

ΦΥΣΙΚΗ Ι

Κοσμάς Γαζέας

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

- Γενική Αντιμετώπιση
- Διατήρηση της Ορμής σε Συστήματα Μεταβλητής Μάζας
- Κίνηση Πυραύλου
- Διάφορα Προβλήματα

ΦΥΣΙΚΗ Ι

Κοσμάς Γαζέας

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

	ALONSO FINN	GIANCOLI	HALLIDAY-RESNICK WALKER	YOUNG FREEDMAN
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ	7.10	9.10	9.7, 9.12	8.5-8.6
ΚΙΝΗΣΗ ΠΥΡΑΥΛΟΥ	7.10	9.10	9.12	8.6

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Χρονική μεταβολή της μάζας ενός συστήματος

m: σταθερή

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

m: μεταβλητή

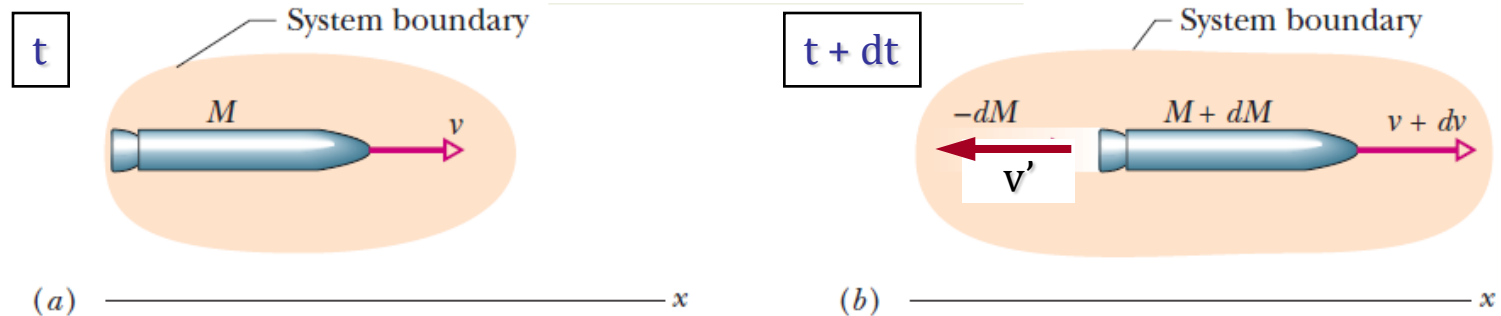
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

$m \frac{d\vec{v}}{dt}$: Μεταβολή της ορμής εξαιτίας της επιτάχυνσης

$\vec{v} \frac{dm}{dt}$: Μεταβολή της ορμής εξαιτίας της χρονικής μεταβολής της μάζας

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Κίνηση Πυραύλου



$$\vec{P}_i = M\vec{v}$$

$$\vec{P}_f = (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - dM\vec{v}'$$

Μεταβολή της Ορμής του Συστήματος

$$d\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \{(M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - dM\vec{v}'\} - M\vec{v}$$



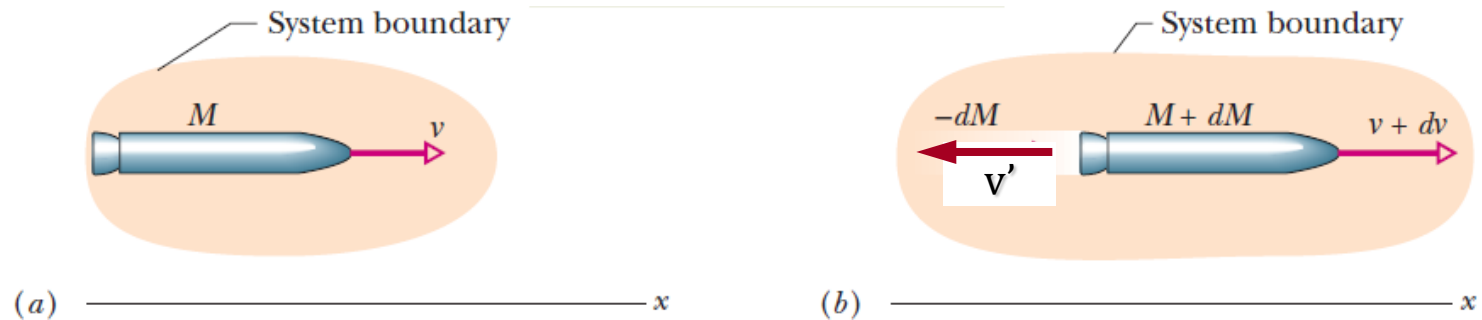
$$d\vec{P} = Md\vec{v} + \vec{v}dM - \vec{v}'dM = Md\vec{v} - dM(\vec{v}' - \vec{v})$$



$$d\vec{P} = M d\vec{v} - \vec{v}_{rel} dM$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Κίνηση Πυραύλου



$$d\vec{P} = M d\vec{v} - \vec{v}_{rel} dM \quad \Rightarrow \quad dP = M dv + v_{rel} dM$$

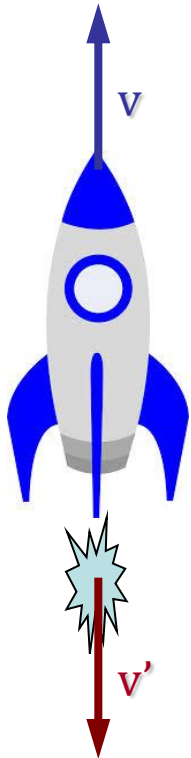
$$\frac{dP}{dt} = M \frac{dv}{dt} + v_{rel} \frac{dM}{dt}$$

Εάν $dP/dt = 0$ $0 = M \frac{dv}{dt} + v_{rel} \frac{dM}{dt} \Rightarrow M \frac{dv}{dt} = -v_{rel} \frac{dM}{dt} \Rightarrow$ $-v_{rel} \frac{dM}{dt}$

Ωστική Δύναμη

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Κατακόρυφη Κίνηση Πυραύλου σε Βαρυτικό Πεδίο



$$\frac{dP}{dt} = M \frac{dv}{dt} + v_{\text{rel}} \frac{dM}{dt}$$

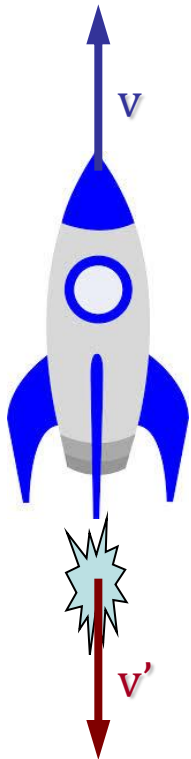
$$M \frac{dv}{dt} + v_{\text{rel}} \frac{dM}{dt} = -Mg \Rightarrow dv + \frac{v_{\text{rel}}}{M} dM = -g dt$$



$$\int_{v_0}^v dv + v_{\text{rel}} \int_{M_0}^M \frac{dM}{M} = -g \int_0^t dt$$

$$v - v_0 + v_{\text{rel}} (\ln M - \ln M_0) = -gt \Rightarrow v = v_0 + v_{\text{rel}} \ln \left(\frac{M_0}{M} \right) - gt$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ



Εάν ο πύραυλος παραμένει ακίνητος στον αέρα σε μικρό ύψος από την επιφάνεια της Γης, τότε συνεχίζει να ισχύει $dP/dt = -Mg$ αλλά $dv/dt = 0$, οπότε η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$\frac{dP}{dt} = M \frac{dv}{dt} + v_{rel} \frac{dM}{dt}$$

$$0 + v_{rel} \frac{dM}{dt} = -Mg \Rightarrow \frac{dM}{M} = -\frac{g}{v_{rel}} dt$$

$$\int_{M_0}^M \frac{dM}{M} = -\frac{g}{v_{rel}} \int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{M}{M_0}\right) = -\frac{g}{v_{rel}} t \Rightarrow M = M_0 e^{-\frac{g}{v_{rel}} t}$$

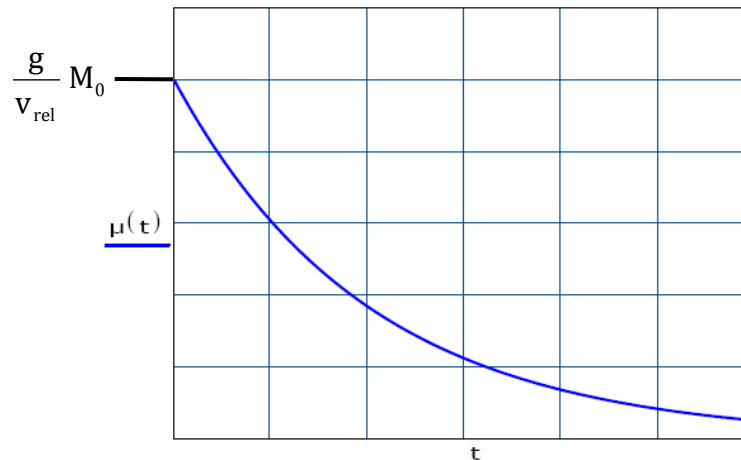
Η συνολική μάζα του πυραύλου βαίνει κατά συνέπεια εκθετικά ελαττούμενη.
Πόσος είναι ο ρυθμός εκτόξευσης των αερίων $\mu(t)$ στην περίπτωση αυτή;

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Υπολογισμός του ρυθμού εκτόξευσης των αερίων στην περίπτωση που ο πύραυλος παραμένει ακίνητος

$$\mu(t) = -\frac{dM}{dt} = \frac{g}{v_{\text{rel}}} M \Rightarrow \mu(t) = \frac{g}{v_{\text{rel}}} M_0 e^{-\frac{g}{v_{\text{rel}}} t}$$

Όπως είναι προφανές, ο ρυθμός εκτόξευσης των αερίων $\mu(t)$ ελαττώνεται κι αυτός με τον ίδιο εκθετικό ρυθμό που ελαττώνεται και η μάζα του συστήματος.



ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Σχοινί κυλίνεται χωρίς τριβές υπό την επίδραση του βάρους του τμήματος που κρέμεται ελεύθερο.

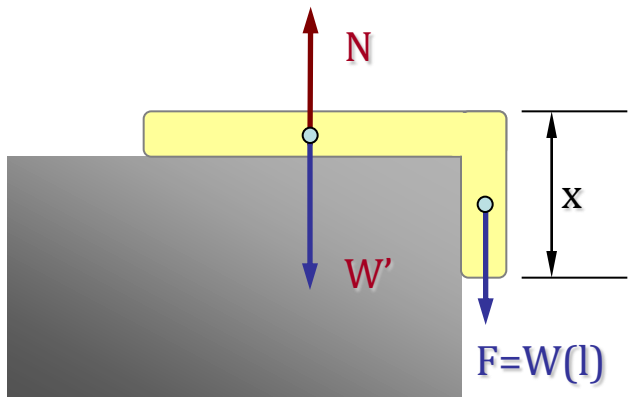
M : Συνολική μάζα σχοινιού

L_0 : Αρχικό μήκος του σχοινιού που κρέμεται ελεύθερο

L : Συνολικό μήκος σχοινιού

V_F : Τελική ταχύτητα

Να υπολογιστεί η τελική του ταχύτητα, όταν απελευθερωθεί όλο το μήκος του.



$$\frac{dP}{dt} = F \Rightarrow \frac{dP}{dt} = W_x = M \frac{x}{L} g \Rightarrow M \frac{dv}{dt} = M \frac{x}{L} g$$



$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{L} x \Rightarrow \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{g}{L} x \Rightarrow v \frac{dv}{dx} = \frac{g}{L} x \Rightarrow v dv = \frac{g}{L} x dx$$



$$\int_0^{V_F} v dv = \frac{g}{L} \int_{L_0}^L x dx \Rightarrow \frac{V_F^2}{2} = \frac{g}{2L} (L^2 - L_0^2) \Rightarrow V_F = \sqrt{\frac{g}{L} (L^2 - L_0^2)}$$