ΦΥΣΙΚΗ Ι

Κοσμάς Γαζέας

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ

- Μέση και Στιγμιαία Ταχύτητα - Επιτάχυνση
- Διαφορικές & Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Κίνησης
- Σταθερή Επιτάχυνση
- Κατακόρυφη Ρίψη

ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

- Διάνυσμα Θέσης - Μετατόπιση
- Διανυσματικός Ορισμός Ταχύτητας – Επιτάχυνσης
- Καμπυλόγραμμη Κίνηση
- Εφαπτομενική και Κάθετη Συνιστώσα της Επιτάχυνσης

ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

- Κυκλική Κίνηση
- Κίνηση Βλημάτων
- Παραμετρικές Εξισώσεις - Εξισώσεις Τροχιάς

Οι διαφάνειες παρουσιάζονται με την άδεια του δημιουργού τους, Αν. Καθ. Ευστάθιου Στυλιάρη, από τις παραδόσεις στο μάθημα Φυσική Ι, ΕΚΠΑ, Τμήμα Φυσικής, 2016-17

ΦΥΣΙΚΗ Ι

Κοσμάς Γαζέας

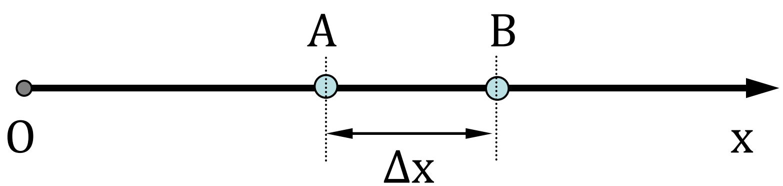
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

	ALONSO FINN	GIANCOLI	HALLIDAY-RESNICK WALKER	YOUNG FREEDMAN
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ	5.1, 5.2, 5.3, 5.4	2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9	2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9	2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6
ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ	5.5, 5.6, 5.8, 5.11	3.5, 3.6	4.1, 4.2, 4.3, 4.4	3.1, 3.2
ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ	5.9, 5.10	5.2, 5.5	4.7	3.4
ΚΙΝΗΣΗ ΒΛΗΜΑΤΩΝ	5.7	3.7, 3.8	4.5, 4.6	3.3

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΤΑΧΥΤΗΤΑ

Μέση Ταχύτητα: Μετατόπιση (Δx) σε δοσμένο χρονικό διάστημα (Δt)



$$\boxed{v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

Στιγμιαία Ταχύτητα: Το όριο της μέσης ταχύτητας v_{av} για $\Delta t \rightarrow 0$

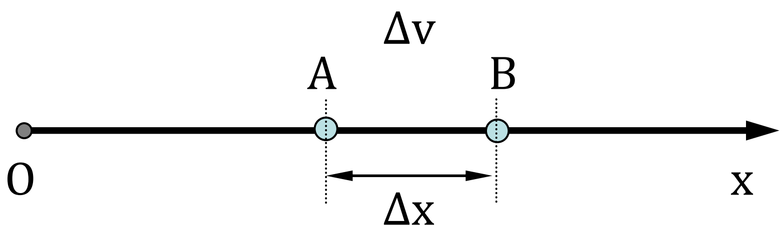
$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v = \frac{dx}{dt}}$$

Υπολογισμός της μετατόπισης από την συναρτησιακή εξάρτηση της ταχύτητας από το χρόνο

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt \Leftrightarrow x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\,dt \Leftrightarrow x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt}$$

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Μέση Επιτάχυνση: Μέση αλλαγή της ταχύτητας (Δv) σε δοσμένο χρονικό διάστημα (Δt)



$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Στιγμιαία Επιτάχυνση: Το όριο της μέσης επιτάχυνσης a_{av} για $\Delta t \rightarrow 0$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{dv}{dt}$$

Υπολογισμός της ταχύτητας από τη χρονική εξάρτηση της επιτάχυνσης

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt \Leftrightarrow v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a\,dt \Leftrightarrow v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt$$

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Στιγμιαία Επιτάχυνση: Δεύτερη παράγωγος της θέσης ως προς τον χρόνο

$$a = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) \Leftrightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Υπολογισμός της ταχύτητας από τη χωρική εξάρτηση της επιτάχυνσης

$$dv = a\,dt \Leftrightarrow v\,dv = a\,dt\left(\frac{dx}{dt}\right) \Leftrightarrow v\,dv = a\,dx$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,dx \Leftrightarrow \frac{v^2 - v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} a\,dx$$

ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

Στην ομαλά επιταχυνόμενη ευθύγραμμη κίνηση ισχύει a = σταθερά

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt \Leftrightarrow v = v_0 + a(t - t_0)$$

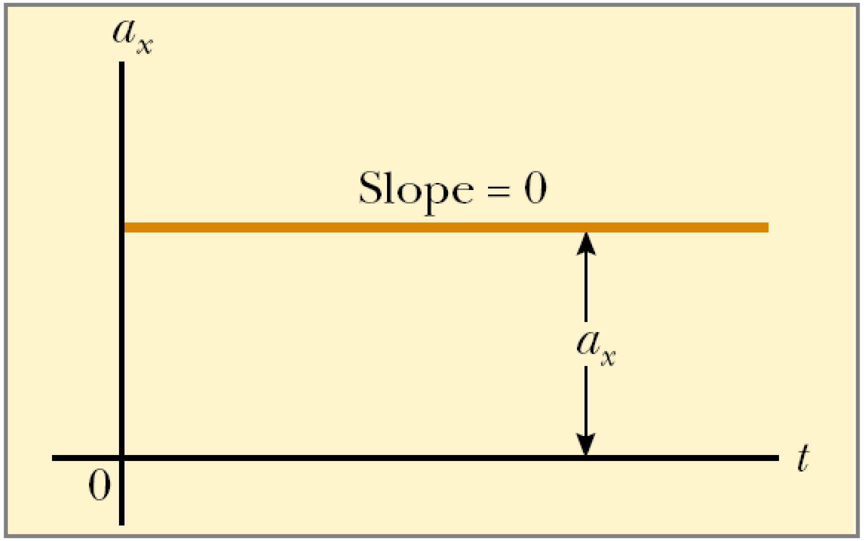
$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt \Leftrightarrow x = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left[v_0 + a(t - t_0)\right]dt = x_0 + v_0 \int_{t_0}^{t} dt + a \int_{t_0}^{t} (t - t_0)dt$$

$$\Downarrow$$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

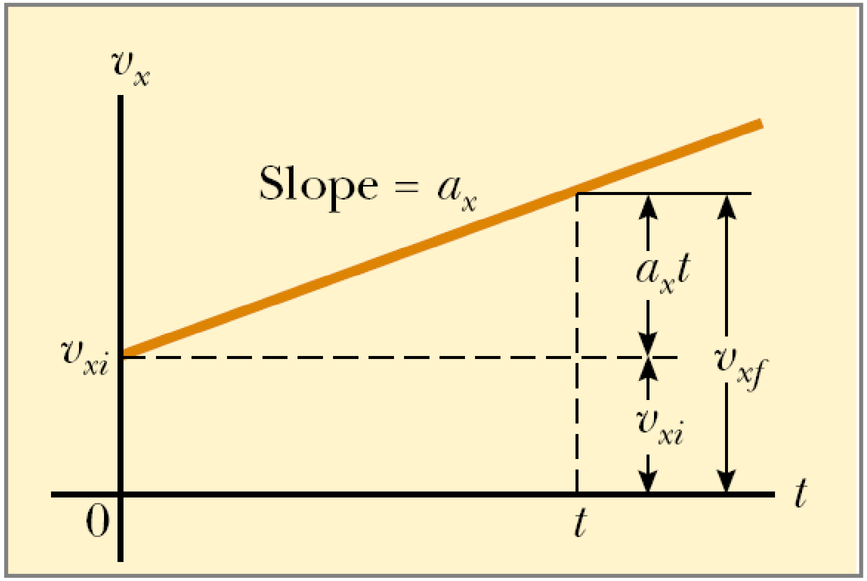
ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

a = const

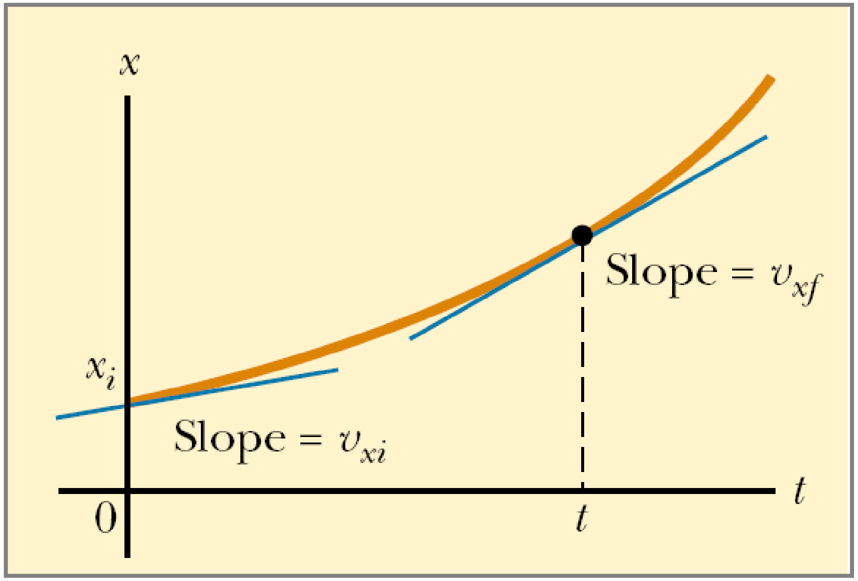


$$a = \text{const}$$
$$v = v_0 + a\,t$$
$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

v=v(t)



x=x(t)



ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

$$a = \text{constant}$$
$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

Απαλοιφή του χρόνου

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x = x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \frac{(v - v_0)^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow 2(x - x_0)a = 2v_0(v - v_0) + (v - v_0)^2$$

$$\Rightarrow 2(x - x_0)a = v^2 - v_0^2$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2(x - x_0)a}$$

Στη σχέση αυτή καταλήγουμε και με την ολοκλήρωση:

$$v\,dv = a\,dx \Rightarrow \int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,dx \Rightarrow \frac{v^2 - v_0^2}{2} = a(x - x_0) \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

$$a = \text{constant}$$
$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

Απαλοιφή της επιτάχυνσης

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{v - v_0}{t} t^2$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(v - v_0)\, t$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{v_0 + v}{2} t$$

$$\boxed{x - x_0 = \frac{v_0 + v}{2} t}$$

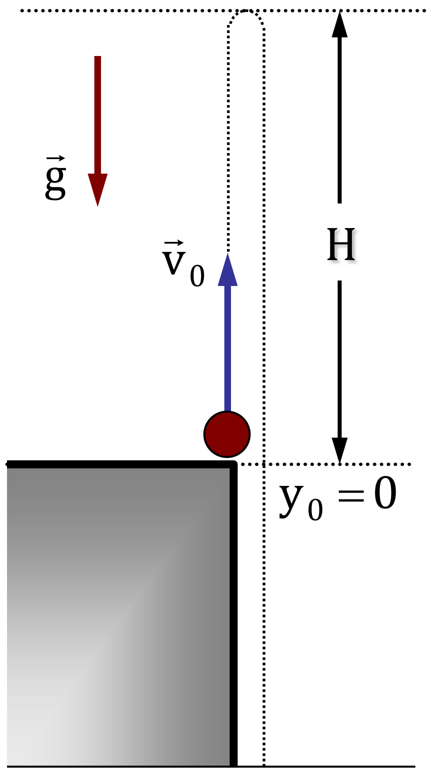
Στη σχέση αυτή καταλήγουμε και με την παρακάτω ολοκλήρωση, κάνοντας χρήση του εμβαδού του τραπεζίου στο διάγραμμα v(t):

$$dx = vdt \;\Rightarrow\; \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t vdt \;\Rightarrow\; x - x_0 = \frac{v_0 + v}{2} t$$

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΠΤΩΣΗ

Οι εξισώσεις της κίνησης για σταθερή επιτάχυνση μπορούν να εφαρμοστούν στην περίπτωση της ελεύθερης πτώσης (επιτάχυνση g = -9.8 ms^{-2}).

Κατακόρυφη βολή



$$a = -g$$
$$v = v_0 - g\,t$$
$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

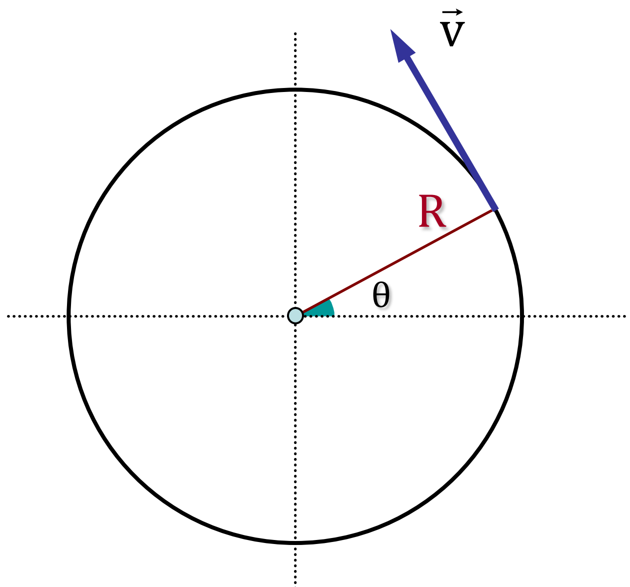
Υπολογισμός μεγίστου ύψους H

$$v = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{g}$$

$$y_{max} = H = y\left(t = v_0 / g\right) \Rightarrow H = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$\boxed{H = \frac{v_0^2}{2g}}$$

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



Κυκλική Κίνηση: Η τροχιά είναι κύκλος σταθερής ακτίνας R, οπότε η ταχύτητα είναι πάντα εφαπτομένη της κυκλικής τροχιάς και κάθετη στην επιβατική ακτίνα.

Το μέτρο της ταχύτητας θα δίνεται από:

$$|\vec{v}| = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\cdot\boldsymbol{\theta}) = R\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$$

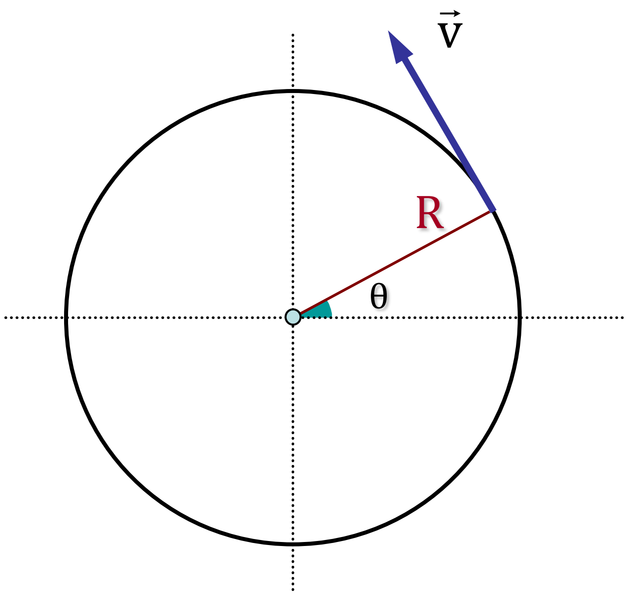
Η ποσότητα dθ/dt ονομάζεται γωνιακή ταχύτητα ω

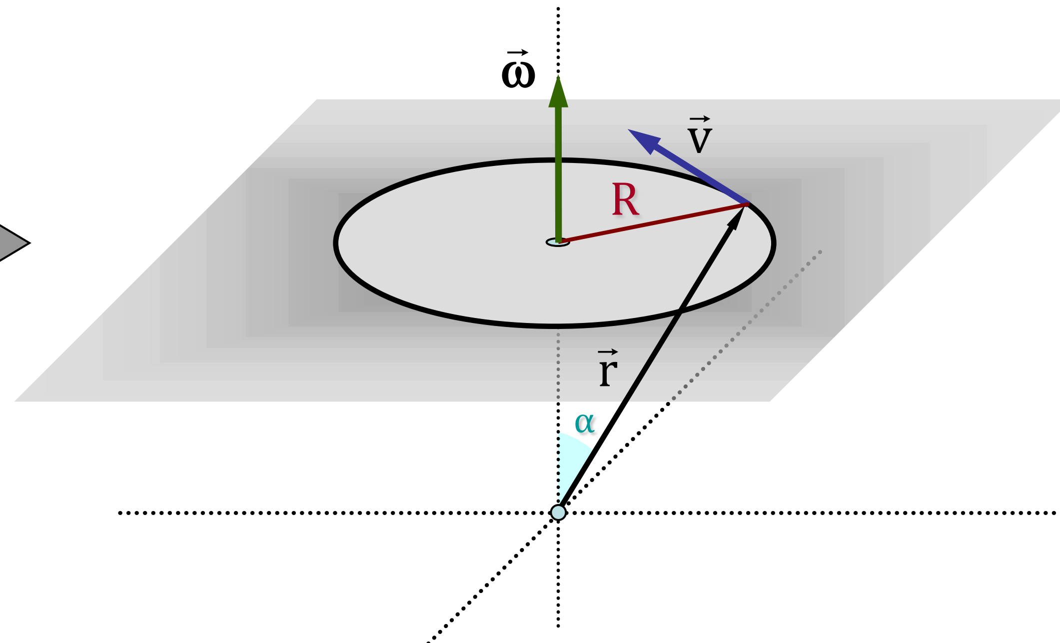
$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}}$$

Η γωνιακή ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος με μέτρο ω, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο κίνησης και φορά καθοριζόμενη από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Μονάδα γωνιακής ταχύτητας: rad/s = s^{-1}

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



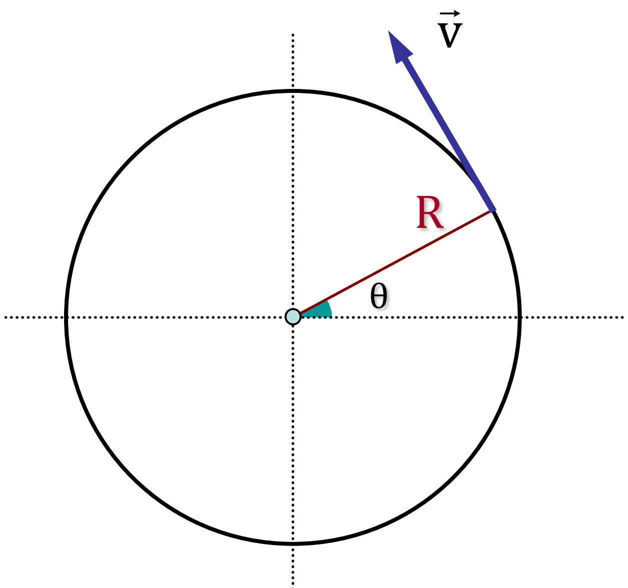


Η κυκλική κίνηση στο χώρο μπορεί να περιγραφεί από το διάνυσμα θέσης **r**. Όπως είναι προφανές από το παραπάνω σχήμα ισχύει γενικά:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\alpha = \omega(r\sin a) = \omega R = R\frac{d\theta}{dt}$$

ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



Ομαλή κυκλική κίνηση: Η γωνιακή ταχύτητα ω παραμένει χρονικά σταθερή

$$\omega = d\theta/dt = const$$

Περίοδος T : Ο απαιτούμενος χρόνος για μια πλήρη περιστροφή

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$$

Συχνότητα f : Αριθμός περιστροφών στη μονάδα του χρόνου

$$f = 1/T$$

Για σταθερή γωνιακή ταχύτητα ισχύει:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega dt \Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega t \Rightarrow \boxed{\theta = \theta_0 + \omega t}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(\hat{u}_T v) = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \frac{d\hat{u}_T}{dt} v$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a} = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \hat{u}_N \frac{v}{\rho} v = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \hat{u}_N \frac{v^2}{\rho} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

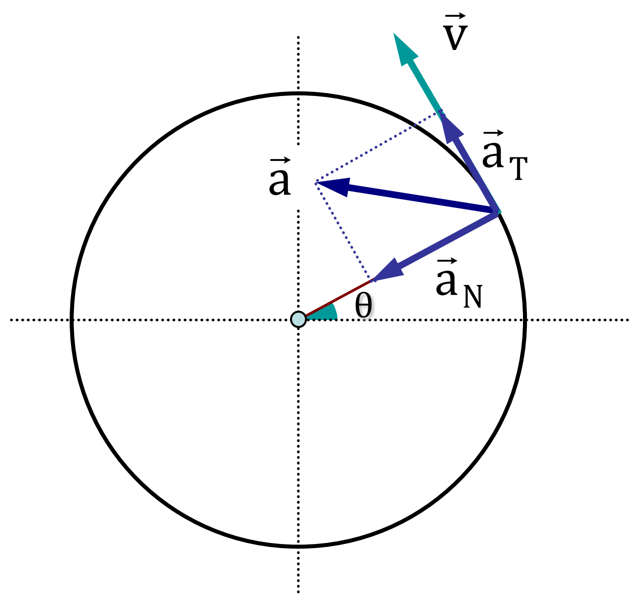
Εφαπτομενική επιτάχυνση $\mathbf{a_T}$: Ρυθμός αλλαγής του μέτρου της ταχύτητας.
Σε περίπτωση ομαλής καμπυλόγραμμης κίνησης (μέτρο ταχύτητας v σταθερό), η εφαπτομενική επιτάχυνση a_T εξαφανίζεται.

Κάθετη επιτάχυνση $\mathbf{a_N}$: Αλλάζει την κατεύθυνση της ταχύτητας.
Σε ευθύγραμμη κίνηση η ακτίνα καμπυλότητας ρ απειρίζεται, οπότε η κάθετη επιτάχυνση μηδενίζεται.

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΣΤΗΝ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Στη γενική περίπτωση της καμπυλόγραμμης κίνησης είδαμε ότι ισχύει:

$$\boxed{\vec{a} = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \hat{u}_N \frac{v^2}{\rho} = \vec{a}_T + \vec{a}_N}$$



Τα $\mathbf{u_T}$ και $\mathbf{u_N}$ είναι μοναδιαία διανύσματα, εφαπτόμενο στην τροχιά και κάθετο αντίστοιχα.

Στην περίπτωση κυκλικής κίνησης:

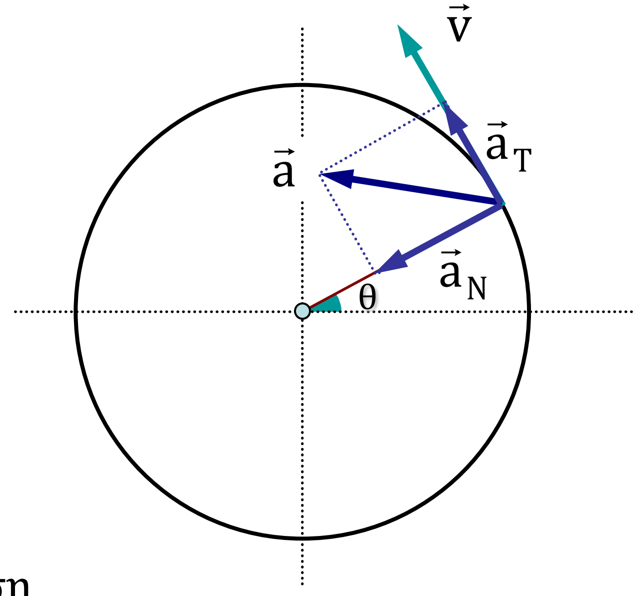
- Η ακτίνα καμπυλότητας ρ παραμένει σταθερή και ταυτίζεται με την ακτίνα του κύκλου R
- Η γραμμική ταχύτητα v εκφράζεται μέσω της γωνιακής $v = \omega R$
- Η γραμμική επιτάχυνση dv/dt ομοίως εκφράζεται από την γωνιακή $dv/dt = R\, d\omega/dt$

$$\vec{a} = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \hat{u}_N \frac{v^2}{\rho} = R\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_T + \frac{\omega^2 R^2}{R}\hat{u}_N \Rightarrow \boxed{\vec{a} = R\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\vec{u}_T + \boldsymbol{\omega}^2 R\,\vec{u}_N}$$

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΣΤΗΝ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Η επιτάχυνση στην κυκλική κίνηση έχει δύο συνιστώσες **a_T** και **a_N**, εφαπτομενική και κάθετη στην τροχιά αντίστοιχα.

$$\boxed{\vec{a} = R\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_T + \omega^2 R\,\hat{u}_N}$$



- Η εφαπτομενική συνιστώσα **a_T** είναι υπεύθυνη για την αλλαγή του μέτρου της ταχύτητας **v**

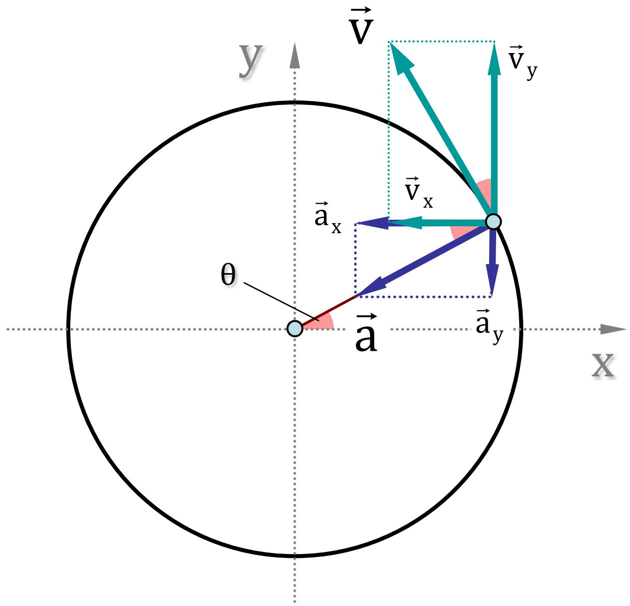
- Η συνιστώσα **a_N** αντιστοιχεί στην κεντρομόλο επιτάχυνση

ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Στην ειδική περίπτωση της ομαλής κυκλικής κίνησης, η ποσότητα $d\omega/dt$ μηδενίζεται με αποτέλεσμα να παραμένει μόνο η κεντρομόλος επιτάχυνση $\omega^2 R$, η οποία είναι ως προς το μέτρο σταθερή.

$$\boxed{\vec{a} = R\cancel{\frac{d\omega}{dt}}\vec{u}_T + \boldsymbol{\omega}^2 R\,\vec{u}_N = \boldsymbol{\omega}^2 R\,\vec{u}_N}$$

ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



Διανυσματικός Υπολογισμός Επιτάχυνσης

Παρουσιάζεται εδώ μια εναλλακτική προσέγγιση υπολογισμού της επιτάχυνσης στην ομαλή κυκλική κίνηση.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} = \frac{d}{dt}(-v\sin\theta)\vec{i} + \frac{d}{dt}(v\cos\theta)\vec{j}$$

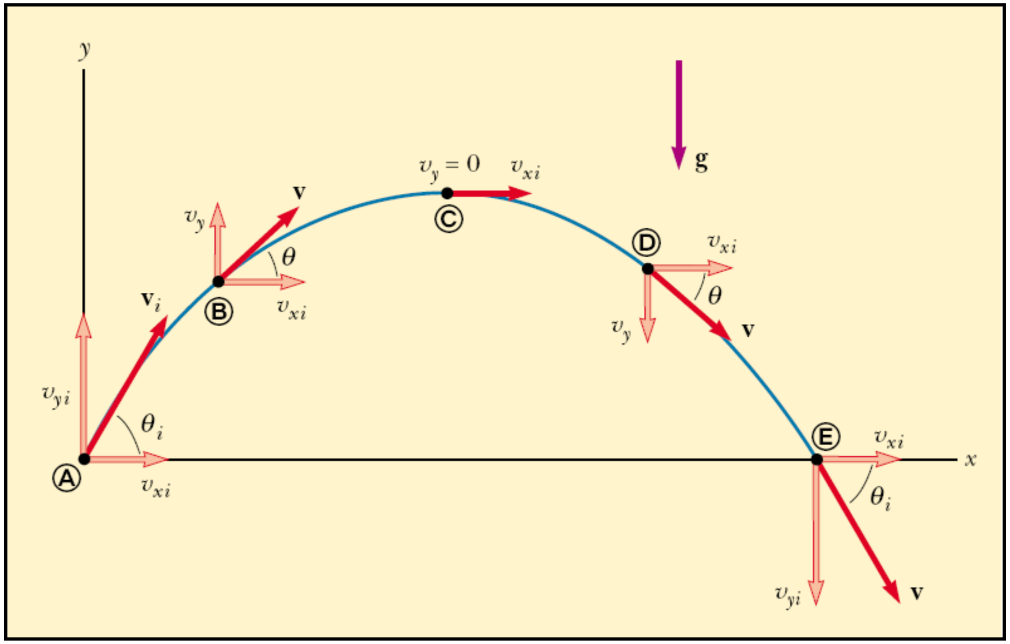
Το μέτρο της ταχύτητας v στην ομαλή κίνηση παραμένει σταθερό:

$$\vec{a} = -v\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{i} - v\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{j} = -v\omega\cos\theta\vec{i} - v\omega\sin\theta\vec{j}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a} = -\omega^2 R\cos\theta\vec{i} - \omega^2 R\sin\theta\vec{j} \Rightarrow |\vec{a}| = \omega^2 R\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \omega^2 R$$

ΠΛΑΓΙΑ ΒΟΛΗ



Κίνηση σωματιδίου (χωρίς αντιστάσεις) σε κατακόρυφο επίπεδο όπου επιδρά μόνο η σταθερή επιτάχυνση της ελεύθερης πτώσης g.

Το σώμα βάλλεται με αρχική ταχύτητα $\mathbf{v_0}=\mathbf{v_i}$ υπό γωνία $\theta_0=\theta_i$

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\,\hat{i} + v_{0y}\,\hat{j} = v_0\cos\theta_0\,\hat{i} + v_0\sin\theta_0\,\hat{j}$$

Κατά τη διάρκεια της κίνησης το διάνυσμα θέσης **r** καθώς και το διάνυσμα της ταχύτητας **v** μεταβάλλονται συνεχώς, ενώ το διάνυσμα της επιτάχυνσης **a** παραμένει σταθερό (**a=-g**).

Το βλήμα δεν έχει οριζόντια επιτάχυνση!

*Στην πλάγια βολή η οριζόντια και η κατακόρυφη κίνηση είναι **ανεξάρτητες** η μια από την άλλη.*

ΠΛΑΓΙΑ ΒΟΛΗ

Εξισώσεις της Κίνησης

Οριζόντια Κίνηση

$$\boxed{x - x_0 = v_{0x} t \;\Rightarrow\; x = x_0 + (v_0 \cos\theta_0) t}$$

Κατακόρυφη Κίνηση

$$\boxed{y - y_0 = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \;\Rightarrow\; y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2}$$

$$\boxed{v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt}$$

$$\frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2} = (y - y_0) a \;\Longrightarrow\; \boxed{v_y^2 = (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0)}$$

Εξίσωση της Τροχιάς

Η εξίσωση της κίνησης που προκύπτει εάν συμπλέξουμε την οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της απόστασης, απαλείφοντας τον χρόνο από τις εξισώσεις αυτές.

$$\boxed{x = x_0 + (v_0 \cos\theta_0)t} \longrightarrow t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0}$$

$$\boxed{y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2}$$

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0)\frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0}\right)^2$$

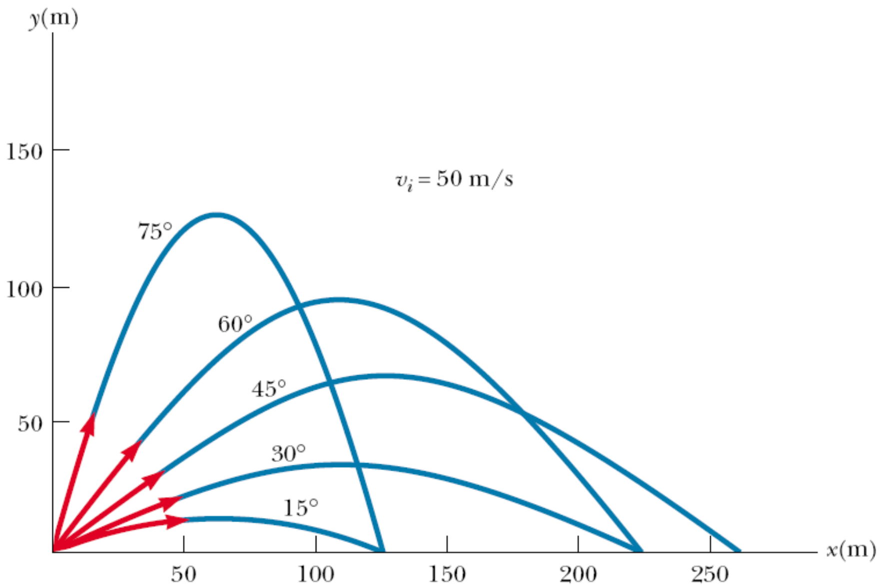
$$\boxed{x_0 = y_0 = 0}$$

$$\boxed{y = (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}}$$

ΠΛΑΓΙΑ ΒΟΛΗ

Βεληνεκές

Η οριζόντια απόσταση R που διανύει το βλήμα όταν επιστρέψει στο αρχικό ύψος εκτόξευσης.



$$R = x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t$$

Ο χρόνος πτήσης υπολογίζεται από την κατακόρυφη κίνηση, έτσι ώστε $y\text{-}y_0=0$:

$$0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Απαλείφοντας τον χρόνο από τις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στην σχέση:

$$R = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0 \Rightarrow \boxed{R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0}$$

Το μέγιστο βεληνεκές επιτυγχάνεται για βολή με $\theta_0 = 45^o$