την τάση στα σχοινιά και την επιτάχυνση α .



Εφαρμογή 2^{ου} Νόμου Νεύτωνα

$$\sum F_x = m_1 \alpha$$

$$T_B = m_1 \alpha$$

$$\sum F_x = m_2 \alpha$$

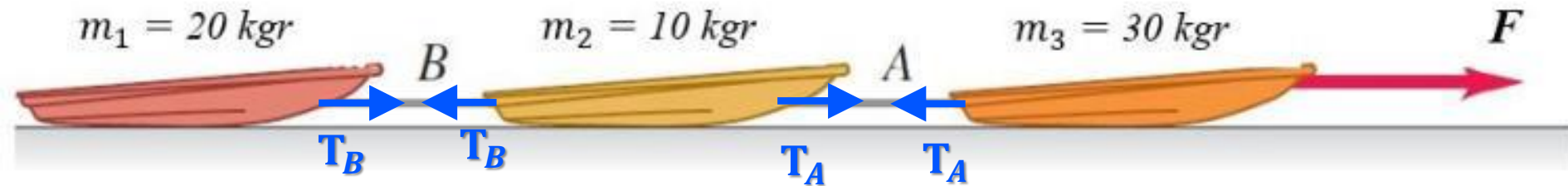
$$T_A - T_B = m_2 \alpha$$

$$\sum F_x = m_3 \alpha$$

$$F - T_A = m_3 \alpha$$

3. Σύστημα ελκήθρων

Εφαρμογή: Τρία έλκηθρα με μάζες m_1 , m_2 & m_3 έλκονται προς τα δεξιά από οριζόντια ελκτική δύναμη $\vec{F}$ με μέτρο 180 N . Κινούνται χωρίς τριβή επάνω σε πάγο και είναι δεμένα μεταξύ τους με οριζόντια σχοινιά. Να υπολογίσετε την τάση στα σχοινιά και την επιτάχυνση α .



$$T_B = m_1 \alpha$$

Σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους.
Απαλείφονται οι **τάσεις** και λύνουμε ως προς α .

$$T_A - T_B = m_2 \alpha \Rightarrow T_A - m_1 \alpha = m_2 \alpha \Rightarrow T_A = (m_1 + m_2) \alpha$$

$$F - T_A = m_3 \alpha \Rightarrow F = T_A + m_3 \alpha \Rightarrow F = (m_1 + m_2) \alpha + m_3 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\alpha = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{180\text{ N}}{60\text{ kgr}} = 3\text{ m/sec}^2$$

$$T_B = m_1 \alpha = 20\text{ (kgr)} \times 3\text{ m/sec}^2 = 60\text{ N} \quad T_A = (m_1 + m_2) \alpha = 30\text{ (kgr)} \times 3\text{ m/sec}^2 = 90\text{ N}$$

4. Κατακόρυφη βολή με αντίσταση

Μελέτη: Κατακόρυφη βολή μάζας m με αρχική ταχύτητα v_0 και αντίσταση $F_\alpha = -\kappa v$.

i) Υπολογισμός $v(t)$

$$\sum F_x = m \alpha \Rightarrow -mg - \kappa v = m \alpha \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} = -g - \frac{\kappa}{m} v(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{\kappa}{m} \left(v + \frac{m}{\kappa} g \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(v + \frac{m}{\kappa} g \right) = -\frac{\kappa}{m} \left(v + \frac{m}{\kappa} g \right)$$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{\kappa} g \right) = 0$

Θέτουμε $u = u(t) = v + \frac{m}{\kappa} g$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\kappa}{m} u \Rightarrow \frac{1}{u} \frac{du}{dt} = -\frac{\kappa}{m} \Rightarrow \int \frac{1}{u} \frac{du}{dt} dt = \int -\frac{\kappa}{m} dt \Rightarrow \int \frac{d}{dt} \ln u(t) dt = \int -\frac{\kappa}{m} dt \Rightarrow$$

$$\ln u = -\frac{\kappa}{m} t + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\ln u = \ln e^{-\frac{\kappa}{m} t + c_1} \Rightarrow u = e^{-\frac{\kappa}{m} t + c_1} \Rightarrow u = e^{c_1} e^{-\frac{\kappa}{m} t} \Rightarrow u = c e^{-\frac{\kappa}{m} t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

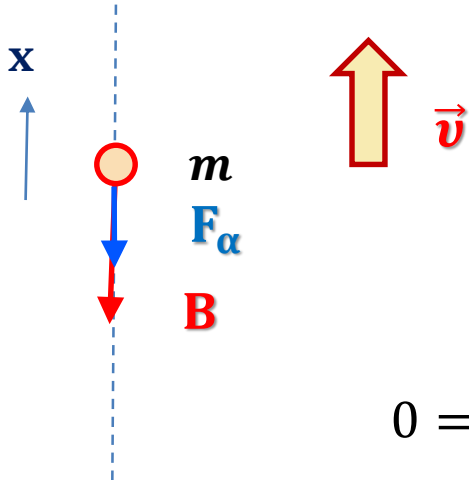
Άρα $v(t) = u(t) - \frac{m}{\kappa} g = c e^{-\frac{\kappa}{m} t} - \frac{m}{\kappa} g$ Για $t=0$ έχουμε $v(0)=v_0$. Άρα $c = v_0 + \frac{m}{\kappa} g$

Επομένως

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{m}{\kappa} g \right) e^{-\frac{\kappa}{m} t} - \frac{m}{\kappa} g$$

4. Κατακόρυφη βολή με αντίσταση

Μελέτη: Κατακόρυφη βολή μάζας m με αρχική ταχύτητα v_0 και αντίσταση $F_\alpha = -\kappa v$.



ii) Υπολογισμός χρόνου ανόδου t_α

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)e^{-\frac{\kappa}{m}t} - \frac{m}{\kappa}g$$

Για $t=t_\alpha$ έχουμε $v=0$.
Το σώμα σταματά να ανεβαίνει.

$$0 = \left(v_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)e^{-\frac{\kappa}{m}t_\alpha} - \frac{m}{\kappa}g \Rightarrow \left(v_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)e^{-\frac{\kappa}{m}t_\alpha} = \frac{m}{\kappa}g$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{\kappa}{m}t_\alpha} = \frac{\frac{m}{\kappa}g}{v_0 + \frac{m}{\kappa}g} \Rightarrow e^{-\frac{\kappa}{m}t_\alpha} = \frac{\frac{m}{\kappa}g}{\frac{v_0\kappa + mg}{\kappa}} \Rightarrow e^{-\frac{\kappa}{m}t_\alpha} = \frac{mg}{v_0\kappa + mg}$$

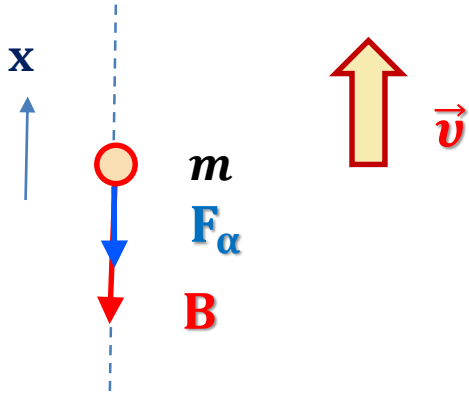
$$\Rightarrow e^{-\frac{\kappa}{m}t_\alpha} = e^{\ln \frac{mg}{v_0\kappa + mg}} \Rightarrow -\frac{\kappa}{m}t_\alpha = \ln \frac{mg}{v_0\kappa + mg} \Rightarrow \frac{\kappa}{m}t_\alpha = \ln \frac{v_0\kappa + mg}{mg}$$

Επομένως

$$t_\alpha = \frac{m}{\kappa} \ln\left(1 + \frac{v_0\kappa}{mg}\right)$$

4. Κατακόρυφη βολή με αντίσταση

Μελέτη: Κατακόρυφη βολή μάζας m με αρχική ταχύτητα v_0 και αντίσταση $F_{\alpha} = -\kappa v$.



iii) Υπολογισμός κατακόρυφης απόστασης $x(t)$

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{m}{\kappa} g \right) e^{-\frac{\kappa}{m} t} - \frac{m}{\kappa} g \Rightarrow$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(v_0 + \frac{m}{\kappa} g \right) e^{-\frac{\kappa}{m} t} - \frac{m}{\kappa} g \Rightarrow \int \frac{dx(t)}{dt} dt = \left(v_0 + \frac{m}{\kappa} g \right) \int e^{-\frac{\kappa}{m} t} dt + \frac{m}{\kappa} g \int dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx(t)}{dt} dt = \left(v_0 + \frac{m}{\kappa} g \right) \int \frac{d}{dt} \left[\left(-\frac{m}{\kappa} \right) e^{-\frac{\kappa}{m} t} \right] dt + \frac{m}{\kappa} g \int dt \Rightarrow$$

$$x(t) = \left(v_0 + \frac{m}{\kappa} g \right) \left(-\frac{m}{\kappa} \right) e^{-\frac{\kappa}{m} t} - \frac{m}{\kappa} g t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Για $t=0$ έχουμε $x(0)=0$.

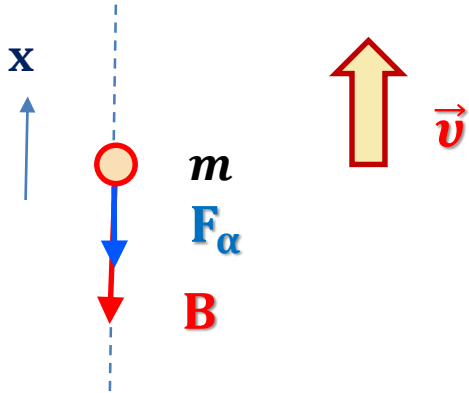
Άρα $c = \left(\frac{m}{\kappa} \right) \left(v_0 + \frac{m}{\kappa} g \right)$

Επομένως

$$x(t) = \left(\frac{m}{\kappa} \right) \left(v_0 + \frac{m}{\kappa} g \right) (1 - e^{-\frac{\kappa}{m} t}) - \frac{m}{\kappa} g t$$

4. Κατακόρυφη βολή με αντίσταση

Μελέτη: Κατακόρυφη βολή μάζας m με αρχική ταχύτητα v_0 και αντίσταση $F_\alpha = -\kappa v$.



iv) Μέγιστο ύψος ανόδου h

$$t_\alpha = \frac{m}{\kappa} \ln\left(1 + \frac{v_0 \kappa}{mg}\right)$$

Χρόνος ανόδου

$$x(t) = \left(\frac{m}{\kappa}\right) \left(v_0 + \frac{m}{\kappa} g\right) (1 - e^{-\frac{\kappa}{m} t}) - \frac{m}{\kappa} g t$$

$$h = \left(\frac{m}{\kappa}\right) \left(v_0 + \frac{m}{\kappa} g\right) (1 - e^{-\frac{\kappa}{m} \left\{ \frac{m}{\kappa} \ln\left(1 + \frac{v_0 \kappa}{mg}\right) \right\}}) - \frac{m}{\kappa} g \left\{ \frac{m}{\kappa} \ln\left(1 + \frac{v_0 \kappa}{mg}\right) \right\}$$

$$= \left(\frac{m}{\kappa}\right) \left(v_0 + \frac{m}{\kappa} g\right) \left(1 - e^{\ln \frac{mg}{mg + v_0 \kappa}}\right) - g \frac{m^2}{\kappa^2} \ln\left(1 + \frac{v_0 \kappa}{mg}\right)$$

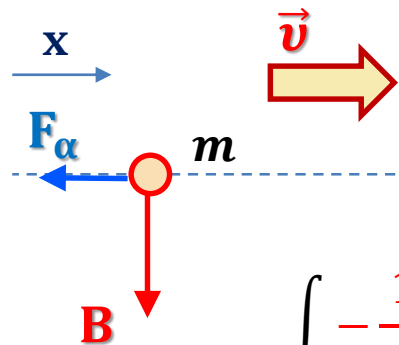
$$= \left(\frac{m}{\kappa}\right) \left(\frac{\kappa v_0 + mg}{\kappa}\right) \left(1 - \frac{mg}{\kappa v_0 + mg}\right) - g \frac{m^2}{\kappa^2} \ln\left(1 + \frac{v_0 \kappa}{mg}\right)$$

Επομένως

$$h = \frac{mv_0}{\kappa} - g \frac{m^2}{\kappa^2} \ln\left(1 + \frac{v_0 \kappa}{mg}\right)$$

5. Κίνηση σε μέσον με αντίσταση

Μελέτη: Κίνηση σε μέσον με αντίσταση $F_\alpha = -Dv^2$, $D > 0$



i) Υπολογισμός $v(t)$

$$\sum F_x = m \alpha \Rightarrow -D v^2 = m \alpha \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{D}{m} v(t)^2 \Rightarrow -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dt} = \frac{D}{m} \Rightarrow$$

$$\int -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dt} dt = \int \frac{D}{m} dt \Rightarrow \int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v} \right) dt = \int \frac{D}{m} dt \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{D}{m} t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Επομένως

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{D}{m} v_0 t}$$

Για $t=0$ θέτουμε $v(0)=v_0$. Άρα $c = \frac{1}{v_0}$

$$\frac{d}{dt} \left(\ln \left(1 + \frac{D}{m} v_0 t \right) \right) = \frac{D}{m} \frac{v_0}{1 + \frac{D}{m} v_0 t}$$

ii) Υπολογισμός $x(t)$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1 + \frac{D}{m} v_0 t} \Rightarrow \int \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{v_0}{1 + \frac{D}{m} v_0 t} dt \Rightarrow \int \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{m}{D} \frac{d}{dt} \left(\ln \left(1 + \frac{D}{m} v_0 t \right) \right) dt \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{m}{D} \ln \left(1 + \frac{D}{m} v_0 t \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

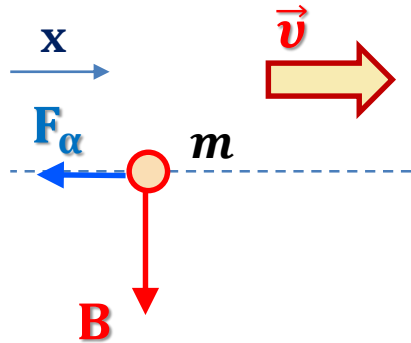
Για $t=0$ θέτουμε $x(0)=x_0$. Άρα $c = x_0$

Επομένως

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{D} \ln \left(1 + \frac{D}{m} v_0 t \right)$$

6. Κίνηση σε μέσον με αντίσταση

Μελέτη: Κίνηση σε μέσον με αντίσταση $F_\alpha = -b\sqrt{v}$, $v > 0$



i) Υπολογισμός $v(t)$

Η παράμετρος ενσωματώνει τη μάζα

$$\frac{dv(t)}{dt} = -b\sqrt{v(t)} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{v}} \frac{dv}{dt} = b \Rightarrow \int -\frac{1}{\sqrt{v}} \frac{dv}{dt} dt = \int b dt \Rightarrow$$

$$-2\sqrt{v} = bt + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

*Για $t=0$ θέτουμε $v(0)=v_0$.
Άρα $c = -2\sqrt{v_0}$*

Επομένως

$$v(t) = \left(\sqrt{v_0} - \frac{b}{2}t\right)^2$$

Η ταχύτητα μηδενίζεται
σε χρόνο

$$\tau = \frac{2\sqrt{v_0}}{b}$$

ii) Υπολογισμός θέσης $x(t)$

$$\frac{d}{dt} \left(\left(\sqrt{v_0} - \frac{b}{2}t\right)^3 \right) = -\frac{3b}{2} \left(\sqrt{v_0} - \frac{b}{2}t\right)^2$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\sqrt{v_0} - \frac{b}{2}t\right)^2 \Rightarrow \int \frac{dx}{dt} dt = \int \left(\sqrt{v_0} - \frac{b}{2}t\right)^2 dt \Rightarrow \int \frac{dx}{dt} dt = \int -\frac{2}{3b} \left(\sqrt{v_0} - \frac{b}{2}t\right)^3 dt$$

$$x(t) = -\frac{2}{3b} \left(\sqrt{v_0} - \frac{b}{2}t\right)^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

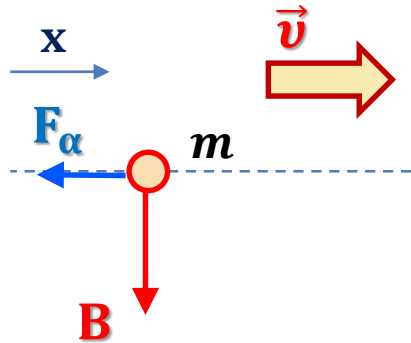
Για $t=0$ θέτουμε $x(0)=x_0$. Άρα $c = x_0 + \frac{2}{3b}(\sqrt{v_0})^3$

$$x(t) = x_0 + \frac{2}{3b}(\sqrt{v_0})^3 - \frac{2}{3b} \left(\sqrt{v_0} - \frac{b}{2}t\right)^3$$

Επομένως

6. Κίνηση σε μέσον με αντίσταση

Μελέτη: Κίνηση σε μέσον με αντίσταση $F_\alpha = -b\sqrt{v}$, $v > 0$



i) Υπολογισμός $v(t)$

Η παράμετρος ενσωματώνει τη μάζα

$$\frac{dv(t)}{dt} = -b\sqrt{v(t)} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{v}} \frac{dv}{dt} = b \Rightarrow \int -\frac{1}{\sqrt{v}} \frac{dv}{dt} dt = \int b dt \Rightarrow$$

$$-2\sqrt{v} = bt + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

*Για $t=0$ θέτουμε $v(0)=v_0$.
Άρα $c = -2\sqrt{v_0}$*

Επομένως

$$v(t) = \left(\sqrt{v_0} - \frac{b}{2}t\right)^2$$

Η ταχύτητα μηδενίζεται
σε χρόνο

$$\tau = \frac{2\sqrt{v_0}}{b}$$

ii) Υπολογισμός θέσης $x(t)$

$$x(t) = x_0 + \frac{2}{3b}(\sqrt{v_0})^3 - \frac{2}{3b}\left(\sqrt{v_0} - \frac{b}{2}t\right)^3$$

Η απόσταση d που θα διανύσει μέχρι να ακινητοποιηθεί

$$d = x(\tau) - x_0 = \frac{2}{3b}(\sqrt{v_0})^3$$