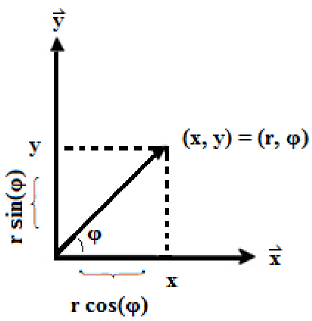
Επίλυση Συστήματος Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων

1. Γραμμικοί Μετασχηματισμοί Ανυσμάτων

Θεωρούμε χώρο δύο διαστάσεων και συμβατικά ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων για την περιγραφή κάθε ανύσματος του χώρου συναρτήσει των μοναδιαίων ανυσμάτων των αξόνων, $\{\vec{x}, \vec{y}\}$. Το σύνολο των μοναδιαίων ανυσμάτων αποτελεί μία βάση γιά την έκφραση των ανυσμάτων του χώρου, η γενίκευση σε χώρους πολλών διαστάσεων είναι προφανής. Δηλαδή, ένα άνυσμα $\vec{A}$ θα αναλύεται σε (x, y) συνιστώσες όπως στο σχήμα 1,



Σχήμα 1. Ανάλυση ανύσματος σε συνιστώσες A ≡ (x, y).

Μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{A} = x\vec{x} + y\vec{y} \qquad (1)$$

και υπό μορφή πινάκων,

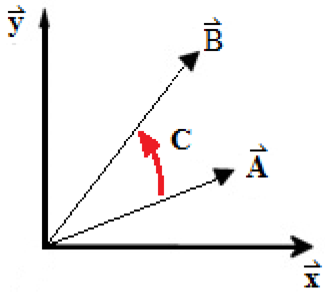
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

θεωρώντας τις αντιστοιχίες

$$\vec{x} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{y} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ και } \vec{A} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Προφανώς, οι εκφράσεις $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ θα πρέπει να εννοηθούν ότι εκφράζουν συγκεκριμένα μοναδιαία ανύσματα (μέσω μιάς σύμβασης, σχέση (3) - Σχήμα 1). Εάν αλλάξουμε τα μοναδιαία ανύσματα, έστω μέσω στροφής στο χώρο, τότε οι εκφράσεις $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ μπορούν να αναφέρονται στα νέα μοναδιαία ανύσματα, αλλά με την θεώρηση νέας σύμβασης για αυτά. Τα ζεύγη των συνιστωσών θεωρούνται διατεταγμένα, δηλαδή η πρώτη συνιστώσα αναφέρεται στο $\vec{x}$ και η δεύτερη στο $\vec{y}$.

Η αλλαγή ενος ανύσματος από $\vec{A} \leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ σε $\vec{B} \leftrightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ στο χώρο δύο διαστάσεων, Σχήμα 2,



Σχήμα 2. Μετασχηματισμός ανύσματος A σε B.

περιγράφεται μέσω ενός συστήματος γραμμικών μετασχηματισμών,

$$b_1 = c_{11}\, a_1 + c_{12}\, a_2$$

$$b_2 = c_{21}\, a_1 + c_{22}\, a_2 \,, \qquad (4)$$

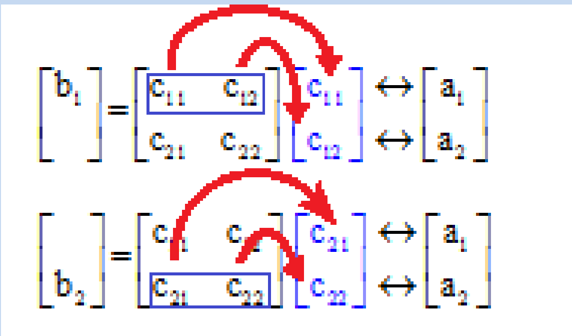
ή υπό μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Υπενθυμίζεται ότι ο πολλαπλασιασμός πίνακα επί άνυσμα γίνεται μέσω της σχέσης

$$b_j = \sum_i^2 c_{ji} a_i \,, \qquad (6)$$

που αντιστοιχεί στις κινήσεις των στοιχείων του πίνακα προκειμένου να πολλαπλασιασθούν τα c_{ji} με τα a_i και να αθροισθούν για να δώσουν το b_j.



Σχήμα 3. Υπολογισμός των b_j μέσω της σχέσης (6).

ΑΣΚΗΣΗ

Παράδειγμα αποτελεί η στροφή κατά γωνία φ ενός ανύσματος $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, που μεταπίπτει σε ένα άλλο $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ και περιγράφεται μέσω του πίνακα

$$P_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Δηλαδή, ισχύει

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Η αντίστροφη κίνηση περιγράφεται από τον αντίστροφο πίνακα P_φ^{-1}, που ορίζεται μέσω της γενικής σχέσης

$$P\,P^{-1} = P^{-1}P = 1. \qquad (9)$$

Εν γένει

$$P^{-1} = \mathrm{adj\_P}/|P|, \qquad (10)$$

όπου |P| είναι η ορίζουσα του πίνακα και adj_P είναι ο ανάστροφος του P. Η συστηματική κατασκευή του αντίστροφου γίνεται σε δύο στάδια. <u>Πρώτα</u> κατασκευάζεται πίνακας E με στοιχεία, E_{ij}, τις ορίζουσες των ελασσόνων πινάκων του P_{ij} προσημασμένων με πρόσημο $(-1)^{i+j}$. Ως ελάσσων πίνακας για το στοιχείο P_{ij} ορίζεται ο πίνακας που προκύπτει εάν από τον αρχικό αφαιρεθεί η (i) γραμμή και η (j) στήλη. Τελικά ο αντίστροφος προκύπτει από τον συμμετρικό του E, δηλαδή

$$P_{ij}^{-1} = E_{ji}/|P|. \qquad (11)$$

ΑΣΚΗΣΗ

Επομένως, ο P_φ^{-1} θα είναι

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & +\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \qquad (12)$$

αφού $E = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ και $|P| = \cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 = 1$.

2. Ιδιοανύσματα και Ιδιοτιμές Πινάκων

Η κίνηση ενός ανύσματος στο χώρο, (εδώ 2-διαστάσεων), μπροεί να περιγραφεί μέσω της δράσης πινάκων, π. χ. Το Α γίνεται Β μέσω της Β = [C]•Α απλοποιώντας τη γραφή, ή

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Για τους πίνακες υπάρχουν ανύσματα που δεν αλλάζουν διεύθυνση κατά τη δράση τους, δηλαδή για τον [C] θα υπάρχουν ανύσματα Α έτσι ώστε

$$[C]A = \alpha A, \qquad (13)$$

όπου α αριθμός. Τα ανύσματα ονομάζονται ιδιοανύσματα και οι αριθμοί ιδιοτιμές. Η εύρεση τους βασίζεται στη σχέση

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \qquad (14\alpha)$$

ή

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \qquad (14\beta)$$

ή

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad (15)$$

ή

$$\begin{bmatrix} c_{11}-\alpha & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}-\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0. \qquad (16)$$

Η σχέση αυτή είναι ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους $\{a_1, a_2\}$, εάν θεωρήσουμε την ιδιοτιμή δεδομένη. Επειδή στα δεξιά η (16) έχει μηδενικά, για να υπάρξει λύση μη-μηδενική πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να μηδενίζεται. Η συνθήκη αυτή προσδιορίζει τις ιδιοτιμές, αφού ο μηδενισμός της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\alpha & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}-\alpha \end{vmatrix} = 0 \qquad (17)$$

ισοδυναμεί με μηδενισμό πολυωνύμου δευτέρου βαθμού, (ως προς α). Στην περίπτωση (ν x ν) ορίζουσας προκύπτει πολυώνυμο νιοστού βαθμού. Οι ρίζες του πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα και η εισαγωγή τους στην (16), (μία κάθε φορά), παράγει τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα με μια σχετική απροσδιοριστία ως προς το μέγεθός (μήκος) τους. Συγκεκριμένα, η εισαγωγή της ιδιοτιμής α_ν δίδει

$$\begin{bmatrix} c_{11}-\alpha_\nu & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}-\alpha_\nu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0. \qquad (18)$$

Εδώ τα $\{a_1, a_2\}$ αντιστοιχούν στο ιδιοάνυσμα της ιδιοτιμής α_ν. Εν γένει σε πίνακα (νxν) προκύπτουν ν - 1 αναξάρτητες σχέσεις από την αντίστοιχη σχέση (18). Εδώ έχουμε μία μόνο ανεξάρτητη σχέση την

$$(c_{11}-\alpha_\nu)a_1 + c_{12}\, a_2 = 0 \quad ή \quad c_{21}\, a_1 + (c_{22}-\alpha_\nu)\, a_2 = 0, \qquad (19)$$

όπου και οι δύο αυτές σχέσεις οδηγούν στο ίδιο τελικό αποτέλεσμα. Λόγω της απροσδιοριστίας θέτουμε μία τιμή στη μία από τις συνιστώσες και προσδιορίζουμε τις υπόλοιπες. Συνήθως θέτουμε $a_1 = 1$, όμως απλοποιείται η γραφή εάν θέσουμε $a_1 = c_{12}$ στην πρώτη σχέση (19), οπότε $a_2 = \alpha_\nu - c_{11}$ και ανάλογα στην δεύτερη σχέση με $a_2 = c_{21}$. Τα μήκη των ιδιοανυσμάτων μπορούν να σταθεροποιηθούν και να γίνουν μονάδα μέσω κανονικοποίησης διαιρώντας με το με το μήκος του ανύσματος, δ, που προέκυψε,

$$\delta^2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = a_1^2 + a_2^2 = c_{12}^2 + (\alpha_\nu - c_{11})^2. \qquad (20)$$

Το κανονικοποιημένο άνυσμα είναι

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1/\delta \\ (\alpha_\nu - c_{11})/\delta \end{bmatrix} = \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} c_1 \\ \alpha_\nu - c_{11} \end{bmatrix}. \qquad (21)$$

Η σχέση αυτή περιγράφει και τις δύο ιδιοσυναρτήσεις $\{A_1, A_2\}$ με βάση την ιδιοτιμή α_ν για κάθε ιδιοάνυσμα A_ν.

Προκύπτει ένα νέο σύνολο μοναδιαίων ανυσμάτων και ενδιαφέρει να βρεθεί τρόπος να εκφρασθούν τα ανύσματα και οι πίνακες, (μετασχηματισμών ανυσμάτων), στη νέα βάση περιγραφής του χώρου. Γιά διευκόλυνση, η έκφραση σε μία βάση θα υποδεικνύεται με δείκτες "ν" για τη "νέα" και "ο" για την "παλαιά" βάση. Κατ΄αρχας χρειαζόμαστε να ορίσουμε τη σύμβαση για τα μοναδιαία ανύσματα του χώρου. Εστώ ότι αντιστοιχίζουμε

$$A_{1(\nu)} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\nu)}, \quad A_{2(\nu)} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{(\nu)}. \qquad (22)$$

Εάν θέσουμε Π τον πίνακα μετασχηματισμού της νέας βάσης στην παλαιά τότε

$$A_{(o)} = \Pi\, A_{(\nu)}. \qquad (23)$$

Επειδή τα ιδιοανύσματα είναι γνωστά στην παλαιά βάση μπορούμε εύκολα να κατασκευάζουμε τον πίνακα Π. Εφαρμόζοντας την σχέση (23) με χρήση των (21) και (22) γιά το πρώτο ιδιοάνυσμα έχουμε

$$\frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} c_1 \\ \alpha_1 - c_{11} \end{bmatrix}_{(o)} = \Pi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\nu)} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\nu)}, \qquad (24)$$

με $\delta = (c_{12}^2 + (\alpha_1 - c_{11})^2)^{1/2}$. Δηλαδή ισχύει

$$\frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} c_1 \\ \alpha_1 - c_{11} \end{bmatrix}_{(o)} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} \\ \Pi_{21} \end{bmatrix}, \qquad (25\alpha)$$

και ομοίως από το δεύτερο ιδιοάνυσμα

$$\frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} c_1 \\ \alpha_2 - c_{11} \end{bmatrix}_{(o)} = \begin{bmatrix} \Pi_{12} \\ \Pi_{22} \end{bmatrix}. \qquad (25\beta)$$

Μετά τον προσδιορισμό του πίνακα Π, εύκολα προσδιορίζεται και ο αντίστροφός του, Π^{-1}, έτσι ώστε (σχέση (9))

$$\Pi\, \Pi^{-1} = \Pi^{-1}\Pi = 1. \qquad (26)$$

Τότε με χρήση του Π^{-1} η δράση του Π αντιστρέφεται και πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την (23) λαμβάνουμε, μέσω της (26),

$$\Pi^{-1} A_{(o)} = \Pi^{-1}\, \Pi\, A_{(\nu)} = A_{(\nu)} \qquad (27)$$

Μπορούμε τώρα να εκφράσουμε ένα μετασχηματισμό με βάση (ο) σε μετασχηματισμό με βάση (ν), δηλαδή να αλλάξουμε βάση έκφρασης των σχέσεων του χώρου. Συγκεκριμένα, για την $D_{(o)} = M_{(o)} \bullet A_{(o)}$ εκφρασμένη στην (ο) βάση εισάγουμε τη "μονάδα" μέσω της σχέσης (26) ανάμεσα στον πίνακα και το άνυσμα Α,

$$D_{(o)} = M_{(o)}\, \Pi\Pi^{-1}\, A_{(o)} \qquad (28)$$

και πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με $[\Pi]^{-1}$, οπότε λαμβάνουμε

$$\Pi^{-1}D_{(o)} = \Pi^{-1}M_{(o)}\, \Pi\Pi^{-1}A = (\Pi^{-1}M_{(o)}\, \Pi)\, (\Pi^{-1}A_{(o)}). \qquad (29)$$

Τώρα μπορούμε να αναγνωρίσουμε την έκφραση στη νέα βάση μέσω της (27), όπου

$$D_{(\nu)} = \Pi^{-1}D_{(o)} \quad \text{και} \quad A_{(\nu)} = \Pi^{-1}A_{(o)}. \qquad (30)$$

Βλέπουμε τώρα, μέσω της σχέσης (29), ότι ο μετασχηματισμός από το $A_{(\nu)}$ στο $D_{(\nu)}$ επιτελείται από τον μετασχηματισμένο πίνακα

$$M_{(\nu)} = \Pi^{-1} M_{(o)} \Pi, \qquad (31)$$

οπότε στη νέα βάση για την $D_{(o)} = M_{(o)} \bullet A_{(o)}$ έχουμε

$$D_{(\nu)} = M_{(\nu)} \bullet A_{(\nu)}. \qquad (32)$$

ΑΣΚΗΣΗ

Παρατηρούμε ότι ο $[C]_{(\nu)}$ της σχέσης (13), (ή της (5), $B = [C] \bullet A$), στη νέα βάση (των ιδιοανυσμάτων του) γίνεται διαγώνιος με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές των ανυσμάτων της βάσης,

$$[C]_{(\nu)} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}. \qquad (33)$$

Αυτό ισχύει γιατί ως ιδιοσυνάρτησεις οι $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές α_1 και α_2 θα ικανοποιούν τις

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}_{(\nu)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Από την πρώτη σχέση λαμβάνουμε

$$c_{11} = a_1 \text{ και } c_{21} = 0$$

και από την δεύτερη

$$c_{21} = 0 \text{ και } c_{22} = a_2.$$

3. **Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις**

Αρχικά ένα σύνολο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = c_{11}\, y_1 + c_{12}\, y_2$$

$$\dot{\mathbf{y}}_2 = c_{21}\, y_1 + c_{22}\, y_2 \,,$$

γράφεται με τη χρήση πινάκων ως

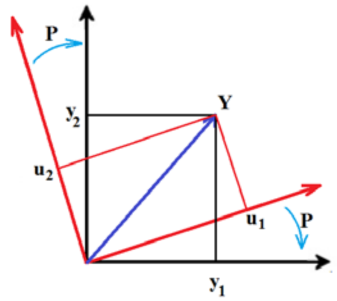
$$\dot{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \dfrac{dy_1}{dt} \\ \dfrac{dy_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C \cdot \mathbf{Y}. \qquad (34)$$

Παρατηρούμε ότι, εάν ο πίνακας [C] ≡ C ήταν διαγώνιος, τότε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων θα επιλύετο άμεσα. Αυτό μπορεί να γίνει εάν μετασχηματισθούν οι μεταβλητές $\{y_i\}$ σε νέες μεταβλητές $\{u_i\}$ μέσω ενός γραμμικού μετασχηματισμού που θα καθιστά τον C διαγώνιο. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο αυτό είναι εφικτό, σχέση (33).

Γενικεύοντας, το σύνολο των μεταβλητών "y_i" συμπεριφέρεται ως σύνολο συνιστωσών ανύσματος 2-διαστάσεων, έστω $\{\mathbf{Y}\} \equiv \{y_1 , y_2\}$, και οι γραμμικοί μετασχηματισμοί των $\{\mathbf{Y}\}$ μπορούν να μελετηθούν μέσω των μετασχηματισμών των προηγούμενων κεφαλαίων. Εδώ εννοείται σύμβαση ότι οι μεταβλητές "y_i" αριθμούνται με συγκεκριμένη σειρά του δείκτη (i). Για την απλοποίηση της επίλυσης της (34), αναζητείται γραμμικός μετασχηματισμός P, Σχήμα 4, των μεταβλητών-συνιστωσών $\{y_1 , y_2\}$ (δεδομένου του ανύσματος **Y)**, μέσω αλλαγής της αρχικής βάσης του χώρου $\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\}$, που να οδηγεί σε νέες μεταβλητές-συνιστώσες $\mathbf{U} \equiv \{u_i\}$,

$$\mathbf{Y} = P\,\mathbf{U}, \qquad (35)$$

έτσι ώστε στη νέα βάση ο πίνακας C να είναι διαγώνιος.



Σχήμα 4. Σχηματική αναπαράσταση αλλαγής μεταβλητών, από (y_1, y_2) σε (u_1, u_2), μέσω αλλαγής βάσης (μοναδιαίων ανυσμάτων) του χώρου (δύο διαστάσεων), όπου ο πίνακας P της σχέσης (35) αλλάζει τις συνιστώσες του Y.

Η διαφόριση της σχέσης αυτής δίνει

$$\dot{\mathbf{Y}} = P\,\dot{\mathbf{U}}\,. \qquad (36)$$

Μπορούμε τώρα να μετασχηματίσουμε το σύστημα των εξισώσεων (34) χρησιμοποιώντας τις (35) και (36),

$$P\,\dot{\mathbf{U}} = C\,P\mathbf{U}. \qquad (37)$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με P^{-1} λαμβάνουμε

$$P^{-1}P\,\dot{\mathbf{U}} = P^{-1}\,C\,P\mathbf{U}, \qquad (38)$$

ή, επειδή $P^{-1}P = 1$ (σχέση (9)),

$$\dot{\mathbf{U}} = P^{-1}CP\,\mathbf{U}. \qquad (39)$$

Θέτοντας M τον μετασχηματισμένο πίνακα $P^{-1}CP$ έχουμε

$$\dot{\mathbf{U}} = M\mathbf{U}. \qquad (40)$$

Εάν τώρα ο μετασχηματισμός P της σχέσης (35) ορισθεί έτσι ώστε τα μοναδιαία ανύσματα (της βάσης) να είναι ιδιοανύσματα του C, έστω με αντίστοιχες ιδιοτιμές ε_i, τότε στη νέα αυτή βάση ο M θα είναι διαγώνιος, σχέση (33), και οι μεταβλητές στις διαφορικές εξισώσεις θα είναι ανεξάρτητες και θα μπορούν να ολοκληρωθούν άμεσα. Δηλαδη, θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \qquad (41)$$

οπότε

$$\frac{du_i}{u_i} = \varepsilon_i\, dt, \quad ή \quad \ln\,[u_i(t)/u_i(0)] = \varepsilon_i\,(t - t_0), \quad ή$$

$$u_i(t) = u_i(0)\,\exp(\varepsilon_i t), \quad (\text{με } t_0 = 0) \qquad (42)$$

Ακολούθως, μέσω της σχέσης (35),

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad ή \quad \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \qquad (35)$$

μπορεί να υπολογισθεί η χρονική εξέλιξη των αρχικών y_i μεταβλητών. Ο P βρίσκεται μέσω σχέσεων αντίστοιχων των (25).

Η διαδικασία επομένως που ακολουθείται για την επίλυση του συστήματος γραμμικών εξισώσεων $\dot{\mathbf{Y}} = C{\cdot}\mathbf{Y}$ ξεκινά με την εύρεση των ιδιοτιμών και ιδιο-συναρτήσεων του πίνακα των συντελεστών C, σχέση (34), και ακολούθως επιλύονται οι εξισώσεις (41) των νέων ασύζευκτων μεταβλητών. Η εύρεση της εξέλιξης των αρχικών μεταβλητών γίνεται μέσω της σχέσης (35), δηλαδή μέσω του πίνακα μετασχηματισμού P, (ή Π), που υπολογίζεται από σχέσεις ανάλογες των σχέσεων (25).