ΦΥΣΙΚΗ I

Κοσμάς Γαζέας

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

ΒΑΡΥΤΗΤΑ

- Νόμος της Βαρύτητας
- Βαρύτητα στο Εσωτερικό και Πάνω από την Επιφάνεια της Γης
- Πλανήτες σε Ελλειπτικές Τροχιές – Νόμοι του Kepler
- Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια
- Τροχιές και Ενέργεια

ΦΥΣΙΚΗ Ι

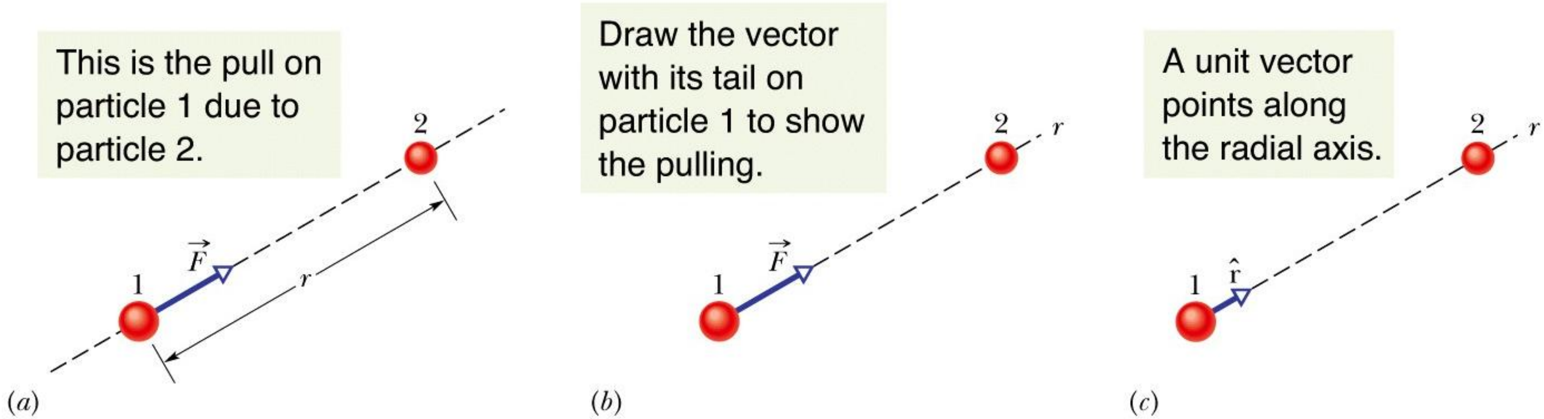
Κοσμάς Γαζέας

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

	ALONSO FINN	GIANCOLI	HALLIDAY-RESNICK WALKER	YOUNG FREEDMAN
Νόμος της Βαρύτητας	13.1, 13.2	6.1, 6.2, 6.3	13.1 έως 13.5	12.1, 12.2
Νόμοι του Kepler	13.5	6.5	13.7	12,5
Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια – Δορυφόροι	13.4, 13.6	6.4, 6.6, 6.7	13.6, 13.8	12.3, 12.4

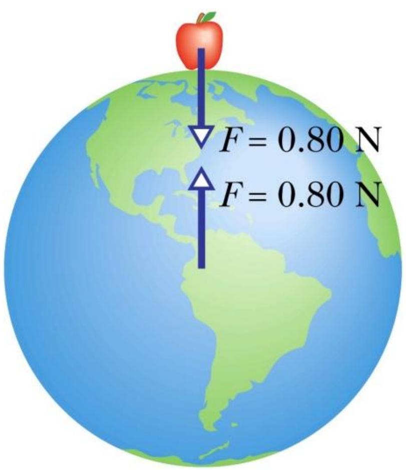
ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ (NEWTON)



Νόμος της Βαρύτητας του Newton σε διανυσματική μορφή

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\,\vec{r}_{12}$$

$$G = 6.67\times 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{Kg^2}$$



Βαρύτητα στην επιφάνεια της Γης

$$mg = G\frac{mM}{R_\Gamma^2} \Rightarrow \boxed{g = G\frac{M}{R_\Gamma^2}}$$

ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ (NEWTON)

Εκτίμηση της μάζας Μ της Γης

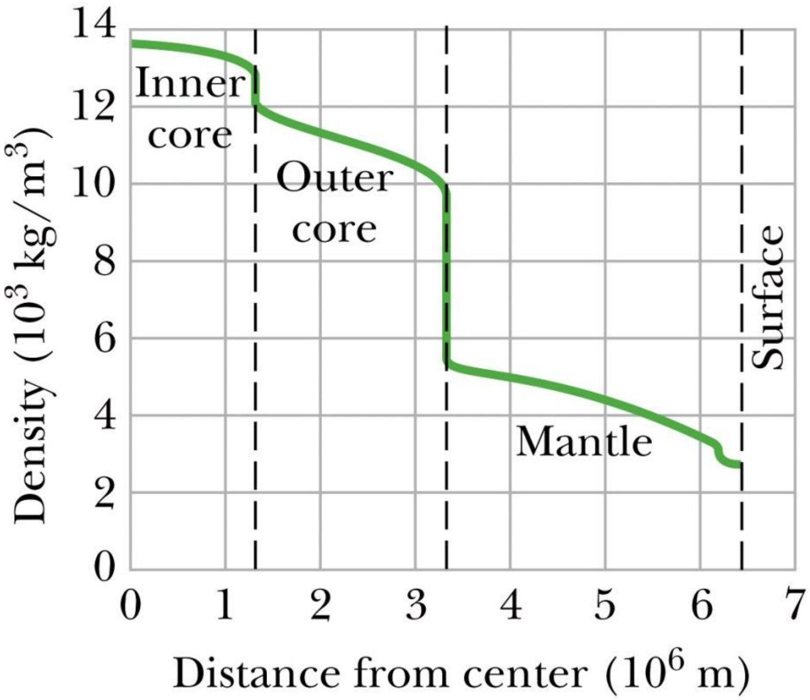
$$\boxed{g = G\frac{M}{R_\Gamma^2} \Rightarrow M = g\frac{R_\Gamma^2}{G}} \Rightarrow M \approx 10 \cdot \frac{(6.4\times 10^6)^2}{6.67\times 10^{-11}}\,\text{Kg} \approx 6\cdot 10^{24}\,\text{Kg}$$

Εκτίμηση της μέσης πυκνότητας ρ_Γ της Γης

$$\boxed{\rho_\Gamma = \frac{M}{V} = \frac{g\frac{R_\Gamma^2}{G}}{\frac{4}{3}\pi R_\Gamma^3} = \frac{3}{4\pi}\frac{g}{GR_\Gamma}}$$

$$\Downarrow$$

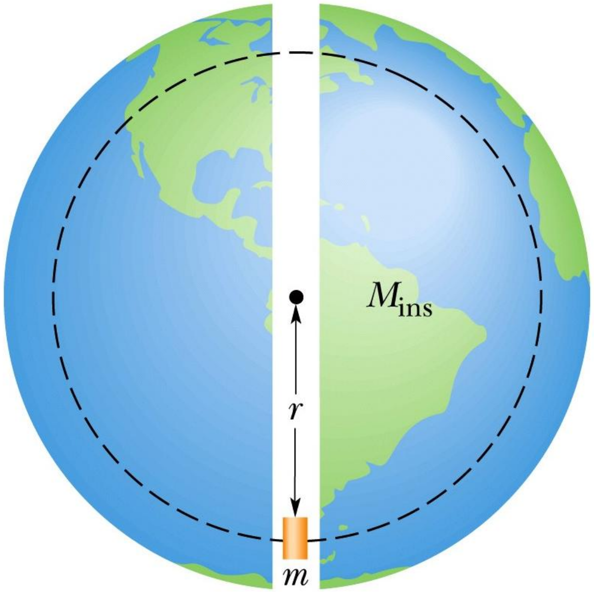
$$\rho_\Gamma \approx 5.5\cdot 10^3\,\text{Kg}/\text{m}^3$$



ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ (NEWTON)

Βαρύτητα στο εσωτερικό της Γης

Ένα ομογενές σφαιρικό κέλυφος δεν ασκεί συνισταμένη βαρυτική δύναμη σε σωματίδιο τοποθετημένο στο εσωτερικό του.



$$F = G \cdot \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \rho \right) \cdot \frac{m}{r^2}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{F = \frac{4\pi}{3} \cdot G \cdot m \cdot \rho \cdot r}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\vec{F} = -k\vec{r}}$$

Το σώμα εκτελεί ταλάντωση με περίοδο:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{4\pi}{3} G m \rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ (NEWTON)

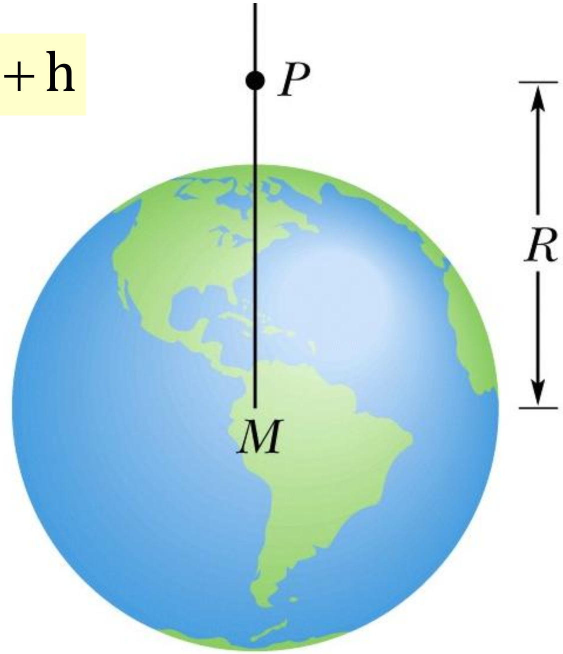
Βαρύτητα πάνω από την επιφάνεια της Γης

$$mg_h = G\frac{mM}{(R_\Gamma + h)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{g_h = G\frac{M}{(R_\Gamma + h)^2} < g}$$

$$R = R_\Gamma + h$$



Παρατηρήσεις

- Εάν η απόσταση από την επιφάνεια της Γης γίνει όσο και η ακτίνα της ($h=R_\Gamma$) τότε το g_h υποτετραπλασιάζεται.
- Το διαστημικό λεωφορείο για το οποίο το $h \approx 400$ km δέχεται βαρυτική επιτάχυνση $g_h \approx 8.70$ m/s^2.

ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ (NEWTON)

Βαρύτητα σε διαφορετικούς Πλανήτες

Σε δύο διαφορετικούς σφαιρικούς πλανήτες με ακτίνες R_A και R_B , των οποίων οι πυκνότητες είναι αντίστοιχα ρ_A και ρ_B, η βαρύτητα στην επιφάνεια καθενός είναι:

$$g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R^2} = \frac{4\pi}{3} G R \rho$$

ΠΛΑΝΗΤΗΣ Α

$$g_A = \frac{4\pi}{3} G R_A \rho_A$$

ΠΛΑΝΗΤΗΣ Β

$$g_B = \frac{4\pi}{3} G R_B \rho_B$$

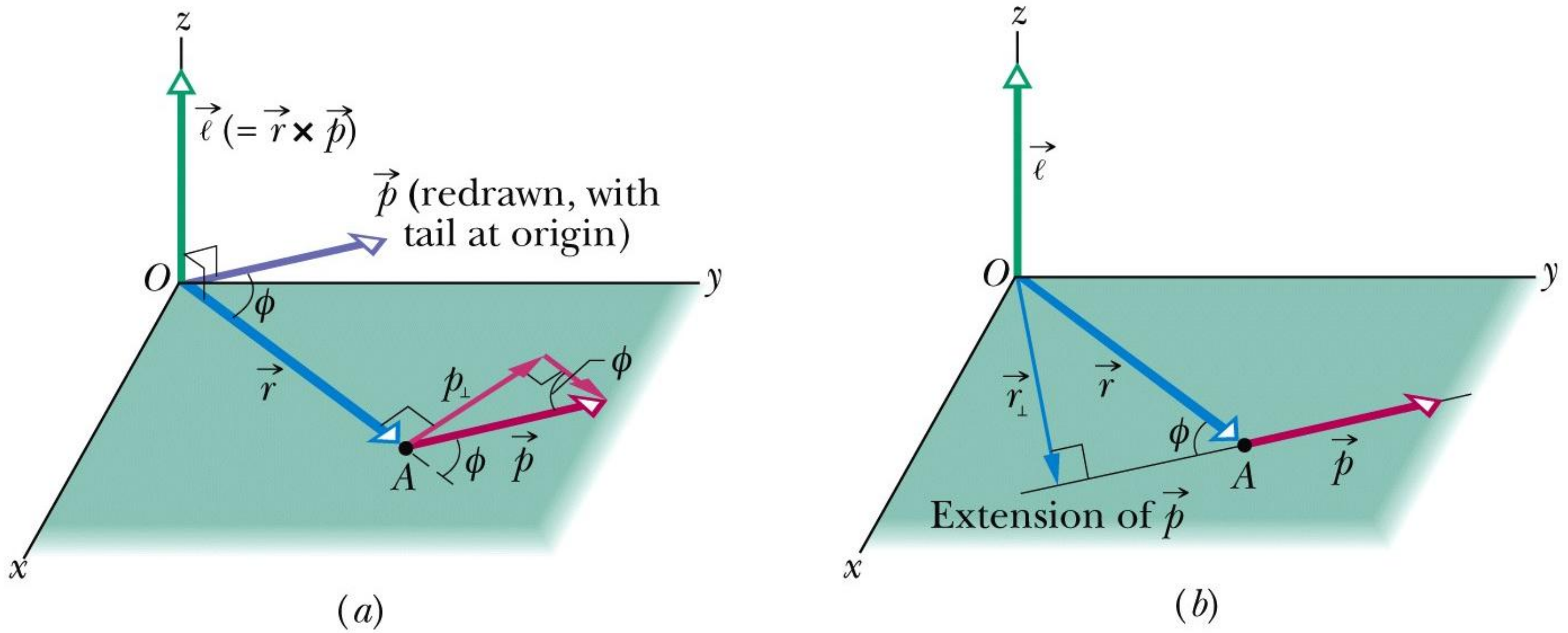
$$\Rightarrow \quad \frac{g_A}{g_B} = \frac{R_A}{R_B} \cdot \frac{\rho_A}{\rho_B}$$

Στην επιφάνεια της Σελήνης το g είναι περίπου το 1/6 (1.63m/s^2) της τιμής στην Γη. Δεδομένου ότι ο λόγος των ακτίνων των δύο αυτών ουρανίων σωμάτων είναι 0.27 συνάγεται πως η μέση πυκνότητα της Σελήνης είναι μικρότερη (0.62 φορές) της μέσης πυκνότητας της Γης.

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$

$$L = r\,mv\sin\varphi \qquad L = r_{\perp}p = r_{\perp}mv \qquad L = r\,p_{\perp}$$



ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}}$$

Απόδειξη

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right) + m\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\left(\vec{v} \times \vec{v}\right) + m\left(\vec{r} \times \vec{a}\right) = 0 + \left(\vec{r} \times m\vec{a}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ KEPLER

Όταν ένα σώμα κινείται υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης η στροφορμή του L είναι διατηρήσιμη ποσότητα.

Μια κεντρική δύναμη (όπως είναι η βαρυτική δύναμη) μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή:

$$\vec{F}(r) = F(r)\,\hat{r} = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Οπότε η ροπή της δύναμης αυτής **τ** ως προς την αρχή των αξόνων είναι:

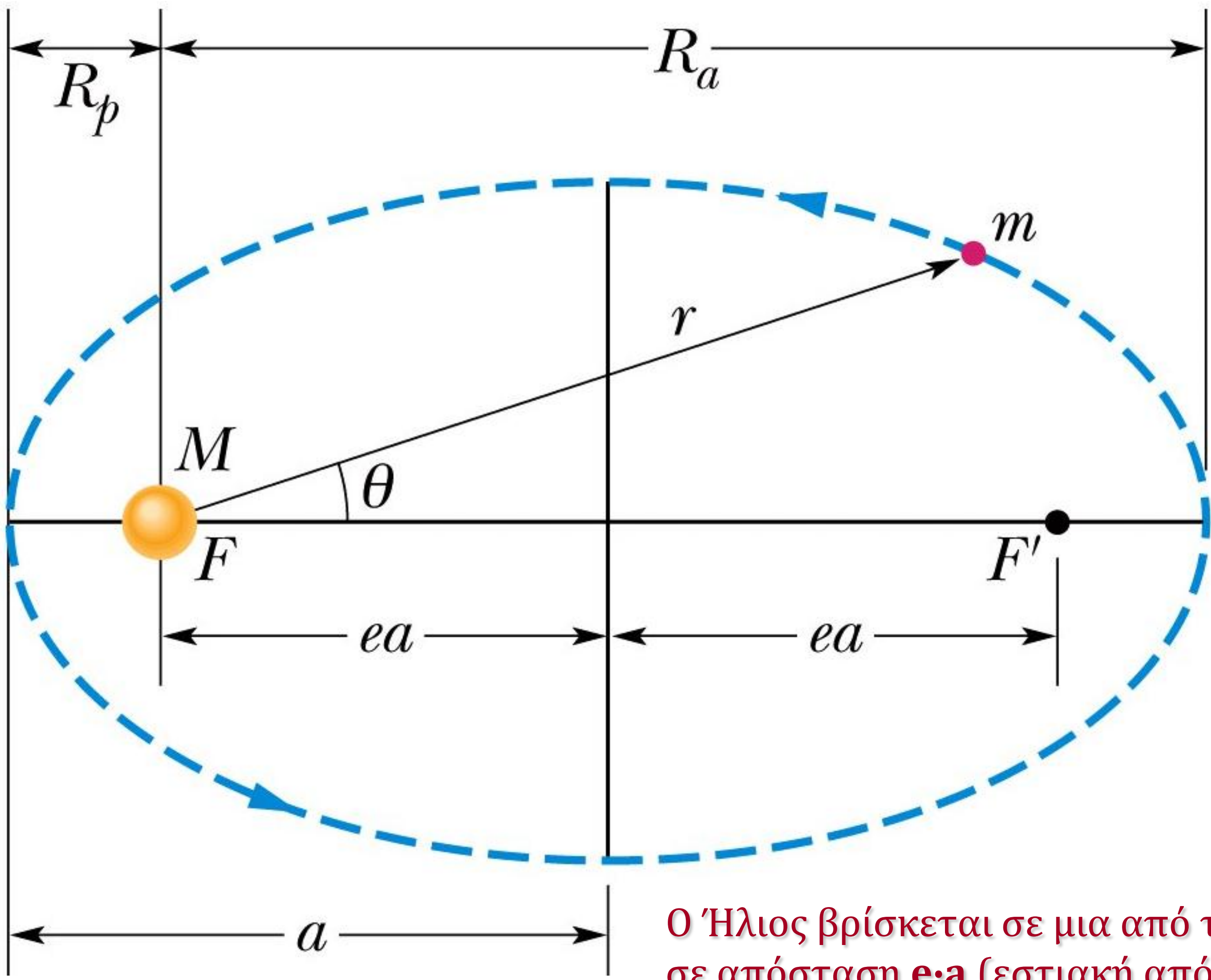
$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\left(\frac{F(r)}{r}\vec{r}\right) = \frac{F(r)}{r}\left(\vec{r}\times\vec{r}\right) = 0$$

και δεδομένου ότι $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Longrightarrow$ $\boxed{L = mr^2\frac{d\theta}{dt} = const}$

Η κίνηση ενός δορυφόρου γύρω από έναν πλανήτη αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα.

ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ KEPLER

1ος Νόμος Kepler
Κίνηση Πλανητών σε Ελλειπτικές Τροχιές



e
Εκκεντρότητα

R_a
Απόσταση Αφηλίου

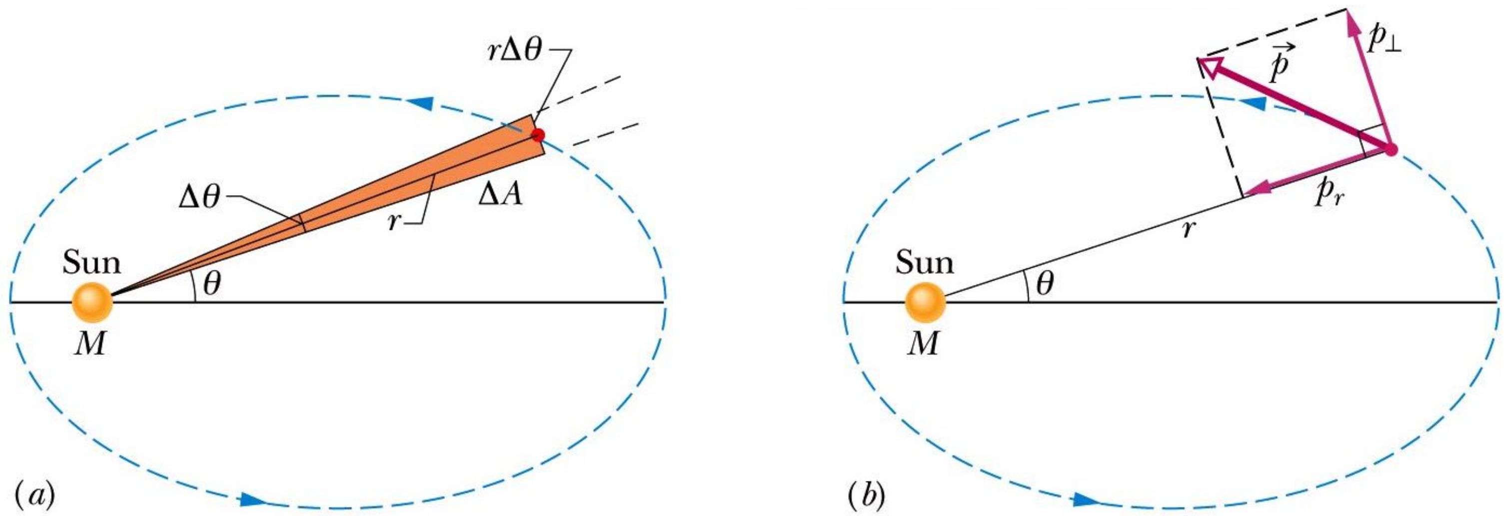
R_p
Απόσταση Περιηλίου

Ο Ήλιος βρίσκεται σε μια από τις εστίες της έλλειψης και σε απόσταση **e·a** (εστιακή απόσταση) από το κέντρο της.

ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ KEPLER

2ος Νόμος Kepler

Η επιβατική ακτίνα διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους



$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\,dt\right| = \frac{1}{2m}\left|\vec{r}\times m\vec{v}\,dt\right| = \frac{1}{2m}\left|\vec{L}dt\right| \Longrightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = const}$$

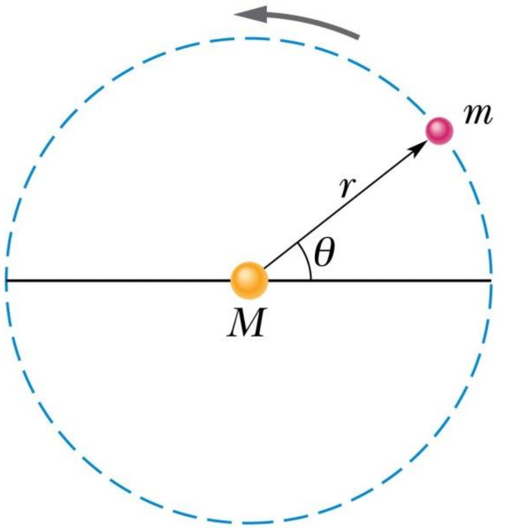
Εναλλακτικά

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r\frac{rd\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega \quad \text{αλλά} \quad L = rp_{\perp} = r(mv_{\perp}) = r(m\omega r) = mr^2\omega \quad \text{άρα} \quad \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ KEPLER

3^{ος} Νόμος Kepler

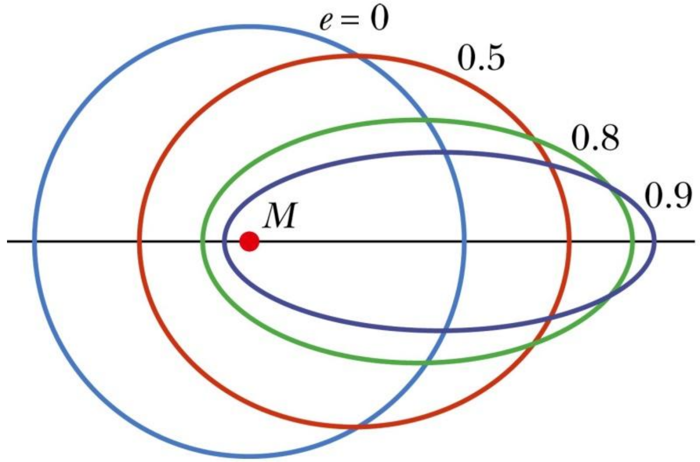
Το τετράγωνο της περιόδου είναι ανάλογο του κύβου του μεγάλου ημιάξονα



Κεντρομόλος Δύναμη = Βαρυτική Δύναμη

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r \Rightarrow \omega^2 = G\frac{M}{r^3}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Longrightarrow \quad \frac{4\pi^2}{T^2} = G\frac{M}{r^3} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3}$$



Στην ελλειπτική κίνηση το r της σχέσης αυτής ταυτίζεται με τον μεγάλο ημιάξονα a της έλλειψης.

Στις τέσσερες ελλειπτικές τροχιές με τον ίδιο μεγάλο ημιάξονα που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα, παρόλο που η εκκεντρότητα έχει διαφορετική τιμή, η συνολική ενέργεια είναι η ίδια.

ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Υπολογισμός του έργου που απαιτείται για να μετακινηθεί σώμα μάζας m εντός βαρυτικού πεδίου (προκαλούμενου από τη μάζα M) από το σημείο R στο άπειρο.

$$\boxed{W = \int_R^\infty \vec{F}(r)d\vec{r}}$$

Για τη βαρυτική δύναμη F(r) ισχύει:

$$\vec{F}(r)d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos(180^o) = -F\,dr = -G\frac{mM}{r^2}dr$$

$$W = \int_R^\infty -G\frac{mM}{r^2}dr \;\; = -GmM\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr = G\frac{mM}{r}\Big|_R^\infty = 0 - G\frac{mM}{R} = -G\frac{mM}{R}$$

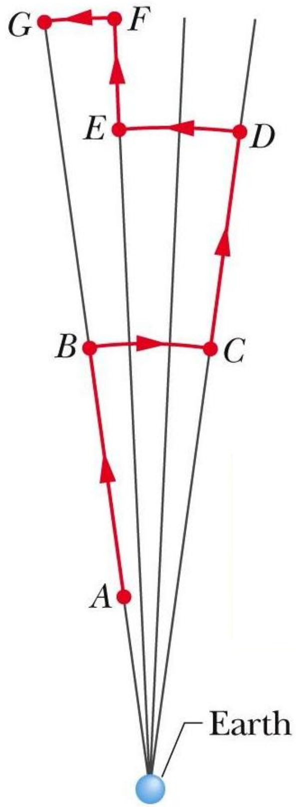
Αλλά $W = U_R - U_\infty = U_R - 0 = U_R$ οπότε:

$$\boxed{W = U_R - U_\infty = -G\frac{mM}{R}} \Rightarrow \boxed{U(r) = -G\frac{mM}{r}}$$

ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Το βαρυτικό πεδίο είναι συντηρητικό.

$$U(r) = -G\frac{mM}{r} \qquad \vec{F} = -\text{grad}\, U = -\frac{\partial U}{\partial r}\hat{r} \qquad \vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$$



Δηλαδή το έργο της βαρυτικής δύναμης είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που επιλέγεται και εξαρτάται μόνο από τη διαφορά του δυναμικού στο αρχικό και τελικό σημείο:

$$W_{A\to G} = U_A - U_G$$

Είναι εύκολα κατανοητό ότι το έργο κατά μήκος των τόξων BC και DE είναι μηδενικό, δεδομένου ότι κατά μήκος των τόξων αυτών η βαρυτική δύναμη είναι κάθετη σε οποιαδήποτε στοιχειώδη μετατόπιση.

ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Ταχύτητα Διαφυγής

Η απαιτούμενη ελάχιστη αρχική ταχύτητα βλήματος για να μπορέσει να διαφύγει της επίδρασης του βαρυτικού πεδίου της Γης.

$$\boxed{E = K + U \xrightarrow{E_R = E_\infty} K_R + U_R = K_\infty + U_\infty = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E = K_R + U_R = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} m v^2 - G\frac{mM}{R} = 0 \;\Rightarrow\; v^2 = 2G\frac{M}{R}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11.2\,\mathrm{km/s}}$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει για κάθε ουράνιο σώμα. Για τον Ήλιο ($M=2\times10^{30}$ Kg, $R=7\times10^{8}$ m) η ταχύτητα διαφυγής είναι 618 km/s ενώ για αστέρα νετρονίων αυτή γίνεται 2×10^{5} km/s.

ΤΡΟΧΙΕΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Κίνηση δορυφόρου σε κυκλική τροχιά γύρω από πλανήτη

Συνολική Ενέργεια: E = K + U

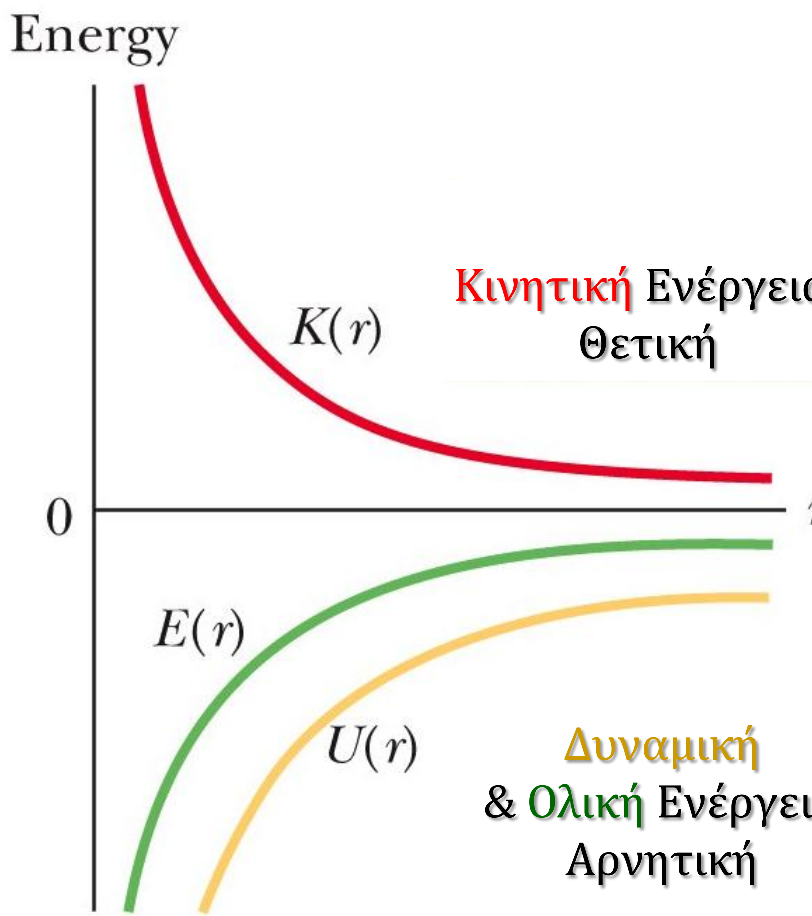
Για κυκλική τροχιά ισχύει:

$$G\frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \& \quad K = \frac{mv^2}{2}$$

Συνεπώς:

$$K = \frac{1}{2}\frac{GmM}{r} \Longrightarrow K = -\frac{U}{2}$$

$$\boxed{E = K + U = \frac{U}{2} = -K}$$



Κινητική Ενέργεια:
Θετική

Δυναμική
& Ολική Ενέργεια
Αρνητική

ΤΡΟΧΙΕΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

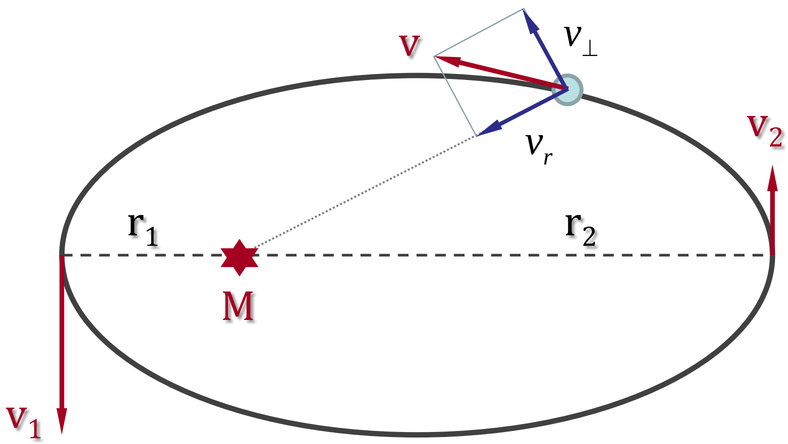
Υπολογισμός της συνολικής ενέργειας δορυφόρου κινούμενου σε ελλειπτική τροχιά γύρω από πλανήτη

m: Μάζα δορυφόρου
M: Μάζα πλανήτη
L: Στροφορμή δορυφόρου

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\perp^2) - G\frac{mM}{r}$$

όπου $\quad v_r = \frac{dr}{dt} \; , \; v_\perp = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \quad$ οπότε

$$E = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - G\frac{mM}{r}$$



Επειδή όμως η δύναμη είναι κεντρική, η στροφορμή L του συστήματος διατηρείται και ισχύει:

$$L = mr^2\frac{d\theta}{dt} = mr^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{L}{mr^2} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}$$

Στις ακραίες θέσεις της έλλειψης ό δορυφόρος δεν έχει ακτινική ταχύτητα (v_r=0) και η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}$$

ΤΡΟΧΙΕΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Υπολογισμός της συνολικής ενέργειας δορυφόρου κινούμενου σε ελλειπτική τροχιά γύρω από πλανήτη

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} \Rightarrow 2mEr^2 + 2Gm^2Mr - L^2 = 0$$

Οι λύσεις της δευτεροβάθμιας αυτής εξίσωσης ταυτίζονται με τα r_1 και r_2, το άθροισμα των οποίων είναι ο άξονας της έλλειψης (=2a):

$$r_1 + r_2 = 2a \Rightarrow -\frac{2Gm^2M}{2mE} = 2a$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E = -G\frac{mM}{2a}}$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ταυτόσημο με την ενέργεια δορυφόρου κινούμενου σε κυκλική τροχιά, όπου ο ημιάξονας a ταυτίζεται με την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς r.