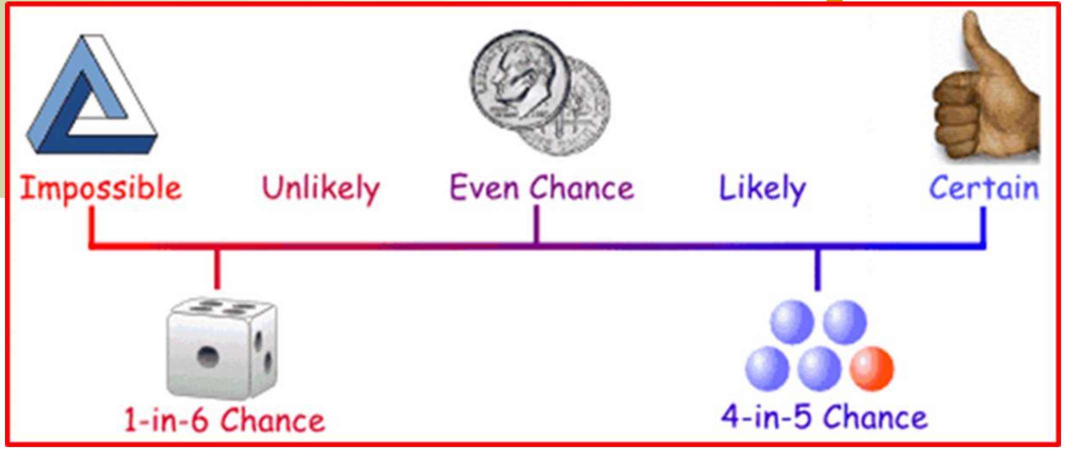
Πανεπιστήμιο Πειραιώς
Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων



Θεωρία Πιθανοτήτων

ΔΡ. ΦΙΛΙΠΠΑΚΗΣ ΜΙΧΑΗΛ

Καθηγητής Τμήματος Ψηφιακών συστημάτων

Διαφάνειες από το ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ βιβλίο "ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ, συγγραφέας. ΜΙΧΑΗΛ ΦΙΛΙΠΠΑΚΗΣ, Εκδόσεις Τσότρας 2019

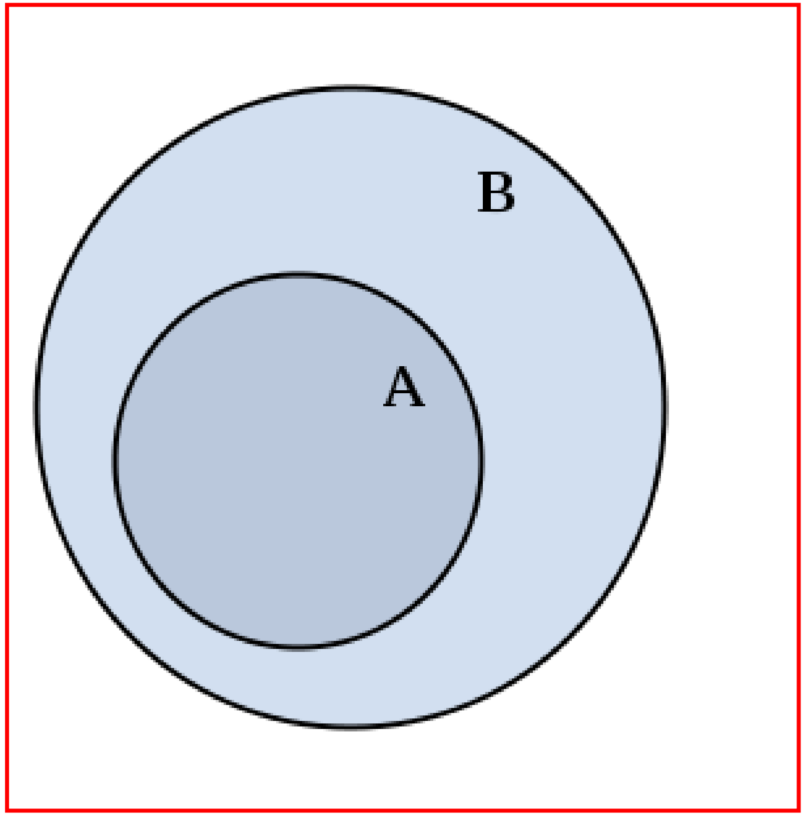
Σύνολο

Σύνολο είναι μια καλά ορισμένη συνάθροιση (συλλογή) από αντικείμενα ή σύμβολα, ή έννοιες ή ενδεχόμενα που θα τα ονομάζουμε στοιχεία. (*Τα σύνολα τα συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα {Α, Β, Γ, …} ενώ τα στοιχεία με μικρά {α,β ,γ, …}*).

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

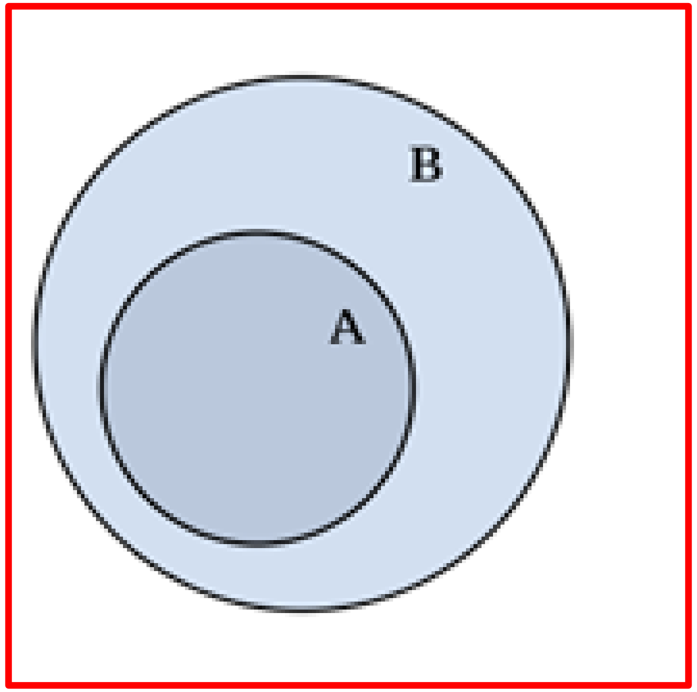
$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

- **υποσύνολο**



ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

Ορισμός Ένα σύνολο Α λέγεται **υποσύνολο** (subset) ενός συνόλου Β αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ συνεπάγεται $x \in B$, δηλαδή γράφουμε **συμβολικά** $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$



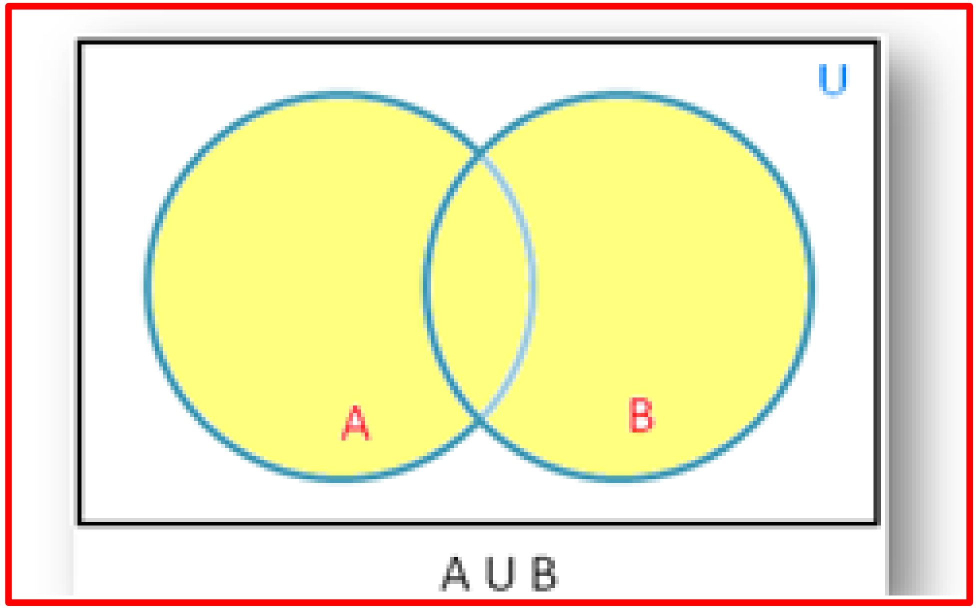
ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

Ορισμός Δύο σύνολα A και B λέμε ότι είναι **ίσα** και γράφουμε **A=B** αν και μόνο το καθένα είναι υποσύνολο του A, δηλαδή έχουμε $A = B \Leftrightarrow \begin{matrix} A \subseteq B \\ \text{και} \\ B \subseteq A \end{matrix}$

Ορισμός Κενό σύνολο είναι εκείνο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Συμβολίζεται με $\{\varnothing\}$.

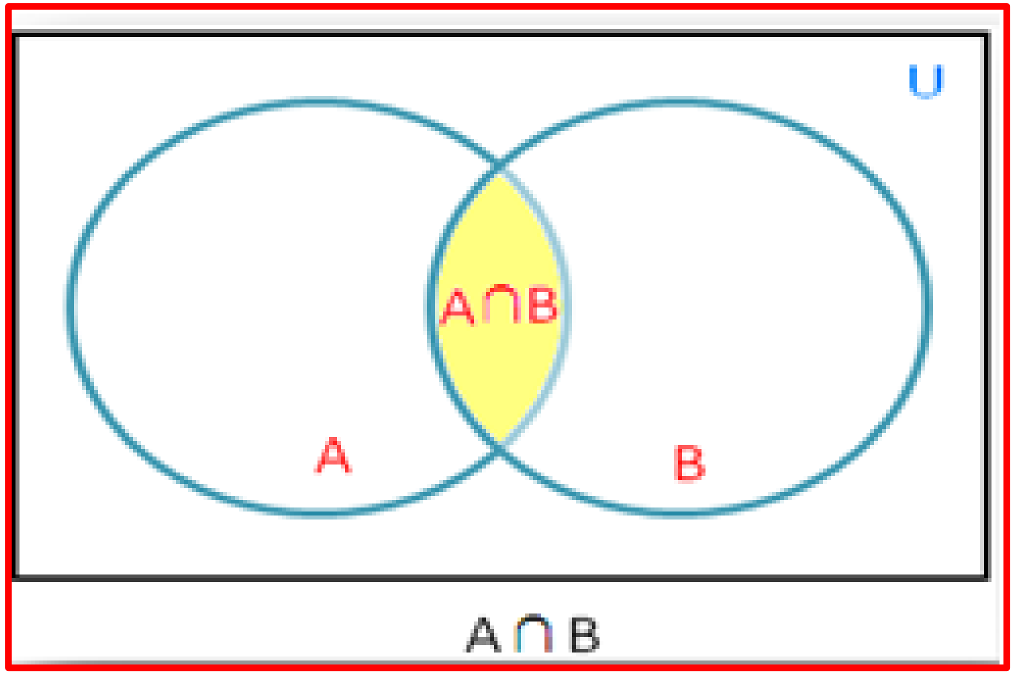
Πράξεις συνόλων

Ορισμός **Ένωση** (union) δύο συνόλων A και B ονομάζεται το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν στο A ή στο B. **Συμβολικά** γράφουμε $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}$



Πράξεις συνόλων

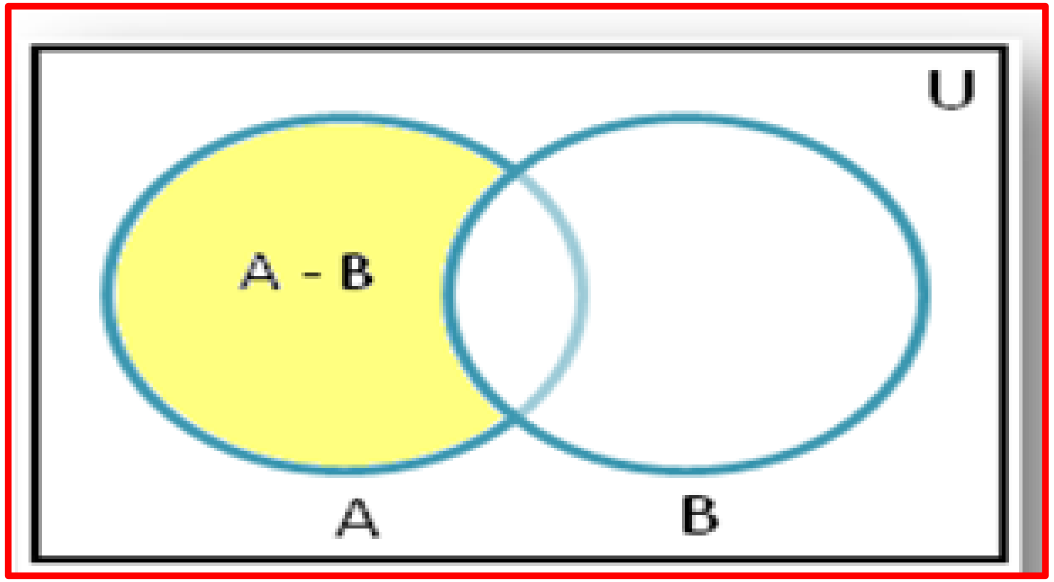
Ορισμός **Τομή (intersection)** δύο συνόλων Α και Β ονομάζεται το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν στο Α και στο Β. Συμβολικά γράφουμε $A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}$



Διαφορά (difference) δύο συνόλων A και B

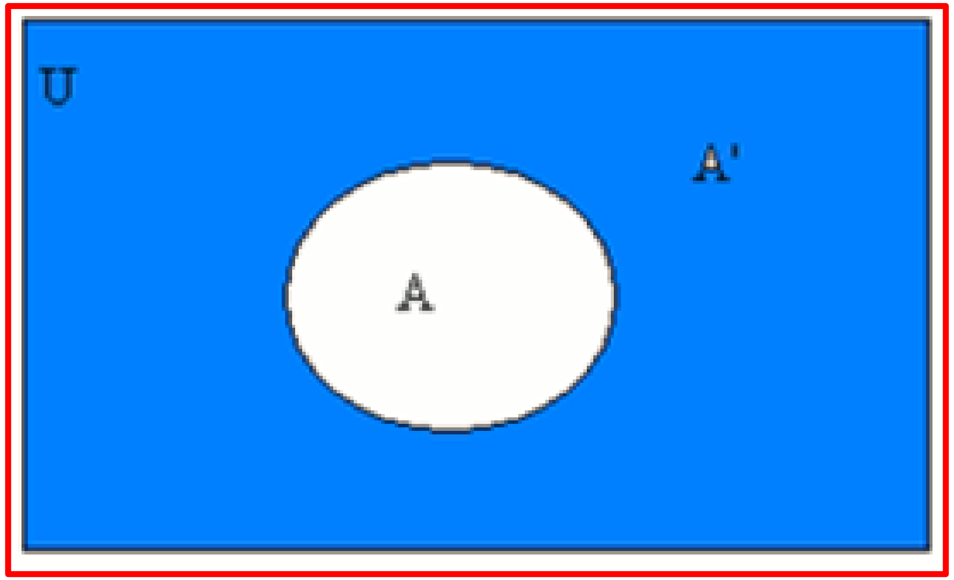
Ορισμός **Διαφορά (difference)** δύο συνόλων A και B ονομάζεται το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του συνόλου A που δεν ανήκουν στο σύνολο B. **Συμβολικά** γράφουμε

$$A - B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}$$



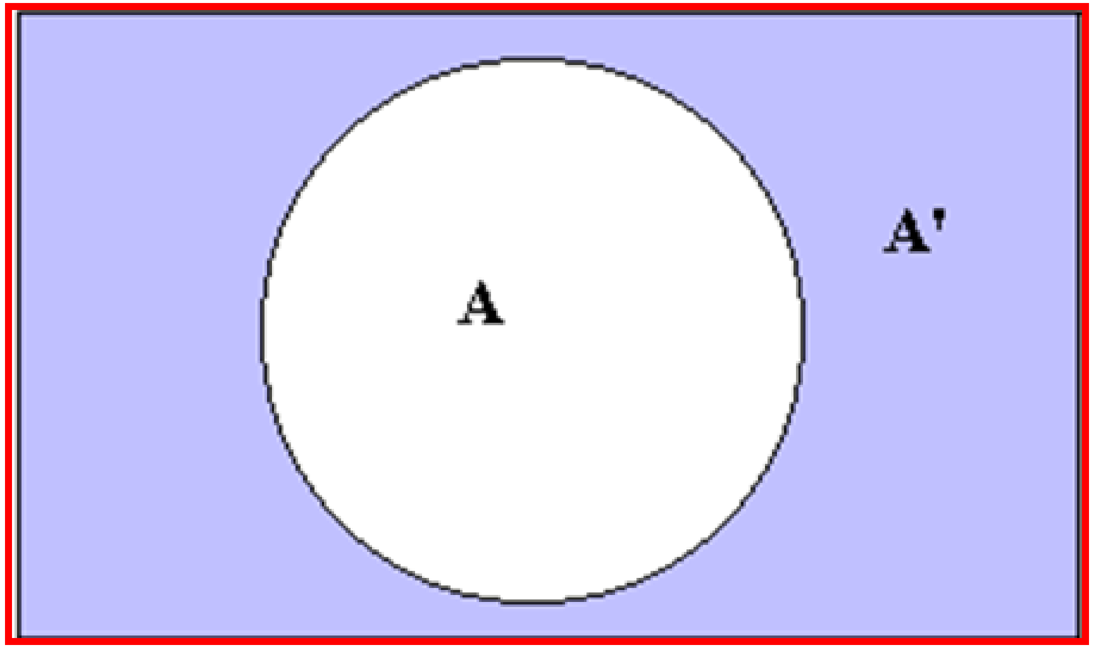
Συμπλήρωμα (complement)

Ορισμός Θεωρούμε το σύνολο U και έστω A ένα υποσύνολο αυτού. **Συμπλήρωμα** (complement) ενός συνόλου A (συμβολίζεται $\bar{A}$, A' ή A^c) ονομάζεται το σύνολο όλων των στοιχείων του U που δεν ανήκουν στο A, δηλαδή έχουμε $\bar{A} = \{x \in U : x \notin A\}$



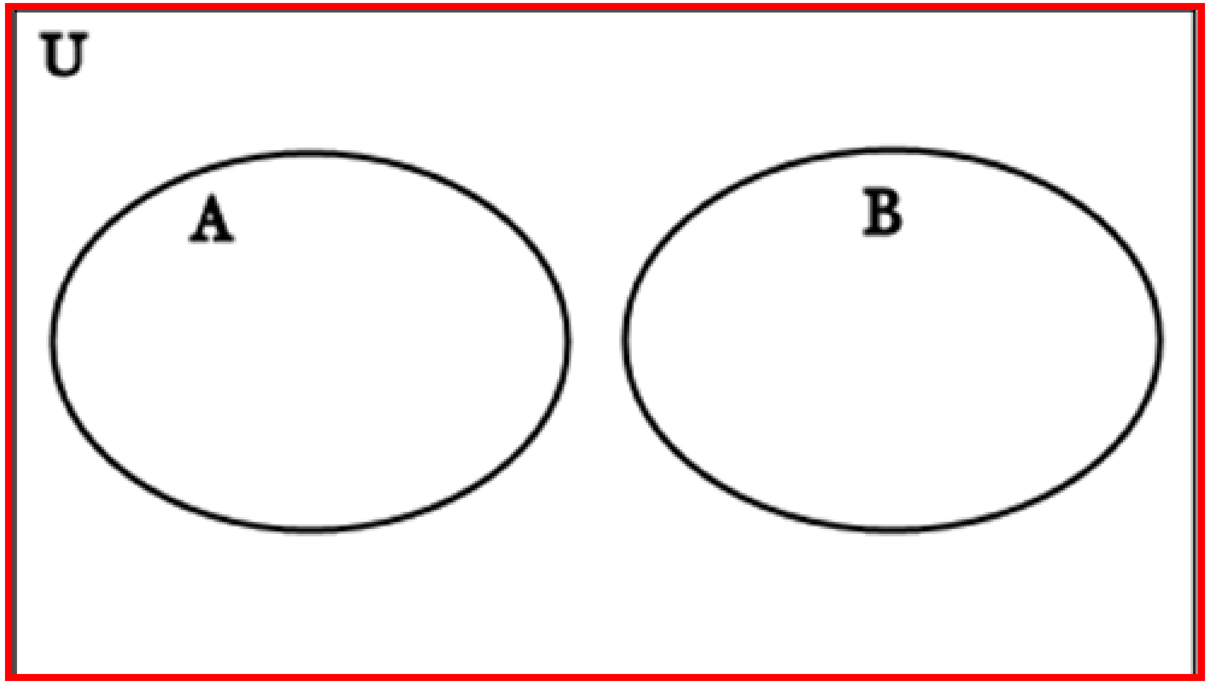
Συμπλήρωμα ενός συνόλου

$$A^c,\ A',\overline{A}=\{x\in\Omega : x\notin A\}$$



Ασυμβίβαστα σύνολα

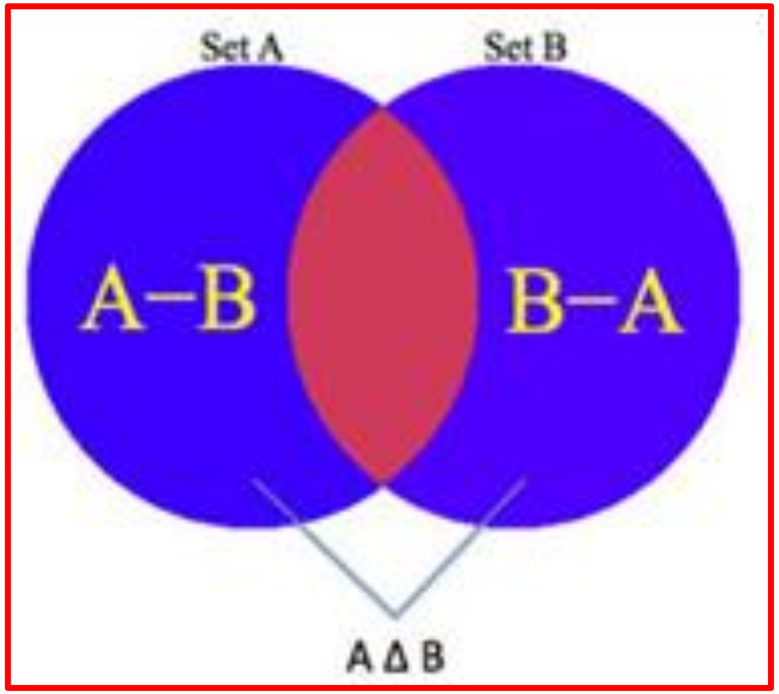
$$A \cap B = \varnothing$$



Συμμετρική διαφορά των A και B

Ορισμός Θεωρούμε τα σύνολα A και B υποσύνολα του χώρου U. **Συμμετρική** διαφορά των A και B (συμβολίζεται $A \triangle B$ ή $A \pm B$) ονομάζεται το σύνολο που περιγράφεται από το σύνολο

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$



Ιδιότητες Αν $A, B, \Gamma \subseteq \Omega$

- $A \cup B \subseteq \Omega, \quad A \cap B \subseteq \Omega$
- $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma), \quad (A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$

$$\boxed{A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma), \quad A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)}$$

$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$

$$\boxed{A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cap \Omega = A}$$

$$\boxed{A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing}$$

Ιδιότητες του $\subseteq$

$$\boxed{A \subseteq \Omega, \quad \varnothing \subseteq A,}$$

- Αν $\boxed{A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B}$
- Αν $\boxed{B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B}$

$$\boxed{A \subseteq (A \cup B), \quad (A \cap B) \subseteq A}$$

Ιδιότητες του A^C

- $\forall A\ \exists$ μοναδικό A^c ως προς Ω με $A^c = \Omega - A$

$$\boxed{A \cup A^c = \Omega, \quad A \cap A^c = \varnothing,}$$

$$\boxed{(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c}$$

$$\boxed{\varnothing^c = \Omega, \quad \Omega^c = \varnothing, \quad \left(A^c\right)^c = A}$$

Ιδιότητες του A-B

- Ισχύει ότι:

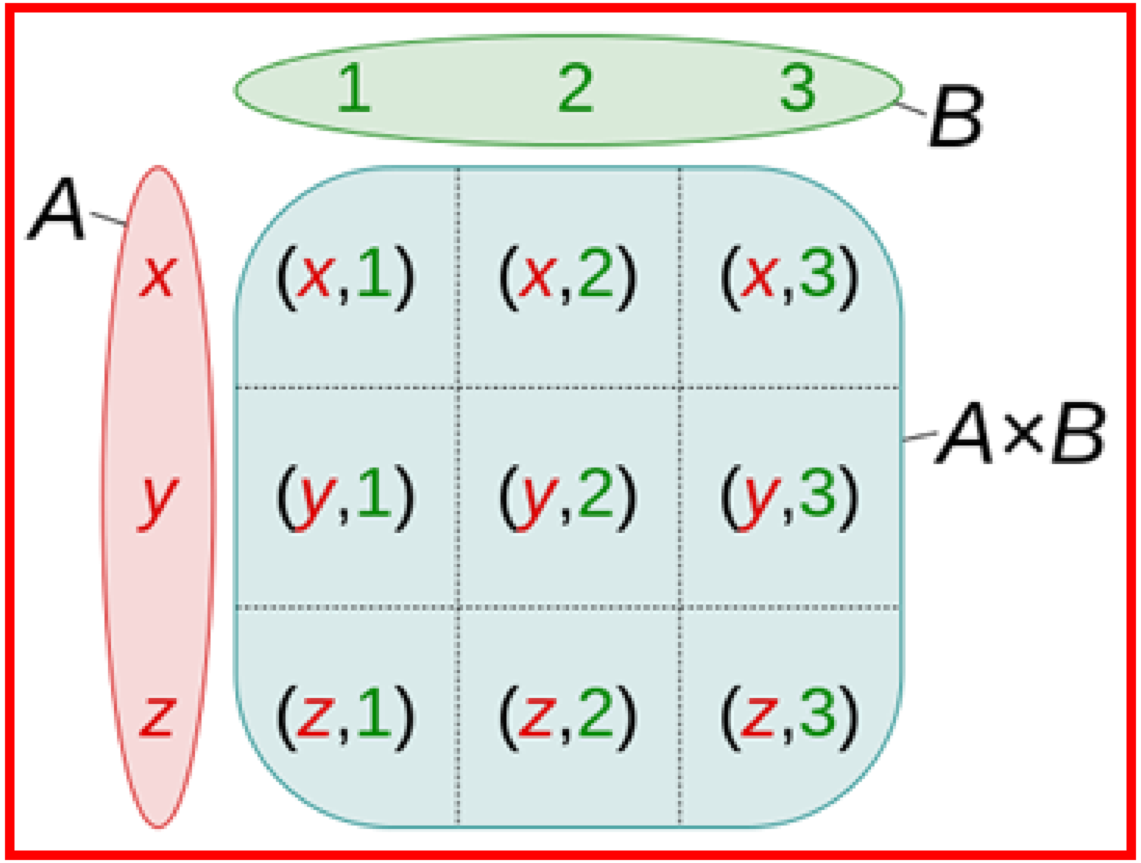
$$\boxed{A - B = \varnothing \Rightarrow A \subseteq B\ .}$$

καρτεσιανό γινόμενο

Ορισμός Θεωρούμε δύο μη κενά σύνολα Α και Β. Ονομάζουμε τότε **καρτεσιανό γινόμενο** (Cartesian product) των Α και Β (το συμβολίζουμε $A \times B$) το σύνολο που αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (α,β) έτσι ώστε το πρώτο στοιχείο να ανήκει στο πρώτο σύνολο και το δεύτερο στοιχείο να ανήκει στο δεύτερο σύνολο, δηλαδή $\boxed{A \times B = \{(\alpha,\beta) : \alpha \in A \ \text{ και } \ \beta \in B\}}$

καρτεσιανό γινόμενο (Cartesian product) των A και B

$$A \times B = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in A \quad \text{και} \quad \beta \in B\}$$



Διαφάνειες από το ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ βιβλίο "ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ, συγγραφέας. ΜΙΧΑΗΛ ΦΙΛΙΠΠΑΚΗΣ, Εκδόσεις Τσότρας 2019

Παράδειγμα Καρτεσιανού γινομένου

- Αν A = {1, 2,...,6} και B = {1, 2, ..., 6} τα ξεχωριστά αποτελέσματα από την ρίψη δύο ζαριών τότε το καρτεσιανό τους γινόμενο AxB ={(1, 1), (1,2),...,(6,6)} είναι το σύνολο όλων των δυνατών ζευγαριών κοινών αποτελεσμάτων. Το σύνολο AxB είναι ο δειγματικός χώρος που δημιουργείται από την ταυτόχρονη ρίψη δύο ζαριών.

Διαμέριση $\Delta = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

- Έστω $A_1, A_2, A_3, \ldots A_\kappa \subseteq \Omega$ τέτοια ώστε $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots A_\kappa = \Omega$ και $A_1, A_2, A_3, \ldots A_\kappa$ ανά δύο ξένα. Τότε το σύνολο $\Delta = \{A_1, A_2, A_3, \ldots A_\kappa\}$ ονομάζεται **διαμέριση** του Ω.
-
- ***Παράδειγμα***
- Έστω ότι χωρίζουμε το σύνολο των εργαζομένων Ω σε μία επιχείρηση σε τέσσερις ηλικιακές ομάδες $A_1, A_2, A_3, A_4 \subseteq \Omega$ έτσι ώστε $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \Omega$ και $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = \ldots = A_3 \cap A_4$ (ανά δύο ξένα). Τότε το σύνολο $\Delta = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ είναι μία **διαμέριση** του Ω.

Πείραμα τύχης-Δειγματικός χώρος

- **Πείραμα** ονομάζουμε μία διαδικασία η οποία μπορεί να επαναληφθεί θεωρητικά άπειρες φορές, κάτω από τις ίδιες ουσιαστικά συνθήκες και μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας παρατηρούμε κάποια αποτελέσματα.
- **Ορισμός Τυχαίο (random) Πείραμα** ονομάζουμε εκείνο το πείραμα το οποίο έχει περισσότερα του ενός δυνατά αποτελέσματα. **Ισοδύναμα**
- Ένα πείραμα του οποίου το αποτέλεσμα δεν μπορεί να προβλεφθεί. (π.χ. ρίψη 2 ζαριών, 3 νομισμάτων, μέτρηση της ανεργίας σε μία περιοχή) ονομάζεται **τυχαίο πείραμα**.

.

- **Δειγματικός χώρος Ω ή βέβαιο ενδεχόμενο** ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός τυχαίου πειράματος.
- **Συμβολίζεται** με το γράμμα **Ω** και κάποιες φορές με το γράμμα S. Ένα **στοιχείο ω** του δειγματικού χώρου Ω ονομάζεται **δειγματικό σημείο.**

- **Παρατήρηση 1.3.8** Υπάρχουν δύο είδη δειγματικών χώρων:
- Οι **διακριτοί** δειγματικοί χώροι είναι εκείνοι που έχουν πεπερασμένο ή αριθμήσιμο αριθμό στοιχείων,
- Οι **συνεχείς** δειγματικοί χώροι είναι εκείνοι που έχουν μη αριθμήσιμο αριθμό στοιχείων.

- Έστω Ω ένας διακριτός δειγματικός χώρος και Α ένα υποσύνολο του. Το σύνολο Α ονομάζεται ενδεχόμενο ως προς το Ω. Ειδικότερα ο δειγματικός χώρος Ω ονομάζεται **βέβαιο ενδεχόμενο** και το κενό σύνολο $\varnothing$ ονομάζεται **αδύνατο ενδεχόμενο.**

Δειγματικός χώρος Ω- απλά ενδεχόμενα- σύνθετα ενδεχόμενα

- Το σύνολο όλων των αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **Δειγματικός χώρος Ω,** ενώ τα σημεία του δειγματικού χώρου που αντιστοιχούν σε στοιχειώδη αποτελέσματα του τυχαίου πειράματος ονομάζονται **απλά ενδεχόμενα**. Ομάδες απλών ενδεχόμενων που μοιράζονται κάποιο κοινό χαρακτηριστικό αναφέρονται ως **σύνθετα ενδεχόμενα.**

Παράδειγμα

- Αν ρίξουμε ένα ζάρι μία φορά, το σύνολο των αποτελεσμάτων, ή αλλιώς ο δειγματικός χώρος Ω που παράγεται, είναι: $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$
- Απλά ενδεχόμενα είναι: $\{1\}, \{2\}, ...,\{6\}$

- Σύνθετα ενδεχόμενα είναι:
- E_1 = το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός = $\{2, 4, 6\}$
- E_2 = το αποτέλεσμα είναι περιττός αριθμός = $\{1, 3, 5\}$
- E_3 = το αποτέλεσμα είναι αριθμός ≥ 3 = $\{3,4, 5, 6\}$

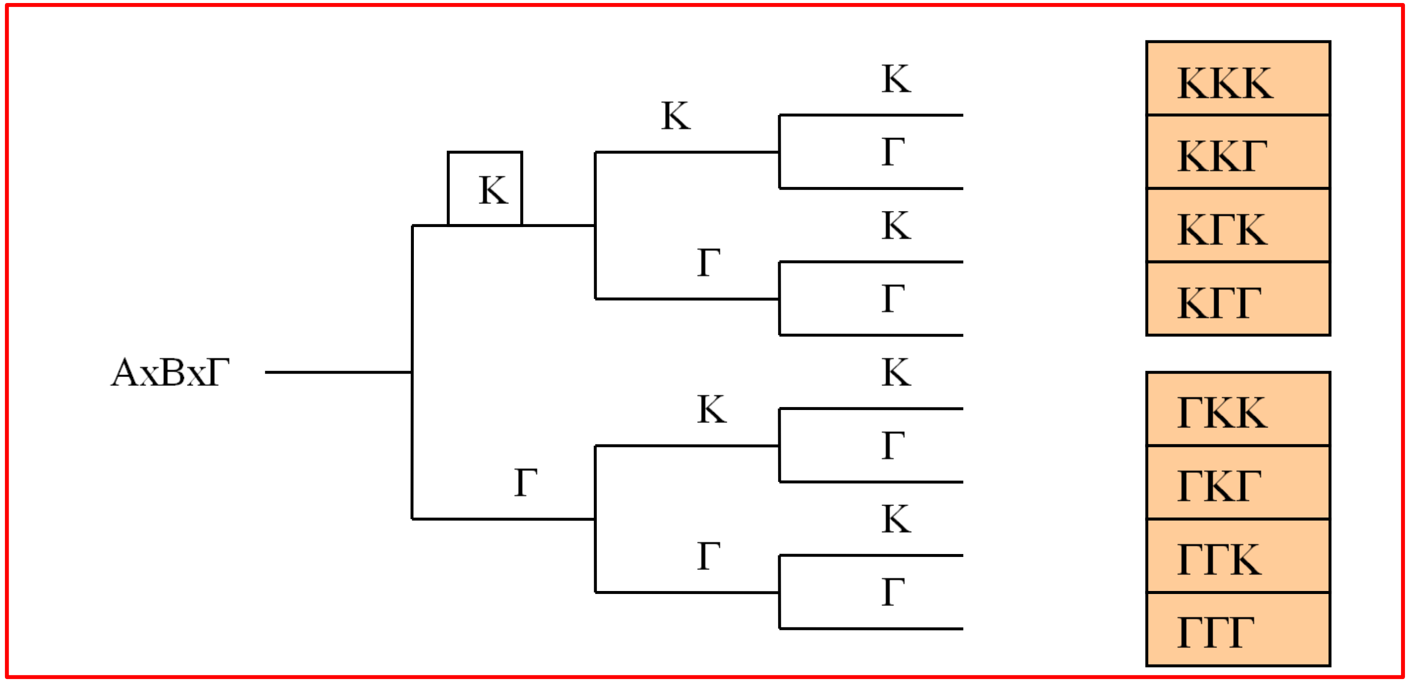
Παράδειγμα 1.3.2 Κατά τη ρίψη δύο ζαριών ποιος είναι ο δειγματικός χώρος των αποτελεσμάτων της ρίψης των δύο ζαριών;

- **Απάντηση**
- Έστω Ω ο δειγματικός χώρος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων (α, β) του πειράματος που συνίσταται στην ταυτόχρονη ρίψη δύο ζαριών με α το αποτέλεσμα του πρώτου ζαριού και β του δευτέρου. Το σύνολο Ω περιέχει 36 σημεία-ζεύγη αριθμών, τα ακόλουθα:
- (1,1) (1,2) (1,3) (1,4), (1,5), (1,6)
- (2,1) (2,2) (2,3) (2,4), (2,5), (2,6)
- (3,1) (3,2) (3,3) (3,4), (3,5), (3,6)
- (4,1) (4,2) (4,3) (4,4), (4,5), (4,6)
- (5,1) (5,2) (5,3) (5,4), (5,5), (5,6)
- (6,1) (6,2) (6,3) (6,4), (6,5), (6,6)
- Επιπλέον παρατηρούμε ότι ο δειγματικός χώρος είναι διακριτός.

Παράδειγμα 1.3.4 Ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος Ω.

Απάντηση

Ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές. Κάνουμε το δενδροδιάγραμμα που δημιουργεί το δειγματικό χώρο των τριών προσπαθειών (τριών ρίψεων του νομίσματος) και έχουμε,



Οπότε ο δειγματικός χώρος Ω περιγράφεται από το σύνολο:

$$\Omega=\{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}.$$

Παράδειγμα 1.3.10 Έστω Ω το σύνολο των φοιτητών (αγόρια και κορίτσια) του τμήματος Ψηφιακών Συστημάτων του Πανεπιστημίου Πειραιώς και E_1, E_2, E_3, E_4 τα σύνολα των πρωτοετών, δευτεροετών, τριτοετών και τεταρτοετών φοιτητών αντίστοιχα. Επίσης, έστω Γ το σύνολο των φοιτητριών του τμήματος και Δ το σύνολο των φοιτητών που μετά την ολοκλήρωση του δευτέρου έτους σπουδών επέλεξαν την κατεύθυνση των Δικτύων. Να ορισθούν (λεκτικά) τα παρακάτω σύνολα.

i) $A_1 = (E_1 \cup E_2)^c \cap \Gamma \cap \Delta$

ii) $A_2 = \Gamma \cap \Delta^c$

iii) $A_3 = E_4 \cap \Gamma^c \cap \Delta$

iv) $A_4 = E_4 \cap \Gamma \cap \Delta^c$

v) $A_5 = (E_1 \cup E_2) \cap \Gamma \cap \Delta$

Στους τεταρτοετείς συμπεριλαμβάνονται και φοιτητές μεγαλύτερων ετών.

- **Απάντηση**

Έστω Ω το σύνολο των φοιτητών (αγόρια και κορίτσια) του τμήματος Ψηφιακών Συστημάτων του Πανεπιστημίου Πειραιώς και E_1, E_2, E_3, E_4 τα σύνολα των πρωτοετών, δευτεροετών, τριτοετών και τεταρτοετών φοιτητών αντίστοιχα. Επίσης, έστω Γ το σύνολο των φοιτητριών του τμήματος και Δ το σύνολο των φοιτητών που μετά την ολοκλήρωση του δευτέρου έτους σπουδών επέλεξαν την κατεύθυνση των Δικτύων.

i) $A_1 = (E_1 \cup E_2)^c \cap \Gamma \cap \Delta =$ τριτοετείς και τεταρτοετείς φοιτήτριες που έχουν επιλέξει την κατεύθυνση των δικτύων.

ii) $A_2 = \Gamma \cap \Delta^c =$ Όλες φοιτήτριες του τμήματος εκτός εκείνων του τρίτου και τετάρτου έτους που έχουν επιλέξει την κατεύθυνση των δικτύων.

iii) $A_3 = E_4 \cap \Gamma^c \cap \Delta =$ τεταρτοετείς φοιτητές (δηλαδή τα αγόρια φοιτητές) που έχουν επιλέξει την κατεύθυνση των δικτύων.

iv) $A_4 = E_4 \cap \Gamma \cap \Delta^c =$ τριτοετείς φοιτήτριες που δεν έχουν επιλέξει την κατεύθυνση των δικτύων.

v) $A_5 = (E_1 \cup E_2) \cap \Gamma \cap \Delta =$ πρωτοετείς και δευτεροετείς φοιτήτριες που έχουν επιλέξει την κατεύθυνση των δικτύων.

Παράδειγμα

1. Έστω $\Omega = \{2, 3, 4, 5, ..., 12\}$ το σύνολο όλων των δυνατών αθροισμάτων από τη ρίψη δύο ζαριών. Ορίζουμε τα παρακάτω γνήσια υποσύνολα του Ω.

- A_1 = το σύνολο των περιττών αθροισμάτων
- A_2 = το σύνολο των άρτιων αθροισμάτων
- A_3 = το σύνολο των αθροισμάτων που είναι μικρότερο του 6
- A_4 = το σύνολο των διψήφιων αθροισμάτων
- Να οριστούν τα παρακάτω σύνολα (λεκτικά) και να βρεθούν τα στοιχεία τους (αριθμητικά):
- $\mathbf{A_1 \cup A_2 \quad A_1 \cap A_2 \quad A_1 \cup A_3 \quad A_1 \cap A_3}$
-

ΛΥΣΗ

(i) $A_1 \cup A_2 = \Omega$

- Η ένωση των περιττών και των άρτιων συνιστά το σύνολο όλων των αποτελεσμάτων-αθροισμάτων.
-

(i) $A_1 \cap A_2 = \varnothing$

- Ένας φυσικός αριθμός μπορεί να είναι είτε άρτιος είτε περιττός, αλλά όχι και τα δύο. Άρα κανένα άθροισμα δεν μπορεί να ανήκει ταυτόχρονα και στο A_1 και στο A_2. Άρα η τομή τους είναι το κενό σύνολο.
-

(i) $A_1 \cup A_3 = \{3, 5, 7, 9, 11, 2, 4\}$

- Περιέχει όλους τους περιττούς αριθμούς από το 2 ως το 12 και επιπλέον περιέχει τους
- άρτιους αριθμούς που είναι μικρότεροι του 6.
-

(i) $A_1 \cap A_3 = \{3, 5\}$

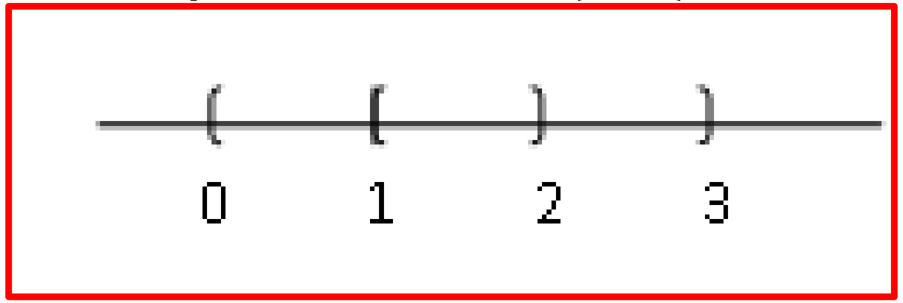
- Περιέχει τους περιττούς αριθμούς από το 2 ως το 12 που είναι ταυτόχρονα μικρότεροι του 6.

Παράδειγμα **Να υπολογιστεί η ένωση και η τομή των συνόλων Α και Β όταν Α={x:0<x<2}, Β={x:1≤x<3}**

- <u>ΛΥΣΗ</u>

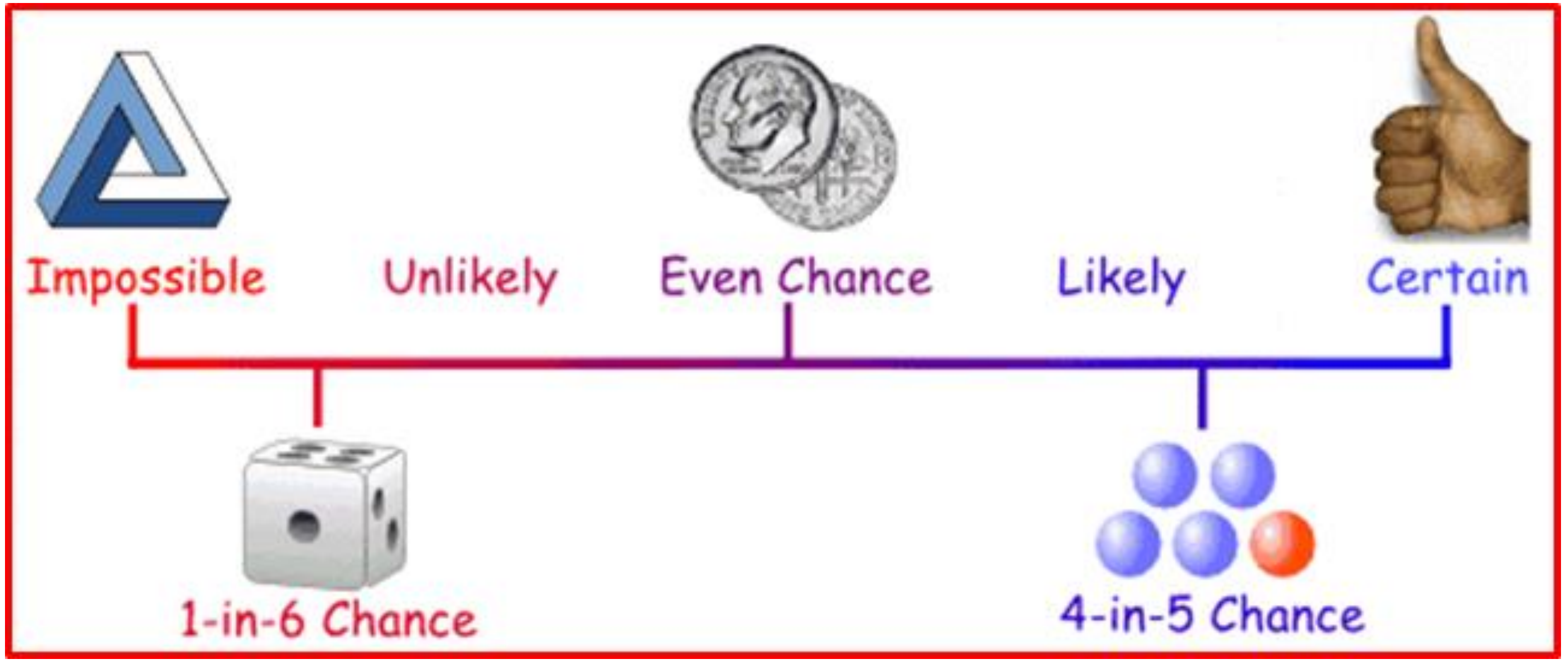
(i)Το $A \cup B$ αποτελείται από στοιχεία που ανήκουν είτε στο Α είτε στο Β είτε και στα δυο και συνθέτουν το ανοιχτό διάστημα (0,3):

- $A \cup B = \{x: x \in A$ ή $x \in B$ ή και στα δύο$\} = \{x: 0<x<3\}$



- $A \cap B = \{x: x \in A$ και $x \in B\} = \{x: 1 \leq x < 2\}$

Κλασικός ορισμός Πιθανότητας



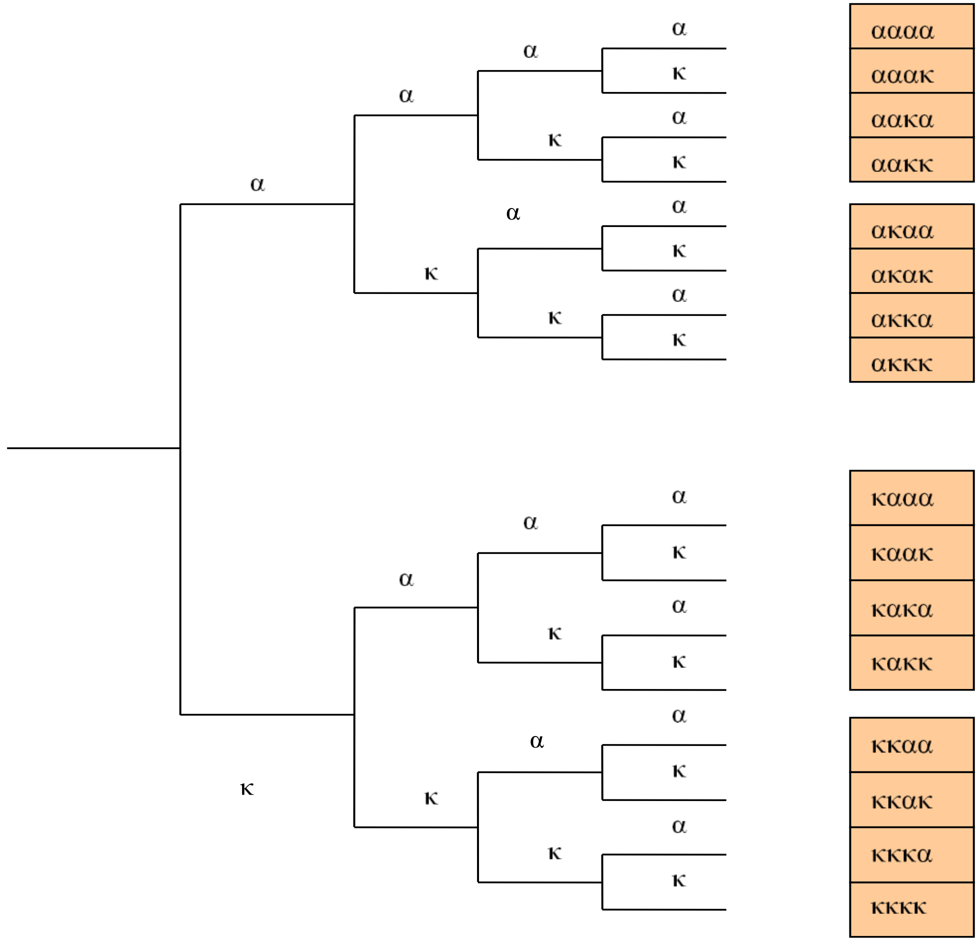
•

Ορισμός 1.4.1 Ο κλασικός ορισμός της **πιθανότητας** διατυπώθηκε από τον **Laplace.** Ο Laplace θεωρώντας όλα τα απλά ενδεχόμενα ως **ισοπίθανα και ασυμβίβαστα** (όπως είναι π.χ. τα απλά ενδεχόμενα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού**)**, όρισε ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου το πηλίκο του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων δια του συνολικού αριθμού των δυνατών περιπτώσεων: $P(A)=\frac{N(E)}{N(\Omega)}$ όπου: $N(E)$ το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων και $N(\Omega)$ το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων.

- **Παράδειγμα 1.4.2** Για μια οικογένεια με τέσσερα παιδιά να υπολογιστούν οι πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων.
  (i) Α: τα αγόρια με τα κορίτσια να εναλλάσσονται.
  (ii) Β: το πρώτο και το τέταρτο παιδί να είναι αγόρι.
  (iii) Γ: να έχει δύο αγόρια και δυο κορίτσια.
  (iv) Δ: να γεννηθούν τρία διαδοχικά παιδιά του ίδιου φύλου.

Απάντηση

Θεωρούμε μία οικογένεια με τέσσερα παιδιά. Ο δειγματικός χώρος Ω, ο οποίος αποτελείται από 16 ισοπίθανα ενδεχόμενα (N(Ω)=16) κατασκευάζεται με την βοήθεια του ακόλουθου δεντρικού διαγράμματος.



Τα ευνοϊκά ενδεχόμενα για κάθε μία από τις περιπτώσεις (i) - (iv) είναι:

(i) Α = {α-κ-α-κ, κ-α-κ-α} με αντίστοιχη πιθανότητα P(A) = 2/16

(ii) Β = {α-α-α-α, α-α-κ-α, α-κ-α-α, α-κ-κ-α} με P(B) = 4/16

(iii) Γ = {α-α-κ-κ, α-κ-α-κ, α-κ-κ-α, κ-α-α-κ, κ-α-κ-α, κ-κ-α-α} με P(Γ) = 6/16

(iv) Δ = {α-α-α-κ, α-κ-κ-κ, κ-α-α-α, κ-κ-κ-α, α-α-α-α, κ-κ-κ-κ} με P(Δ) = 6/16

Παράδειγμα

Αν Α = {1,2,3,4} και Β = {3,4,5,6} δυο υποσύνολα ενός δειγματικού χώρου Ω, που αποτελείται από ισοπίθανα ενδεχόμενα με P(A) = 2/3, να υπολογιστούν οι πιθανότητες: (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cap B^c)$

•

<u>ΛΥΣΗ</u> **Αν A = {1,2,3,4} και B = {3,4,5,6}**
(i) P(A∩B)

- .

<u>ΛΥΣΗ</u> Αν Α = {1,2,3,4} και Β = {3,4,5,6} (i) P(A∩B)

Εφόσον $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{3}$ και n(A) = 4 συμπεραίνουμε ότι n(Ω) = 6, δηλαδή ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από 6 απλά ενδεχόμενα. Επιπλέον, αφού το σύνολο Ω περιέχει τα στοιχεία του Α, δηλαδή τα 1,2,3,4 και τα στοιχεία του Β, δηλαδή τα 3,4,5,6 συμπεραίνουμε ότι Ω = {1,2,3,4,5,6}.

(i) Ορίζουμε το σύνολο Α∩Β={τα κοινά στοιχεία των Α,Β}={3,4} με n(A∩B) = 2. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

<u>ΛΥΣΗ</u> **Αν A = {1,2,3,4} και B = {3,4,5,6}**
(ii) P(A∩B^c)

(i) Ομοίως $A \cap B^c = \{1,2\}$ με $n(A \cap B^c) = 2$ και

$$P(A \cap B^c) = \frac{n\left(A \cap B^c\right)}{n\left(\Omega\right)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Παράδειγμα

Τρεις φίλοι που πηγαίνουν τακτικά στο γήπεδο, πριν αγοράσουν εισιτήρια ρίχνουν ένα νόμισμα. Αν όλοι φέρουν το ίδιο αποτέλεσμα, τότε ο καθένας αγοράζει το εισιτήριό του. Αν ένας φέρει διαφορετικό αποτέλεσμα από τους άλλους δυο, τότε αυτός πληρώνει και για τα τρία εισιτήρια.

(i)Ποια η πιθανότητα ένας συγκεκριμένος να πληρώσει και για τα τρία εισιτήρια;

(ii)Ποια η πιθανότητα κάποιος από τους τρεις να πληρώσει και για τα τρία εισιτήρια;

ΛΥΣΗ

- Ο δειγματικός χώρος αποτελεσμάτων (σε σειρά $1^{ου}$, $2^{ου}$, $3^{ου}$) είναι:
  - Ω = {ΚΚΚ, ΚΓΚ, ΚΚΓ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΓΚ, ΓΚΓ, ΓΓΓ}
- **Εάν εμφανιστούν τα ενδεχόμενα ΓΚΚ και ΚΓΓ, τότε πληρώνει ο πρώτος της παρέας. Αν εμφανιστούν τα ενδεχόμενα ΚΓΚ και ΓΚΓ, τότε πληρώνει ο δεύτερος. Αν εμφανιστούν τα ενδεχόμενα ΚΚΓ και ΓΓΚ πληρώνει ο τρίτος. Τέλος αν έρθουν τρεις κορώνες ΚΚΚ ή τρία γράμματα ΓΓΓ ο καθένας πληρώνει το δικό του. Άρα:**

ΛΥΣΗ

- Άρα:

(i)η πιθανότητα να πληρώσει ένας συγκεκριμένος και τα τρία εισιτήρια είναι 2/8

(ii)η πιθανότητα να πληρώσει κάποιος και για τα εισιτήρια των άλλων είναι 6/8.

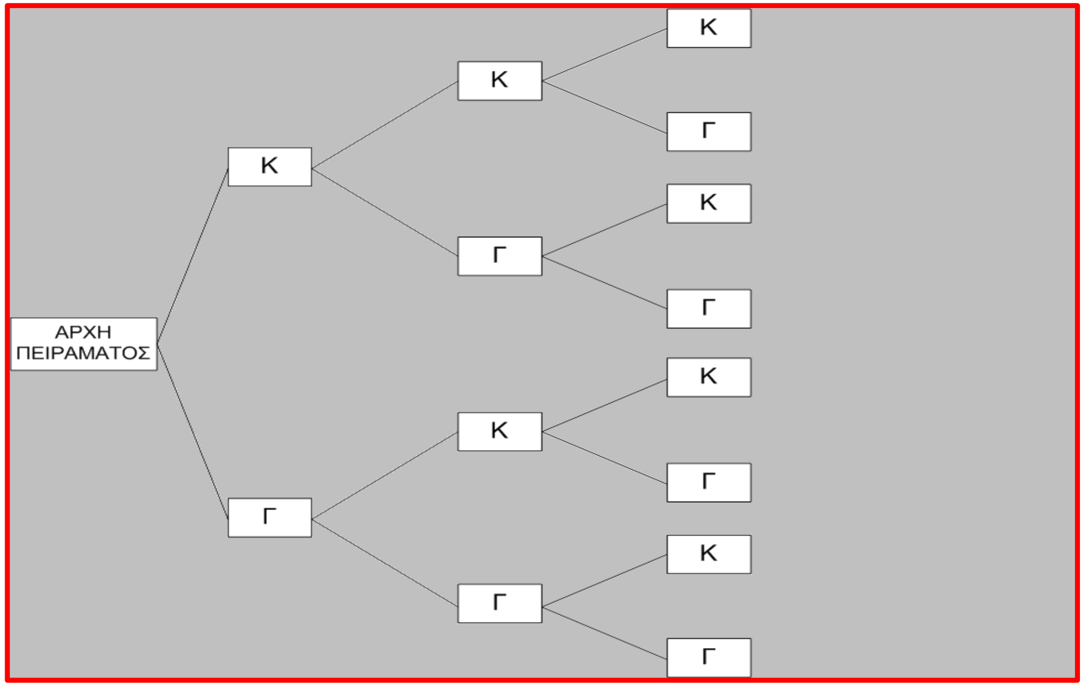
-

Παράδειγμα 1.4.3 Σε μία ρίψη ενός αμερόληπτου νομίσματος τρεις φορές να υπολογιστεί η πιθανότητα να έρθει τουλάχιστον μία φορά γράμματα και η πιθανότητα να έρθει ακριβώς δύο φορές κορώνα.

- .

Απάντηση

- Θεωρούμε μία ρίψη ενός αμερόληπτου νομίσματος τρεις φορές. Τότε ο δειγματικός Ω ο οποίος αποτελείται από 8 ισοπίθανα ενδεχόμενα (N(Ω)=8) κατασκευάζεται με την βοήθεια του ακόλουθου δεντρικού διαγράμματος.



Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος είναι Ω={ΚΚΚ,ΚΚΓ,ΚΓΚ,ΚΓΓ,ΓΚΚ,ΓΚΓ,ΓΓΚ,ΓΓΓ». Έστω το ενδεχόμενο Α που ορίζεται ως:Α= «Να έρθει τουλάχιστον μία φορά γράμματα». Τότε το ενδεχόμενο Α έχει τα στοιχεία: Α={ΚΚΓ,ΚΓΚ,ΚΓΓ,ΓΚΚ,ΓΚΓ,ΓΓΚ,ΓΓΓ». Ανάλογα ορίζουμε το ενδεχόμενο Β: «Να έρθει ακριβώς δύο φορές κορώνα». Το ενδεχόμενο Β αποτελείται από τα στοιχεία: Β={ΚΚΓ,ΚΓΚ,ΓΚΚ}. Άρα οι ζητούμενες πιθανότητε είναι ίσες με P(A)=7/8 και P(B)=3/8 αντίστοιχα.

- **Παράδειγμα 1.4.17** Τρεις φυλακισμένοι Α,Β,Γ που έχουν επιδείξει εξίσου καλή διαγωγή, κάνουν αίτηση για αποφυλάκιση. Ύστερα από τρεις μήνες μαθαίνουν ότι το συμβούλιο χαρίτων έχει κάνει δεκτές τις δύο από τις τρεις αιτήσεις, αλλά δεν ξέρουν ποιες. Ο Α, που έχει μία σχετική οικειότητα με τον φρουρό (ο οποίος ξέρει ποιοι πρόκειται να αποφυλακιστούν), σκέφτεται να τον ρωτήσει. Για να μη τον φέρει σε δύσκολη θέση, δεν θέλει να τον ρωτήσει αν θα αποφυλακιστεί ο ίδιος, αλλά σκέφτεται να τον ρωτήσει το όνομα του ενός από τους άλλους που θα αφεθεί ελεύθερος. Κάνοντας όμως κάποιους υπολογισμούς, διαπιστώνει ότι πριν ρωτήσει, έχει πιθανότητα να αποφυλακιστεί 2/3, ενώ αν ρωτήσει και μάθει π.χ. ότι ο Γ θα αποφυλακιστεί, η πιθανότητά του γίνεται 1/2. Έτσι αποφασίζει να μην ρωτήσει τον φρουρό. Είναι σωστός ο συλλογισμός του;
-

•

Απάντηση

Η απάντηση του φύλακα δεν είναι λογικό να επηρεάζει την πιθανότητα αποφυλάκισης του Α, αλλά ας εξετάσουμε τους δειγματικούς χώρους και τις πιθανότητες των ενδεχομένων τους στις δύο περιπτώσεις:

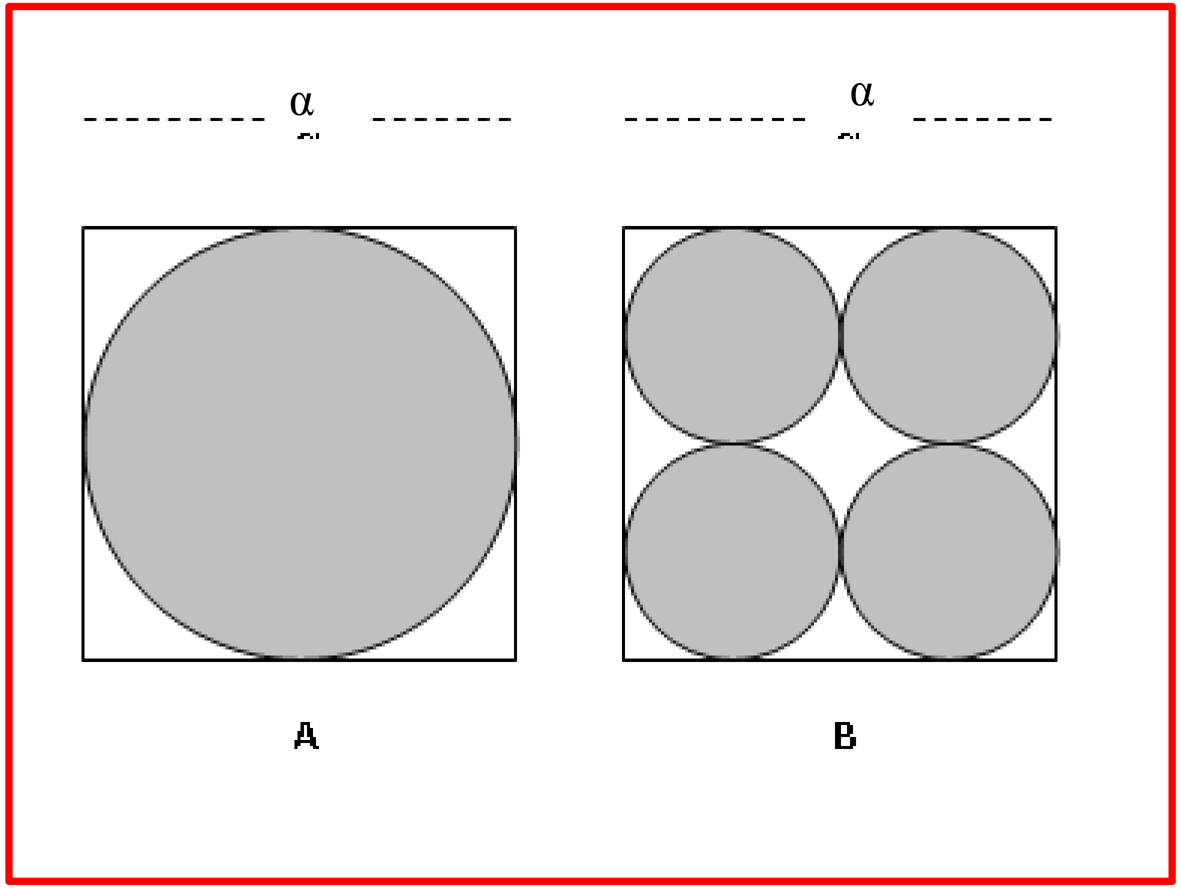
- Αν ο Α δεν έχει καμία πληροφορία, τα πιθανά ζευγάρια αυτών που θα αποφυλακιστούν είναι: Α-Β, Α-Γ, Β-Γ με πιθανότητα 1/3 το καθένα και συνεπώς ο Α έχει πιθανότητα 2/3 να αφεθεί ελεύθερος.
- Αν μάθει το όνομα του ενός από τους άλλους δύο (που θα αποφυλακιστεί), ο δειγματικός χώρος διαμορφώνεται ως εξής (αναλυτικά):

Το ζευγάρι κρατουμένων που αποφυλακίζεται	Αυτός που κατονόμασε ο φύλακας	Η αντίστοιχη πιθανότητα
Α-Β	Β	1/3
Α-Γ	Γ	1/3
Β-Γ	Β	1/6
Β-Γ	Γ	1/6

Αν είναι να αποφυλακιστούν οι Α-Β (πιθανότητα 1/3) ο φύλακας θα πει υποχρεωτικά τον Β. Ομοίως, αν πρόκειται να αποφυλακιστούν οι Α-Γ (πιθανότητα 1/3) ο φύλακας θα πει υποχρεωτικά τον Γ. Αν όμως, πρόκειται να αποφυλακιστούν οι Β-Γ (πιθανότητα 1/3) ο φύλακας μπορεί να πει τον Β (πιθανότητα 1/2) ή τον Γ (πιθανότητα 1/2). Άρα, στην περίπτωση Β-Γ δημιουργούνται 2 ισοπίθανα ενδεχόμενα με πιθανότητα εμφάνισης καθενός 1/6, έτσι ώστε ή το ένα ή το άλλο να εμφανίζονται με πιθανότητα 1/6 + 1/6 = 1/3. Άρα, η πιθανότητα να αποφυλακιστεί παραμένει 2/3=1/3+1/3, ακόμα και αν μάθει το όνομα του ενός από τους άλλους δύο που αποφυλακίζεται.

Ορισμός 1.4.8 Θεωρούμε ένα συνεχή δειγματικό χώρο Ω οριζομενο σε μία περιοχή του μονοδιάστατου ή διδιάστατου ή τριδιάστατου ευκλείδιου χώρου στην οποία οποιεσδήποτε στοιχειώσεις περιοχές είναι εξίσου πιθανές δηλαδή ισοπίθανες. Έστω επίσης ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α που ορίζεται από μία υποπεριοχή του δειγματικού χώρου Ω. Η πιθανότητα του Α δίνεται από τη σχέση $P(A)=\dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ όπου $\mu(A)$ και $\mu(\Omega)$ είναι το μέτρο (μήκος ή έμβαδό ή όγκος) των περιοχών Α και Ω.

- **Παράδειγμα 1.4.18** **Σε ένα παιχνίδι με βελάκια ο παίκτης έχει να επιλέξει ανάμεσα σε δυο στόχους Α και Β. Με ποια επιλογή έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να πετύχει τον γραμμοσκιασμένο στόχο;**



ΛΥΣΗ

- Τι πιστεύετε ????

ΛΥΣΗ

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα επιτυχίας στο στόχο Α, P(A) θα πρέπει πρώτα να βρούμε το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά α, Ε(Ω) και το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου με ακτίνα α/2, Ε(Α).

$$E(\Omega) = \alpha^2 \quad \text{και} \quad E(A) = \pi R^2 = \pi \frac{\alpha^2}{4}$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $P(A) = \frac{E(A)}{E(\Omega)} = \frac{\pi}{4}$

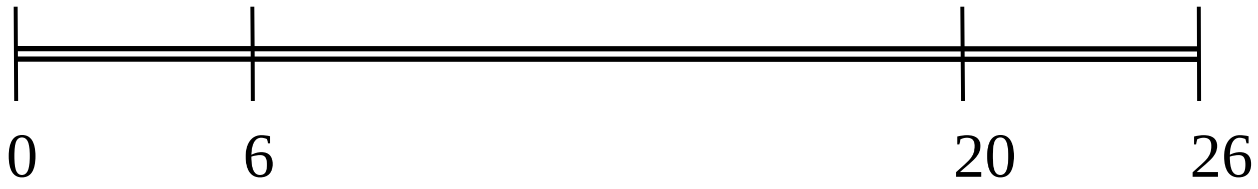
Για το δεύτερο στόχο Β, το εμβαδόν του τετράγωνου πλαισίου είναι το ίδιο (α^2) ενώ το εμβαδόν των τεσσάρων ίσων κύκλων με ακτίνα α/4 είναι: $E(B) = 4\pi \frac{\alpha^2}{16} = \pi \frac{\alpha^2}{4}$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $P(B) = \frac{E(B)}{E(\Omega)} = \frac{\pi}{4}$

Παράδειγμα 1.4.18 Αν σπάσουμε ένα μακαρόνι τύπου σπαγκέτι μήκους 26 εκ., τυχαία σε δυο κομμάτια, να υπολογιστεί η πιθανότητα το ένα κομμάτι να είναι μεγαλύτερο από 20 εκατοστά (του μέτρου).

Παράδειγμα 1.4.18 Αν σπάσουμε ένα μακαρόνι τύπου σπαγκέτι μήκους 26 εκ., τυχαία σε δυο κομμάτια, να υπολογιστεί η πιθανότητα το ένα κομμάτι να είναι μεγαλύτερο από 20 εκατοστά (του μέτρου).

Έστω ότι το σημείο που σπάμε το μακαρόνι είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος (0,26). Για να είναι το ένα κομμάτι μεγαλύτερο από 20 εκατοστά θα πρέπει το μακαρόνι να σπάσει είτε στα 6 πρώτα εκατοστά (0,6) είτε στα 6 τελευταία (20,26).

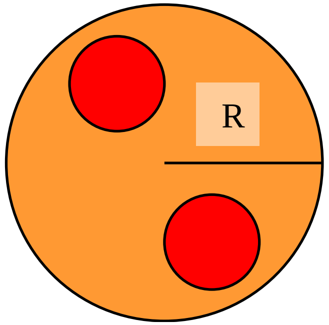


Άρα η ζητούμενη πιθανότητα με δεδομένα τα μήκη των αντίστοιχων διαστημάτων είναι: $P(E) = \dfrac{6+6}{26} = \dfrac{6}{13} = 0{,}4615$ περίπου 46%.

Παράδειγμα 1.4.18

- Η Εύη αποφασίζει να ζωγραφίσει δυο ίσους κόκκινους κύκλους ακτίνας r, οι οποίοι να μην τέμνονται, πάνω στο στρογγυλό τραπέζι του σαλονιού που έχει ακτίνα R. Καθώς η Εύη σκύβει να θαυμάσει το έργο της, το μικρό σκουλαρίκι που έχει στην μύτη της πέφτει πάνω στο τραπέζι.
- (i) Ποια η πιθανότητα το σκουλαρίκι να πέσει μέσα σε κάποιον από τους φρεσκοβαμμένους κύκλους;
- (ii) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της πιθανότητας στο ερώτημα (i) και για ποια τιμή r της ακτίνας των κόκκινων κύκλων επιτυγχάνεται αυτή;

Παράδειγμα 1.4.18



Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας

Ορισμός 1.6.1 Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος. Σε κάθε ενδεχόμενο A του Ω αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό $P(A)$ (που τον ονομάζουμε **πιθανότητα του A**) τέτοιον ώστε:

i. $P(A) \geq 0$ για κάθε ενδεχόμενο A του Ω

ii. $P(\Omega) = 1$ **(κανονικοποίηση)**

iii. $P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, για οποιαδήποτε ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ τα οποία είναι ασυμβίβαστα ανά δύο.

Παρατηρήσεις

- Η προσθετική ιδιότητα στον ορισμό της πιθανότητας ισχύει για οποιοδήποτε πλήθος ενδεχόμενων του Ω ξένων μεταξύ τους.
- Όταν δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα έχουν ίδια πιθανότητα εμφάνισης ονομάζονται **ισοπίθανα ενδεχόμενα**.
- ***Παράδειγμα 1***
- Τα αποτελέσματα της ρίψης ενός συμμετρικού ζαριού συνθέτουν ένα σύνολο έξι ισοπίθανων ενδεχόμενων Ω={1,2,3,4,5,6} με πιθανότητα εμφάνισης:
  - $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$.

Παρατηρήσεις

- .
- ***Παράδειγμα 2***
- Τα αποτελέσματα της ρίψης ενός συμμετρικού κύβου που έχει 3 πράσινες, 2 κόκκινες και μία κίτρινη πλευρά ***δεν είναι ισοπίθανα*** ενδεχόμενα αλλά P(Πράσινο)=3/6, P(Κόκκινο) = 2/6 και P(Κίτρινο) = 1/6.

Παράδειγμα

Αν $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης για το οποίο ισχύει $P(2) = 2P(1)$ καθώς και $P(\kappa) = 1/\kappa$ για κάθε $\kappa \in \Omega$ με $\kappa > 2$, ποιες είναι οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω;

Παράδειγμα $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$, $P(2) = 2P(1)$ καθώς και $P(\kappa) = 1/\kappa$, $\kappa \in \Omega$ με $\kappa > 2$

Παράδειγμα **$\Omega = \{1,2,3,4,5\}$, $P(2) = 2P(1)$ καθώς και $P(\kappa) = 1/\kappa$, $\kappa \in \Omega$ με $\kappa > 2$**

<u>ΛΥΣΗ</u> Ισχύει ότι

$$P(\Omega) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1$$

$$P(1) + 2P(1) + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 1 \Leftrightarrow 3P(1) = \frac{13}{60} \Leftrightarrow P(1) = \frac{13}{180}$$

Επομένως, $P(1) = \dfrac{13}{180}$, $P(2) = \dfrac{26}{180}$, $P(3) = \dfrac{1}{3}$, $P(4) = \dfrac{1}{4}$, $P(5) = \dfrac{1}{5}$

Επαληθεύουμε αθροίζοντας τις πιθανότητες όλων των ενδεχόμενων:

$$\frac{13}{180} + \frac{26}{180} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{13}{180} + \frac{26}{180} + \frac{60}{180} + \frac{45}{180} + \frac{36}{180} = \frac{180}{180} = 1.$$

- $$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).}$$

- . $$\boxed{P(A')=P\left(A^{c}\right)=1-P(A).}$$

$$\boxed{P(\varnothing)=0,\quad P(\Omega)=1}$$

$$P(A\cup B\cup \Gamma)=P[A]+P[B]-P[A\cap B]+P[\Gamma]-P[(A\cap \Gamma)]-P[(B\cap \Gamma)]+P[(A\cap B\cap \Gamma)]$$

i. $P(A\text{-}B) = P(A\cap B^{c}) = P(A) - P(A\cap B)$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(A^{c}\cap B)$$

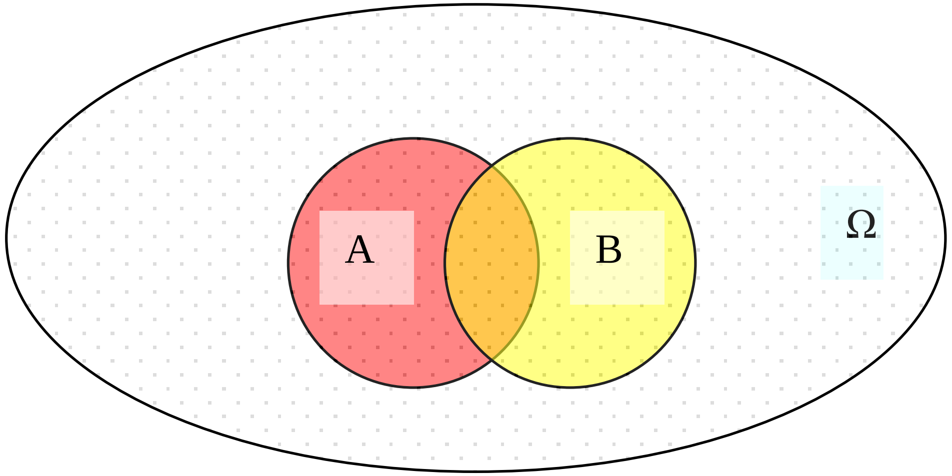
$$\boxed{P(A') = P\left(A^{c}\right) = 1 - P(A).}$$

$$\boxed{A^{c} \cup A = \Omega}$$

$$\boxed{P\left(A^{c} \cup A\right) = P(\Omega) \Rightarrow P(A) + P\left(A^{c}\right) - P\left(A^{c} \cap A\right) = P(\Omega)}$$

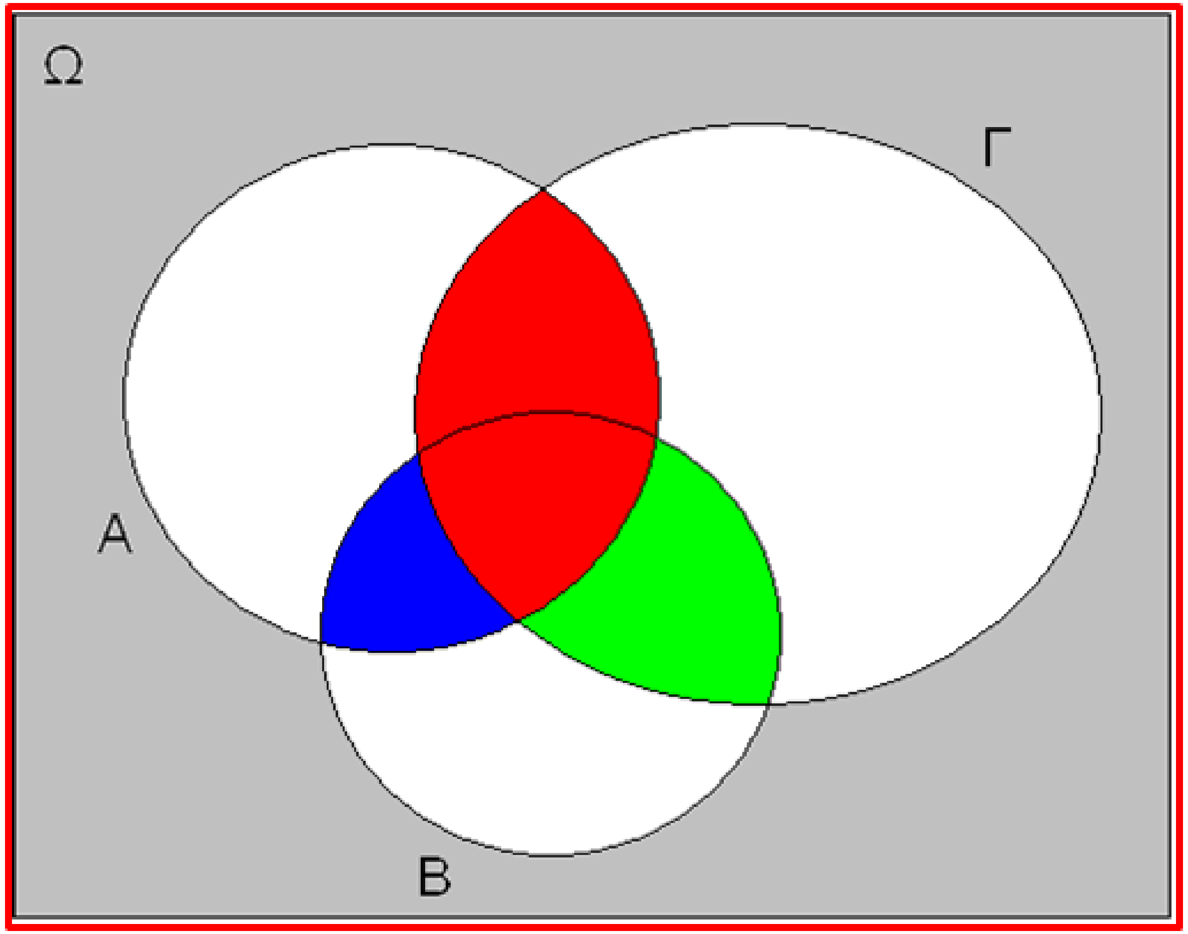
$$\boxed{\Rightarrow P(A) + P\left(A^{c}\right) - 0 = 1}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



•

i. $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)$



Παράδειγμα 1.6.9

- Στο τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων υπάρχουν 500 τεταρτοετείς που χρωστάνε μαθήματα από προηγούμενα έτη, οι 186 χρωστάνε την Μαθηματική ανάλυση 1 (μάθημα πρώτου έτους), οι 295 χρωστάνε Στατιστική (μάθημα δεύτερου έτους), οι 329 Εφαρμογές Ψηφιακών μέσων στην εκπαίδευση (μάθημα τρίτου έτους), ενώ οι 63 χρωστάνε Μαθηματική ανάλυση 1 και Στατιστική, 83 χρωστάνε Μαθηματική ανάλυση 1 Εφαρμογές Ψηφιακών μέσων στην εκπαίδευση, και 217 φοιτητές χρωστάνε Στατιστική και Εφαρμογές Ψηφιακών μέσων στην εκπαίδευση. Επιλέγουμε τυχαία ένα φοιτητή από τους 500 φοιτητές. Να υπολογιστεί:
- i) η πιθανότητα να χρωστάει Μαθηματική ανάλυση 1, Στατιστική και Εφαρμογές Ψηφιακών μέσων στην εκπαίδευση;
- ii) η πιθανότητα να χρωστάει μόνο Εφαρμογές Ψηφιακών μέσων στην εκπαίδευση;

Απάντηση Έστω Α το ενδεχόμενο κάποιος φοιτητής να χρωστάει Μαθηματική ανάλυση 1, Β το ενδεχόμενο κάποιος φοιτητής να χρωστάει Στατιστική, Γ το ενδεχόμενο κάποιος φοιτητής να χρωστάει Εφαρμογές Ψηφιακών μέσων στην εκπαίδευση. Τότε από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε ότι

- $P(A)=\frac{186}{500}$, $P(B)=\frac{295}{500}$, $P(\Gamma)=\frac{329}{500}$, $P(A\cap B)=\frac{63}{500}$, $P(A\cap\Gamma)=\frac{83}{500}$, $P(B\cap\Gamma)=\frac{217}{500}$, $P(A\cup B\cup\Gamma)=1$,

αφού αναφερόμαστε σε 500 φοιτητές που χρωστάνε μαθήματα προηγούμενων ετών.Επομένως οι ζητούμενες πιθανότητες υπολογίζονται ως εξής

i) από τις ιδιότητες των πιθανοτήτων έχουμε

$$P(A\cup B\cup\Gamma)=P[A]+P[B]-P[A\cap B]+P[\Gamma]-P[(A\cap\Gamma)]-P[(B\cap\Gamma)]+P[(A\cap B\cap\Gamma)]\Rightarrow$$

$$P[(A\cap B\cap\Gamma)]=P(A\cup B\cup\Gamma)-\left(P[A]+P[B]-P[A\cap B]+P[\Gamma]-P[(A\cap\Gamma)]-P[(B\cap\Gamma)]\right)\Rightarrow$$

$$P[(A\cap B\cap\Gamma)]=P(A\cup B\cup\Gamma)-P[A]-P[B]-P[\Gamma]+P[A\cap B]+P[(A\cap\Gamma)]+P[(B\cap\Gamma)]\Rightarrow$$

$$P[(A\cap B\cap\Gamma)]=1-\frac{186}{500}-\frac{295}{500}-\frac{329}{500}+\frac{63}{500}+\frac{83}{500}+\frac{217}{500}=\frac{53}{500}.$$

ii) Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(\Gamma\cap A^c\cap B^c)$. Από το διάγραμμα Venn η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(\Gamma\cap A^c\cap B^c)=P(\Gamma)-P(\Gamma\cap A)-P(\Gamma\cap B)+P(\Gamma\cap A\cap B)=\frac{329}{500}-\frac{83}{500}-\frac{217}{500}+\frac{53}{500}=\frac{82}{500}.$$

Παράδειγμα 1.6.14

- Σε μια πόλη εκδίδονται δύο εφημερίδες, η Α και η Β. Το 25% των κατοίκων διαβάζει την εφημερίδα Α, το 15% την Β και το 5% και τις δύο. Ποια είναι η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος κάτοικος: i) να διαβάζει τουλάχιστον μία εφημερίδα; ii) να διαβάζει μία εφημερίδα; iii) να μην διαβάζει εφημερίδα;

Απάντηση Ορίζονται τα εξής ενδεχόμενα:

- A: κάτοικοι που διαβάζουν την εφημερίδα Α, Β: κάτοικοι που διαβάζουν την εφημερίδα Β
- Γ: κάτοικοι που δεν διαβάζουν εφημερίδα

Οι ζητούμενες πιθανότητες υπολογίζονται ως εξής:

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 25\% + 15\% - 5\% = 35\%$

(ii) $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 35\% - 5\% = 30\%$

(iii) $P(\Gamma) = P(A \cup B)^c = 1 - 35\% = 65\%$

Παρατήρηση: Το ερώτημα μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:
Να υπολογιστεί:
(i) το ποσοστό των κατοίκων που διαβάζουν τουλάχιστον μία εφημερίδα.
(ii) το ποσοστό των κατοίκων που διαβάζουν μία εφημερίδα.
(iii) το ποσοστό των κατοίκων που δεν διαβάζουν εφημερίδα.

Παράδειγμα για εξάσκηση (5 minutes)

1. **Εκατό φοιτητές εξετάστηκαν στα Μαθηματικά και στην Στατιστική την εξεταστική περίοδο του Σεπτεμβρίου. Δεκαπέντε από αυτούς απέτυχαν στην Στατιστική και 10 απέτυχαν στα Μαθηματικά. Μετά την διασταύρωση των αποτελεσμάτων στην Μηχανοργάνωση, βρέθηκε επίσης ότι 5 απέτυχαν και στα δύο. Να υπολογιστεί η πιθανότητα:**

(i) Ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής να απέτυχε στη Στατιστική και να πέρασε τα Μαθηματικά.

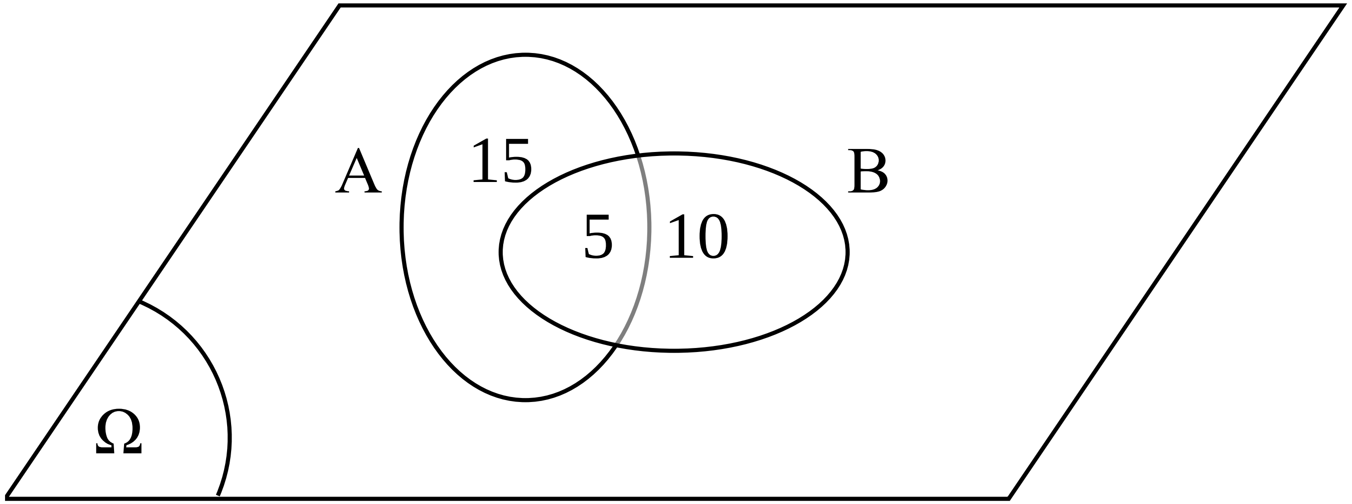
(ii) Να απέτυχε στα Μαθηματικά και να πέρασε τη Στατιστική.

ΛΥΣΗ

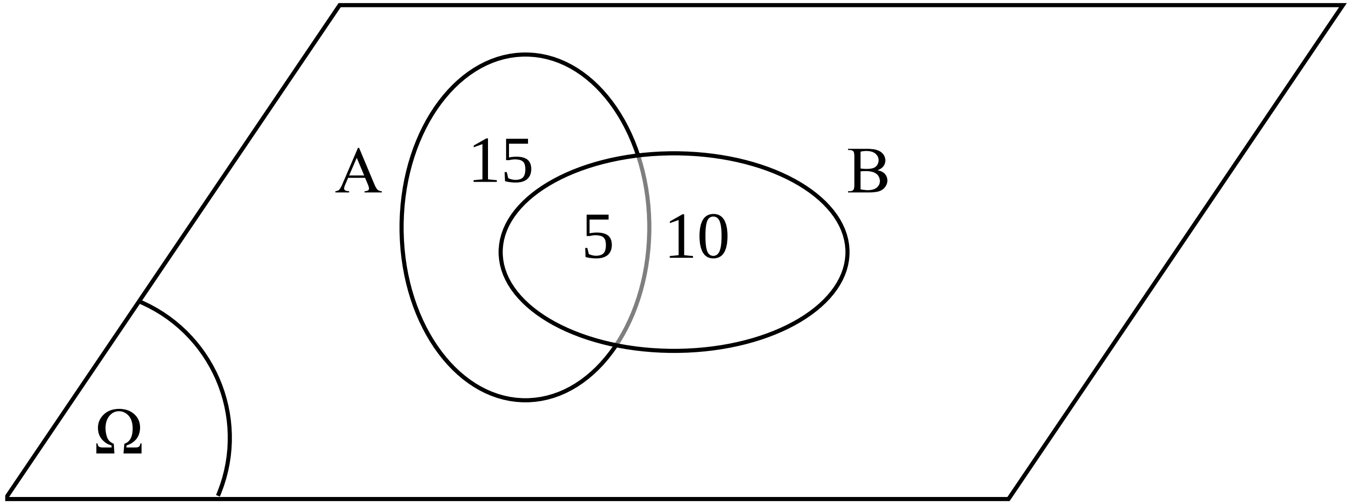
- ????

ΛΥΣΗ

Ορίζονται τα σύνολα Α: φοιτητές που απέτυχαν στην Στατιστική, Β: φοιτητές που απέτυχαν στα Μαθηματικά και Ω: όλοι οι φοιτητές που εξετάστηκαν, τα οποία παρουσιάζονται διαγραμματικά ως εξής:



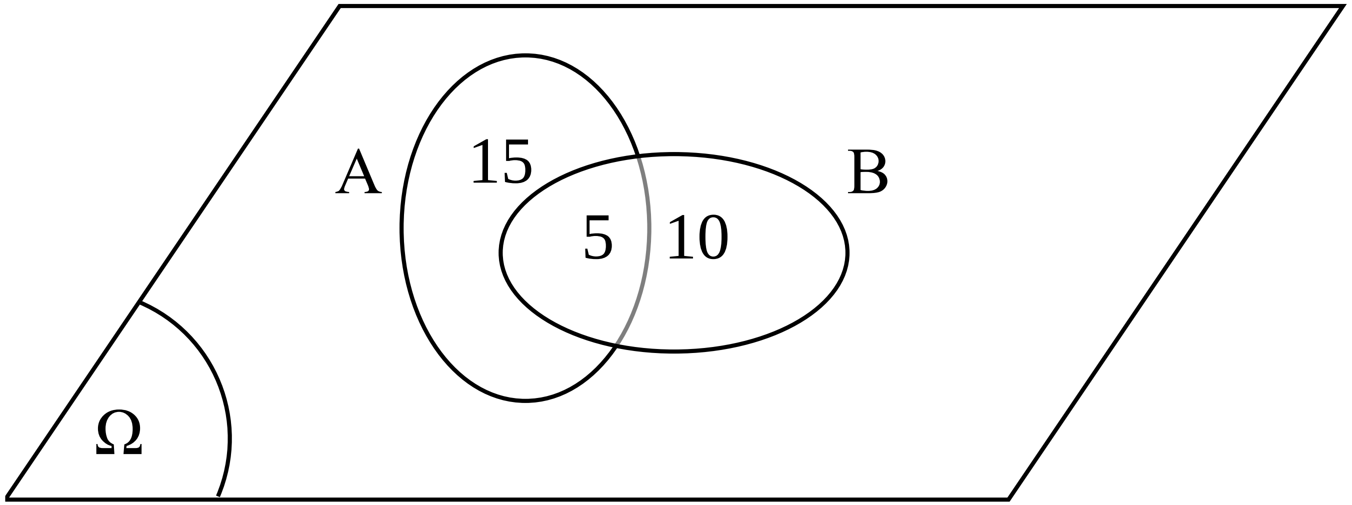
Ορίζονται τα σύνολα Α: φοιτητές που απέτυχαν στην Στατιστική, Β: φοιτητές που απέτυχαν στα Μαθηματικά και Ω: όλοι οι φοιτητές που εξετάστηκαν, τα οποία παρουσιάζονται διαγραμματικά ως εξής:



(i) Ανάμεσα στους 15 που απέτυχαν στην Στατιστική (σύνολο Α) βρίσκονται και οι 5 που απέτυχαν και στα Μαθηματικά. Άρα για να βρούμε αυτούς που απέτυχαν στη Στατιστική μόνο, αφαιρούμε από τους δεκαπέντε τους πέντε που απέτυχαν και στα δυο μαθήματα. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\boxed{P(A\text{-}B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{10}{100} = 10\%}$$

Ορίζονται τα σύνολα Α: φοιτητές που απέτυχαν στην Στατιστική, Β: φοιτητές που απέτυχαν στα Μαθηματικά και Ω: όλοι οι φοιτητές που εξετάστηκαν, τα οποία παρουσιάζονται διαγραμματικά ως εξής:



ii) Ανάμεσα στους δέκα που απέτυχαν στα Μαθηματικά (σύνολο Β) βρίσκονται και οι πέντε που απέτυχαν και στην Στατιστική. Άρα για να βρούμε αυτούς που απέτυχαν μόνο στα Μαθηματικά, αφαιρούμε από τους δέκα τους πέντε που απέτυχαν και στα δυο. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\boxed{P(B\text{-}A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{100} = 5\%.}$$

Παράδειγμα για εξάσκηση (7 minutes)

Δευτέρα πρωί ένας αριθμός φοιτητών του τμήματος Δημόσιας Διοίκησης παρακολουθεί το μάθημα Στατιστική ΙΙ. Στο διάλειμμα συζητάνε για το Σαββατοκύριακο και η Αλεξάνδρα που της αρέσουν οι αριθμοί καταγράφει ότι το 70% των φοιτητών βγήκε για ποτό το Σαββατόβραδο, το 30% πήγε κινηματογράφο, ενώ το 10% μετά τον κινηματογράφο πήγε και για ποτό. Τέσσερις φοιτητές έμειναν σπίτι το Σαββατόβραδο. Πόσους φοιτητές είχε η τάξη εκείνο το πρωί;

Παράδειγμα για εξάσκηση (7 minutes)

?????

Παράδειγμα για εξάσκηση (7 minutes)

- <u>ΛΥΣΗ Θεωρούμε τα παρακάτω ενδεχόμενα</u>

- Έστω Α οι φοιτητές που πήγαν για ποτό και
- Β οι φοιτητές που πήγαν κινηματογράφο

Παράδειγμα για εξάσκηση (7 minutes)

- ΛΥΣΗ Θεωρούμε τα παρακάτω ενδεχόμενα

- Έστω A οι φοιτητές που πήγαν για ποτό και
- B οι φοιτητές που πήγαν κινηματογράφο
- **Τότε** $P(A) = 70\%$, $P(B) = 30\%$ και $P(A \cap B) = 10\%$.

Παράδειγμα για εξάσκηση (7 minutes)

- ΛΥΣΗ Θεωρούμε τα παρακάτω ενδεχόμενα

_Έστω Α οι φοιτητές που πήγαν για ποτό και Β οι φοιτητές που πήγαν κινηματογράφο.

- **Τότε** $P(A) = 70\%$, $P(B) = 30\%$ και $P(A \cap B) = 10\%$.
- Οι φοιτητές που βγήκαν έξω το Σαββατόβραδο συνιστούν το σύνολο $A \cup B$ με πιθανότητα (συχνότητα) **$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)=90\%$.**
- Αυτοί που έμειναν σπίτι συνιστούν το σύνολο $(A \cup B)^c$ με συχνότητα - πιθανότητα $P(A \cup B)^c= 1–0{,}90=0{,}10$, αντιπροσωπεύουν το 10% των φοιτητών και είναι σε απόλυτο αριθμό τέσσερις (4). Άρα αναλογικά το 100% είναι 40 φοιτητές.

Βασικές αρχές απαρίθμησης

- **συνδυαστική ανάλυση ή απλά συνδυαστική**
- Υποθέτουμε ότι ισχύουν δύο προυποθέσεις:
- Η διαδικασία της απαρίθμησης μπορεί να χωριστεί σε k διαφορετικές φάσεις (βήματα) οι οποίες πρέπει να εκτελεστούν διαδοχικά η μία μετά την άλλη,
- Το πλήθος των δυνατών επιλογών σε κάθε φάση είναι πληθος καθορισμένο όταν είναι γνωστά τα αποτελέσματα όλων των προηγούμενων φάσεων.

πολλαπλασιαστική αρχή ή αρχή του πολλαπλασιασμού

Πρόταση 2.2.1 **Κανόνας του Πολλαπλασιασμού** **(multiplication principle)** Αν μία διαδικασία αποτελείται από k βήματα και το πρώτο βήμα μπορεί να γίνει με n_1 τρόπους, το δεύτερο βήμα μπορεί να γίνει με n_2 τρόπους, (ανεξάρτητα από το πώς έγινε το πρώτο βήμα)

$$\vdots$$

το k βήμα μπορεί να γίνει με n_k τρόπους, (ανεξάρτητα από το πώς έγιναν τα προηγούμενα βήματα)

Τότε όλη η διαδικασία μπορεί να γίνει με $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ τρόπους.

πολλαπλασιαστική αρχή ή αρχή του πολλαπλασιασμού

- **Παράδειγμα 2.2.1** Να βρεθεί το πλήθος των περιττών τριψήφιων αριθμών που έχουν ψηφία 1, 3, 6, 7 ή 8 και

    i) Μπορούν να έχουν ίδια ψηφία

    ii)Έχουν όλα τα ψηφία διαφορετικά

πολλαπλασιαστική αρχή ή αρχή του πολλαπλασιασμού

i) Θεωρούμε ως τρεις φάσεις την απαρίθμηση των τριψήφιων ως προς το 1ο, 2ο και 3ο ψηφίο. Επειδή επιτρέπεται επανάληψη των ψηφίων οι τριες φάσεις θεωρούνται ανεξάρτητες. Το 1ο ψηφίο μπορεί να πάρει 5 διαφορετικές τιμές δηλαδή η απαρίθμηση στην πρώτη φάση δίνει αποτέλεσμα 5. Ομοίως και στη δεύτερη φάση έχουμε αποτέλεσμα 5 ενώ στην τρίτη φάση έχουμε 3 γιατί το τρίτο ψηφίο πρέπει να είναι απαραίτητα περιττό και άρα παίρνει μόνο 3 τιμές (τις 1,3,7) Συμβολικά μπορούμε να γράψουμε

1ο ψηφίο	2ο ψηφίο	3Ο ψηφίο
5	5	3

Επομένως λόγω της πολλαπλασιαστικής αρχής συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$ **αριθμοί.**

πολλαπλασιαστική αρχή ή αρχή του πολλαπλασιασμού

ii) Θεωρούμε τις ίδιες φάσεις όπως και στοερώτημα i) και τότε για την 3η φάση δεν ικανοποιείται η προυπόθεση που υπήρχε στο ερώτημα i). Πράγματι το αποτέλεσμα της 3ης φάσης θα ήταν 3 αν στα δύο πρώτα ψηφία δεν υπάρχει περιττός αριθμός, 2 αν στα δύο πρώτα ψηφία υπάρχει ακριβώς ένας περιττός και 1 αν και τα δύο πρώτα ψηφία είναι περιττά. Αν όμως θεωρήσουμε ως 1η φάση την απαρίθμηση ως προς το τρίτο ψηφίο τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την βασική αρχή απαρίθμησης. Συμβολικά έχουμε

3ο ψηφίο	1ο ψηφίο	2Ο ψηφίο
5	4	3

όπου για την απαρίθμηση στη 2η φάση λαμβάνουμε υπόψη ότι από τα 5 ψηφία που έχουμε το ένα χρησιμοποιήθηκε ως 3ο ψηφίο και άρα μένουν μόνο 4 δυνατότητες για το 1ο ψηφίο. Ανάλογα μένουν μόνο 3 δυνατότητες για το 2ο ψηφίο. Επομένως έχουμε συνολικά $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ περιττούς τριψήφιους με διαφορετικά ψηφία.

Πρόταση 2.2.2 Κανόνας του Πολλαπλασιασμού Αν το αντικείμενο (στοιχείο) a_1 μπορεί να επιλεγεί με n_1 διαφορετικούς τρόπους και για κάθε επιλογή του a_1, το αντικείμενο a_2 μπορεί να επιλεγεί με n_2 διαφορετικούς τρόπους,...,και για κάθε επιλογή των αντικειμένων $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ το στοιχείο a_k μπορεί αν επιλεγεί με n_k διαφορετικούς τρόπους τότε όλα τα αντικείμενα $a_1, a_2, \ldots, a_k$ μπορούν να επιλεγούν διαδοχικά και με αυτή τη σειρά με $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ τρόπους.

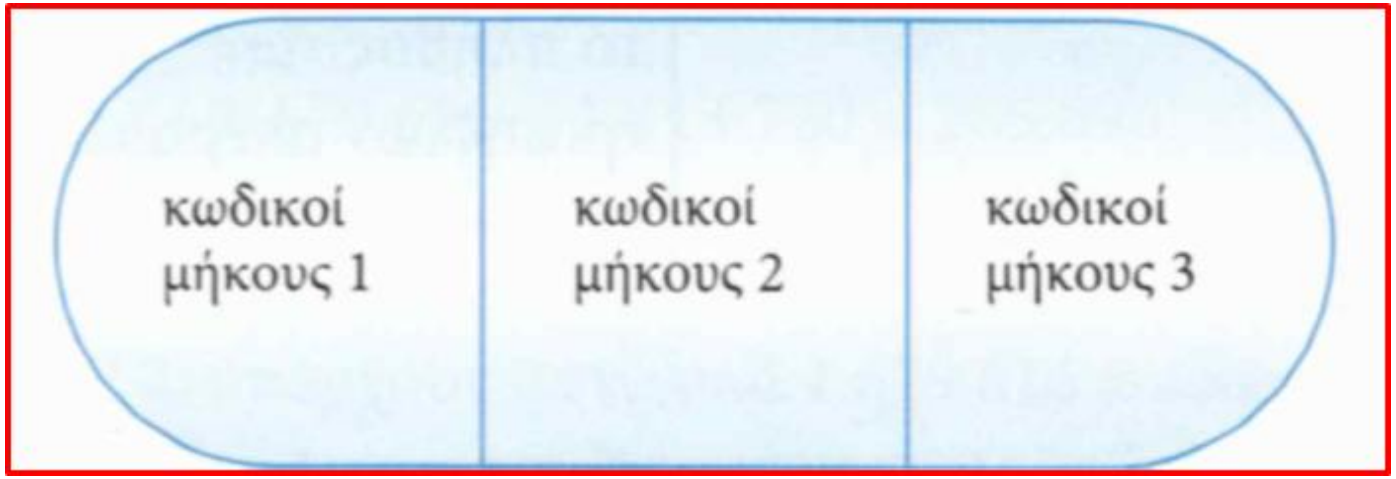
Πρόταση 2.2.4 (Κανόνας της πρόσθεσης) (addition principle) Υποθέτουμε ότι ένα πεπερασμένο σύνολο A ισούται με την ένωση k διακριτών και αμοιβαία ξένων υποσυνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Τότε ισχύει ότι $N(A) = N(A_1) + N(A_2) + \cdots + N(A_k)$. Ισοδύναμα το πληθος των στοιχείων μίας ένωσης αμοιβαία ξένων πεπερασμένων συνόλων ισούται με το άθροισμα του πλήθους των στοιχείων κάθε συνόλου.

Παράδειγμα 2.2.4

- Ένας κωδικός πρόσβασης σε υπολογιστή αποτελείται από ένα έως τρία γράμματα που επιλέγονται από 26 γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου. Πόσοι διαφορετικοί κωδικοί πρόσβασης υπάρχουν **αν επιτρέπονται οι επαναλήψεις**;

Παράδειγμα 2.2.4

- Το σύνολο όλων των κωδικών μπορεί να χωριστεί σε τρία υποσύνολα αποτελούμενα από τους κωδικού μήκους 1, μήκους 2, και μήκους 3 όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παράδειγμα 2.2.4

- Από τον κανόνα της προσθεσης το συνολικό πλήθος κωδικών ισούται με το πλήθος των κωδικών μήκους 1 συν το πλήθος των κωδικών μήκους 2 συν το πλήθος των κωδικών μήκους 3. Τώρα
  - Το πλήθος των κωδικών μήκους 1 είναι ίσο με 26 (διότι υπάρχουν 26 γράμματα στο αγγλικό αλφάβητο)
  - Το πλήθος των κωδικών μήκους 2 είναι ίσο με 26^2 (διότι ο σχηματισμός μία τέτοιας λέξης είναι μία διαδικασία δύο βημάτων όπου κάθε βήμα μπορεί να εκτελεστεί με 26 τρόπους),
  - Το πλήθος των κωδικών μήκους 3 είναι ίσο με 26^3 (διότι ο σχηματισμός μία τέτοιας λέξης είναι μία διαδικασία τριών βημάτων όπου κάθε βήμα μπορεί να εκτελεστεί με 26 τρόπους),

  Άρα ο συνολικός αριθμός κωδικών πρόσβασής ισούται με $26^1+26^2+26^3$.

- **Δειγματοληψία χωρίς επανατοποθέτηση (without replacement):**
- **Δειγματοληψία με επανάθεση ή επανατοποθέτηση (with replacement):**

A) δειγματοληψία χωρίς επανατοποθέτηση (without replacement):

1) Διατάξεις n ανά k

Ορισμός 2.3.1 Ονομάζουμε **διατάξεις (arrangement) n ανά k** το πλήθος όλων των δυνατών ομάδων που αποτελούνται από k αντικείμενα τα οποία επιλέχθηκαν από συνολικά n αντικείμενα (k ≤ n) με κάποια συγκεκριμένη σειρά. (Την ομάδα την χαρακτηρίζει και η επιλογή και η σειρά) και συμβολίζονται με ${}_nP_k$ ή με $P(n,k)$. Οι **διατάξεις n ανά k** υπολογίζονται σύμφωνα με τον τύπο

$${}_n\mathrm{P}_k = \frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-\mathrm{k})!} = \mathrm{n}\cdot(\mathrm{n}-1)\cdot(\mathrm{n}-2)\cdots(\mathrm{n}-\mathrm{k}+1) \qquad \text{όπου} \quad \mathrm{n}! = 1\cdot 2\cdots \mathrm{n}, \text{ (n παραγοντικό).}$$

- $$4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 4*3! = 4*3*2!$$
- $$1! = 1$$

$$0! = 1$$

$$n! = 123...n$$

$$n! = n(n-1)!$$

’

1. **Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να απονεμηθούν τα μετάλλια (χρυσό, αργυρό, χάλκινο) στους 8 αθλητές στίβου του τελικού των 100 μέτρων;**

1 , 2, 3

ΛΥΣΗ

Το χρυσό μετάλλιο μπορεί να δοθεί σε έναν από τους οκτώ αθλητές, το αργυρό σε έναν από τους υπόλοιπους επτά και το χάλκινο σε έναν από τους έξι εναπομείναντες, άρα συνολικά με $8{\cdot}7{\cdot}6 = 336$ διαφορετικούς τρόπους.

Ουσιαστικά, λοιπόν, ζητείται το πλήθος των δυνατών διατάξεων 8 αθλητών σε 3 διακριτές θέσεις που είναι:

$$ {}_8P_3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot} = 6{\cdot}7{\cdot}8 = 336. $$

A) δειγματοληψία χωρίς επανατοποθέτηση (without replacement):

2) Μεταθέσεις

Ορισμός 2.3.4 **Μεταθέσεις** **(permutation)** ονομάζουμε το πλήθος των ομάδων που προκύπτουν από όλες τις δυνατές μεταθέσεις n αντικειμένων, συμβολίζονται με ${}_{n}P_{n} = n!$

Παράδειγμα

Πέντε άνδρες και τέσσερις γυναίκες γεμίζουν την πρώτη σειρά ενός μικρού θεάτρου. **Οι γυναίκες κάθονται στις ζυγές θέσεις.** Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν τα 9 αυτά άτομα στη συγκεκριμένη σειρά;

Οι άνδρες μπορούν να καθίσουν κατά ${}_5P_5 = 5!$ διαφορετικούς τρόπους στις θέσεις με περιττό αριθμό και οι γυναίκες κατά ${}_4P_4 = 4!$ διαφορετικούς τρόπους σε αυτές με ζυγό αριθμό.

♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

Κάθε μια διάταξη ανδρών μπορεί να συνδυαστεί με όλες τις πιθανές διατάξεις γυναικών και σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή ο ζητούμενος αριθμός διατάξεων είναι : ${}_5P_5 \cdot {}_4P_4 = 5!4! = (120)(24) = 2.880$.

Παράδειγμα

1. **Πριν την έναρξη ενός ποδοσφαιρικού αγώνα οι 11 ποδοσφαιριστές φωτογραφίζονται στον αγωνιστικό χώρο, 6 όρθιοι και 5 καθιστοί.**

(i) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί αυτό να γίνει;

(ii) Αν ο τερματοφύλακας φωτογραφίζεται πάντα όρθιος, πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν;

- .

$$P_6^{11} = \frac{11!}{5!}$$

$$P_5^5 = 5!$$

(i) Οι διαφορετικοί τρόποι που μπορούν οι ποδοσφαιριστές να φωτογραφηθούν προκύπτουν από την εξής διαδικασία: Επιλέγουμε τους 6 από τους 11 που θα φωτογραφηθούν όρθιοι με όλες τις πιθανές διατάξεις ($_{11}P_6$). Στην συνέχεια για κάθε μία από αυτές τις διατάξεις των 6 ορθίων μπορούμε να μεταθέτουμε τους υπόλοιπους 5 που θα είναι καθιστοί με 5! τρόπους. Άρα συνολικά θα έχουμε

$$\frac{11!}{5!}\cdot 5! = 11! = 39.916.800$$

τρόπους να φωτογραφηθούν οι ποδοσφαιριστές. Παρατηρούμε ότι ο συνολικός αριθμός τους ήταν απλά οι μεταθέσεις των 11 ποδοσφαιριστών.

(i) Εάν ο τερματοφύλακας έχει μία θέση ανάμεσα στους όρθιους τότε οι υπόλοιποι 10 μπορούν να φωτογραφηθούν (5 όρθιοι και 5 καθιστοί) με 10! = 3.628.800 τρόπους. Ο τερματοφύλακας μπορεί να σταθεί σε μία από τις 6 θέσεις των ορθίων άρα συνολικά θα έχουμε

$$6 \cdot 10! = 21.772.800$$

διαφορετικούς τρόπους να φωτογραφηθούν οι 11 ποδοσφαιριστές.

Παράδειγμα 2.3.2

- **i)** Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να επιλεγούν τρία από τα γράμματα της λέξης BYTES και να γραφούν σε μία γραμμή; ii) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει το ίδιο ερώτημα αν το πρώτο γράμμα πρέπει να είναι το B;

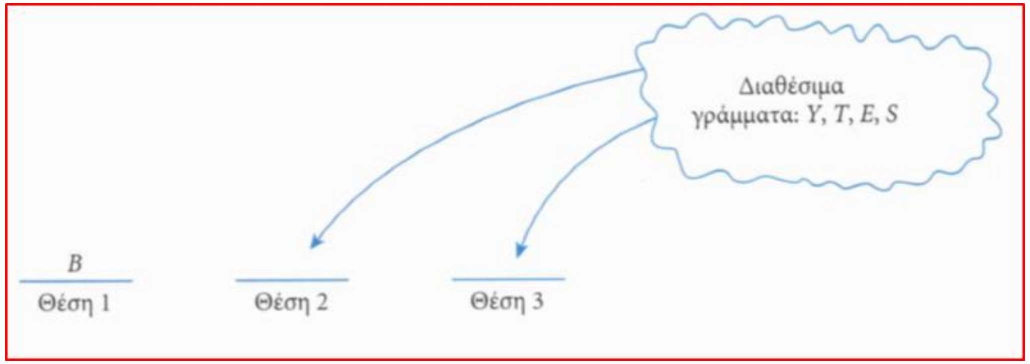
Παράδειγμα 2.3.2

i) Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα ισούται με τον αριθμό των 3-μεταθέσεων ενός συνόλου πέντε στοιχείων. Αυτό ισούται με ${}_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$

Παράδειγμα 2.3.2

i) Αφού το πρώτο γράμμα πρέπει να είναι το γράμμα B υπάρχουν μόνο δύο γράμματα που πρέπει να επιλεγούν και να τοποθετηθούν στις άλλες δύο θέσεις. Αφού το B χρησιμοποιείται στην πρώτη θέση υπάρχουν τέσσερα γράμματα διαθέσιμα για να συμπληρωθούν οι υπόλοιπες θέσεις. Επομένως η απάντηση στο ερώτημα είναι ο αριθμός των 2-μεταθέσεων ενός συνόλου τεσσάρων στοιχείων που είναι ίσος με

$$ {}_4P_2 = \frac{5!}{(4-2)!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} = 4\cdot 3 = 12 $$



3) Μεταθέσεις αντικειμένων διαφορετικών ειδών

Πρόταση 2.3.6 Το πλήθος των ομάδων που προκύπτουν από την διάταξη n αντικειμένων που διακρίνονται σε r υποομάδες όμοιων αντικειμένων $(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ με $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ δίνεται από τη σχέση, $\binom{n!}{n_1, n_2, \cdots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$. Άρα το $\binom{n!}{n_1, n_2, \cdots, n_r}$ αναπαριστά το **πλήθος όλων των δυνατών διαμερίσεων n διαφορετικών αντικειμένων σε r διαφορετικές ομάδες** με μεγέθη $n_1, n_2, \ldots, n_r$ αντίστοιχα. **Συμβολίζεται** επίσης και με τον παρακάτω τύπο: ${}_nP_{n_1, n_2, \cdots, n_r} = \binom{n!}{n_1, n_2, \cdots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$.

Παράδειγμα 2.3.4

- Πόσες διαφορετικές λέξεις μπορούν να σχηματιστούν (όχι απαραίτητα με νόημα) από τα 10 γράμματα της λέξης ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ; Ποια είναι η πιθανότητα, μία τυχαία διάταξη αυτών των 10 γραμμάτων να δώσει τη λέξη ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ;

Παράδειγμα 2.3.4

- Πόσες διαφορετικές λέξεις μπορούν να σχηματιστούν (όχι απαραίτητα με νόημα) από τα 10 γράμματα της λέξης ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ; Ποια είναι η πιθανότητα, μία τυχαία διάταξη αυτών των 10 γραμμάτων να δώσει τη λέξη ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ;

Απάντηση

Η λέξη ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ έχει 10 γράμματα: 2Σ 3Τ 2Ι 1Α 1Κ 1Η.Οι δυνατές μεταθέσεις των ομάδων διαφορετικών γραμμάτων είναι: ${}_{10}P_{2,3,2,1,1,1} = \dfrac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 151.200$.Άρα από τα 10 γράμματα της λέξης ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ μπορούν να σχηματιστούν 151.200 διαφορετικές λέξεις ενώ η πιθανότητα να σχηματιστεί η λέξη ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ (μία συγκεκριμένη λέξη-μετάθεση) είναι 1/151.200 = 0,0000066.

4) Συνδυασμοί n ανά k

Ορισμός 2.3.7 Ονομάζουμε **συνδυασμούς (combination)** n ανά k το πλήθος των ομάδων που προκύπτουν από την επιλογή k αντικειμένων από συνολικά n (k ≤ n) χωρίς να μας ενδιαφέρει η μεταξύ τους διάταξη (σειρά), ο συμβολισμός είναι ${}_nC_k, C_{n,k}, {}^nC_k$, ή $\binom{n}{k}$ ενώ ο τύπος υπολογισμού των συνδυασμών n ανά k είναι ο ακόλουθος

$${}_nC_k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Παράδειγμα

Ένας προπονητής ποδοσφαιρικής ομάδας έχει στη διάθεσή του **18 ποδοσφαιριστές από τους οποίους 2 είναι τερματοφύλακες, 6 αμυντικοί, 6 μέσοι και 4 επιθετικοί.** Ο προπονητής έχει να επιλέξει ανάμεσα σε τρία συστήματα, το 4-4-2 (4 αμυντικοί, 4 μέσοι, 2 επιθετικοί), το 3-5-2 και το 4-3-3. Με ποιο σύστημα έχει περισσότερες επιλογές στον καταρτισμό της ενδεκάδας;

- A. Αν ο προπονητής ακολουθήσει το 4-4-2 θα πρέπει να επιλέξει α) έναν από τους δύο τερματοφύλακες, β) τέσσερις από τους έξι αμυντικούς, γ) τέσσερις από τους έξι μέσους και δ) δύο από τους τέσσερις επιθετικούς. Άρα έχει:

$$2\cdot\binom{6}{4}\cdot\binom{6}{4}\cdot\binom{4}{2}=2\cdot\frac{6!}{4!\,2!}\cdot\frac{6!}{4!\,2!}\cdot\frac{4!}{2!\,2!}=2.700 \text{ επιλογές.}$$

Ομοίως, με το σύστημα 3-5-2 θα έχει:

$$2\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{6}{5}\cdot\binom{4}{2}=2\cdot\frac{6!}{3!\,3!}\cdot\frac{6!}{5!\,1!}\cdot\frac{4!}{2!\,2!}=1.440 \text{ επιλογές.}$$

Ενώ τέλος με το σύστημα 4-3-3 θα έχει:

$$2\cdot\binom{6}{4}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{4}{3}=2\cdot\frac{6!}{4!\,2!}\cdot\frac{6!}{3!\,3!}\cdot\frac{4!}{3!\,1!}=2.400 \text{ επιλογές.}$$

Παράδειγμα

1. **Μια επιτροπή αποτελείται από 2 μαθηματικούς και 3 φυσικούς, οι οποίοι επιλέγονται τυχαία από μία ομάδα 5 μαθηματικών και 7 φυσικών. Πόσες διαφορετικές επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν, εάν:**

(i) Κάθε μαθηματικός και κάθε φυσικός μπορεί να συμμετέχει στην επιτροπή;

(ii) Ένας συγκεκριμένος φυσικός πρέπει να συμμετέχει;

(iii) Δύο ορισμένοι μαθηματικοί δεν μπορούν να συμμετέχουν;

(iv) Δύο συγκεκριμένοι, ένας Μαθηματικός και ένας Φυσικός, που βρίσκονται στα δικαστήρια για ασήμαντη αφορμή, δεν μπορούν να συμμετέχουν στην ίδια επιτροπή;

Μια επιτροπή αποτελείται από 2 μαθηματικούς και 3 φυσικούς, οι οποίοι επιλέγονται τυχαία από μία ομάδα 5 μαθηματικών και 7 φυσικών. Πόσες διαφορετικές επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν, εάν:

(i) Κάθε μαθηματικός και κάθε φυσικός μπορεί να συμμετέχει στην επιτροπή;

Μια επιτροπή αποτελείται από 2 μαθηματικούς και 3 φυσικούς, οι οποίοι επιλέγονται τυχαία από μία ομάδα 5 μαθηματικών και 7 φυσικών. Πόσες διαφορετικές επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν, εάν:

(i) Κάθε μαθηματικός και κάθε φυσικός μπορεί να συμμετέχει στην επιτροπή;

(i) Εφ’ όσον δεν υπάρχουν περιορισμοί στη σύσταση της επιτροπής, οι 2 μαθηματικοί μπορούν να επιλεγούν από τους 5 με ${}_5C_2$ =10 διαφορετικούς τρόπους, ενώ οι 3 φυσικοί μπορούν να επιλεγούν από τους 7 με ${}_7C_3$ = 35 διαφορετικούς τρόπους. Άρα, σε αυτή την περίπτωση, ο αριθμός των διαφορετικών επιτροπών που μπορούν να σχηματιστούν είναι:

$${}_5C_2 \cdot {}_7C_3 = 10 \cdot 35 = 350$$

-
- .

$$ {}_{5}C_{2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{543!}{2!3!} = \frac{54}{2!} = 10 $$

Μια επιτροπή αποτελείται από 2 μαθηματικούς και 3 φυσικούς, οι οποίοι επιλέγονται τυχαία από μία ομάδα 5 μαθηματικών και 7 φυσικών. Πόσες διαφορετικές επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν, εάν:

(i)Ένας συγκεκριμένος φυσικός πρέπει να συμμετέχει;

Μια επιτροπή αποτελείται από 2 μαθηματικούς και 3 φυσικούς, οι οποίοι επιλέγονται τυχαία από μία ομάδα 5 μαθηματικών και 7 φυσικών. Πόσες διαφορετικές επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν, εάν:

(i)Ένας συγκεκριμένος φυσικός πρέπει να συμμετέχει;

(i) Οι 2 μαθηματικοί μπορούν να επιλεγούν από τους 5 με 10 διαφορετικούς τρόπους, όπως προηγουμένως. Εφ' όσον ένας συγκεκριμένος φυσικός πρέπει να συμμετέχει, οι άλλοι 2 που θα συμμετέχουν θα επιλεγούν από τους υπόλοιπους 6 κάτι που μπορεί να γίνει με ${}_6C_2$ = 15 διαφορετικούς τρόπους Άρα, ο αριθμός των διαφορετικών επιτροπών που μπορούν να σχηματιστούν είναι:

$${}_5C_2 \cdot {}_6C_2 = 10 \cdot 15 = 150.$$

Μια επιτροπή αποτελείται από 2 μαθηματικούς και 3 φυσικούς, οι οποίοι επιλέγονται τυχαία από μία ομάδα 5 μαθηματικών και 7 φυσικών. Πόσες διαφορετικές επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν, εάν:

(i)\Δύο ορισμένοι μαθηματικοί δεν μπορούν να συμμετέχουν;

Μια επιτροπή αποτελείται από 2 μαθηματικούς και 3 φυσικούς, οι οποίοι επιλέγονται τυχαία από μία ομάδα 5 μαθηματικών και 7 φυσικών. Πόσες διαφορετικές επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν, εάν:

(i)\Δύο ορισμένοι μαθηματικοί δεν μπορούν να συμμετέχουν;

(i) Εφ' όσον 2 συγκεκριμένοι μαθηματικοί δεν μπορούν να συμμετέχουν στην επιτροπή, οι 2 μαθηματικοί που θα μπουν τελικά στην επιτροπή θα πρέπει να επιλεγούν από τους 3 που απομένουν. Έτσι η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει με ${}_3C_2$ διαφορετικούς τρόπους. Οι 3 φυσικοί μπορούν να επιλεγούν (χωρίς περιορισμούς) από τους 7 με ${}_7C_3$ διαφορετικούς τρόπους. Άρα, ο ζητούμενος αριθμός των διαφορετικών επιτροπών που μπορούν να σχηματιστούν είναι:

$${}_3C_2 \cdot {}_7C_3 = 3 \cdot 35 = 105.$$

Μια επιτροπή αποτελείται από 2 μαθηματικούς και 3 φυσικούς, οι οποίοι επιλέγονται τυχαία από μία ομάδα 5 μαθηματικών και 7 φυσικών. Πόσες διαφορετικές επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν, εάν:

(i) Δύο συγκεκριμένοι, ένας Μαθηματικός και ένας Φυσικός, που βρίσκονται στα δικαστήρια για ασήμαντη αφορμή, δεν μπορούν να συμμετέχουν στην ίδια επιτροπή;

Μια επιτροπή αποτελείται από 2 μαθηματικούς και 3 φυσικούς, οι οποίοι επιλέγονται τυχαία από μία ομάδα 5 μαθηματικών και 7 φυσικών. Πόσες διαφορετικές επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν, εάν:

(i) Δύο συγκεκριμένοι, ένας Μαθηματικός και ένας Φυσικός, που βρίσκονται στα δικαστήρια για ασήμαντη αφορμή, δεν μπορούν να συμμετέχουν στην ίδια επιτροπή;

(i) Για να αποφύγουμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των πιθανών επιτροπών σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις α) να μην συμμετέχει κανένας από τους δύο, β) να συμμετέχει μόνο ο Μαθηματικός, γ) να συμμετέχει μόνο ο Φυσικός, και ύστερα να προσθέσουμε αυτούς τους αριθμούς, ξεκινάμε από το συμπληρωματικό ενδεχόμενο. Ο αριθμός των διαφορετικών επιτροπών που μπορούν να σχηματιστούν έχοντας <u>και τους δύο</u> στην σύνθεση τους είναι:

$${}_4C_1 \cdot {}_6C_2 = 4{\cdot}15 = 60$$

Αν αφαιρέσουμε αυτόν τον αριθμό των μη αποδεκτών επιτροπών από το συνολικό αριθμό των δ
επιτροπών χωρίς περιορισμούς που υπολογίσαμε στο ερώτημα (i) έχουμε το ζητούμενο αποτ
350 – 60 = 290.

Μία κληρωτίδα περιέχει 8 κόκκινα, 3 άσπρα και 9 μπλε σφαιρίδια. Εάν βγάλουμε ταυτόχρονα 3 σφαιρίδια στη τύχη, να υπολογιστεί η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

(i) **E_1: να είναι και τα τρία σφαιρίδια κόκκινα.**

(ii) **E_2: τα δύο σφαιρίδια να είναι κόκκινα και το ένα μπλε.**

(iii) **E_3: τουλάχιστον ένα σφαιρίδιο να είναι άσπρο.**

(iv) **E_4: να βγει ένα σφαιρίδιο από το κάθε χρώμα.**

(v) **E_5: να βγουν στη σειρά ένα κόκκινο, ένα άσπρο και ένα μπλε σφαιρίδιο.**

Μία κληρωτίδα περιέχει 8 κόκκινα, 3 άσπρα και 9 μπλε σφαιρίδια. Εάν βγάλουμε ταυτόχρονα 3 σφαιρίδια στη τύχη, να υπολογιστεί η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

(i) $\mathbf{E_1}$**: να είναι και τα τρία σφαιρίδια κόκκινα.**

Μία κληρωτίδα περιέχει 8 κόκκινα, 3 άσπρα και 9 μπλε σφαιρίδια. Εάν βγάλουμε ταυτόχρονα 3 σφαιρίδια στη τύχη, να υπολογιστεί η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

(i) **E_1: να είναι και τα τρία σφαιρίδια κόκκινα.**

(i) Τα ευνοϊκά ενδεχόμενα είναι τόσα όσοι και οι τρόποι (συνδυασμοί) με τους ο μπορούμε να επιλέξουμε 3 κόκκινα σφαιρίδια από τα 8 που υπάρχουν στην κληρωτίδα σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(E_1) = \frac{{}_8C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{56}{1140} = 0{,}0491 \quad \text{(περίπου 5\%)}$$

εφόσον υπάρχουν ${}_8C_3 = 56$ τρόποι να επιλέξουμε τρεις κόκκινες σφαίρες από τις 8 και ${}_{20}C_3$ =1.140 τρόποι να επιλέξουμε τρεις οποιουδήποτε χρώματος σφαίρες από τις 20.

Μία κληρωτίδα περιέχει 8 κόκκινα, 3 άσπρα και 9 μπλε σφαιρίδια. Εάν βγάλουμε ταυτόχρονα 3 σφαιρίδια στη τύχη, να υπολογιστεί η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

(i) **E_2: τα δύο σφαιρίδια να είναι κόκκινα και το ένα μπλε.**

Μία κληρωτίδα περιέχει 8 κόκκινα, 3 άσπρα και 9 μπλε σφαιρίδια. Εάν βγάλουμε ταυτόχρονα 3 σφαιρίδια στη τύχη, να υπολογιστεί η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

(i) **E_2: τα δύο σφαιρίδια να είναι κόκκινα και το ένα μπλε.**

(i) Η πιθανότητα να βγουν δυο κόκκινα σφαιρίδια και ένα μπλε είναι:

$$P(E_2) = \frac{\left({}_8C_2\right)\cdot\left({}_9C_1\right)}{{}_{20}C_3} = \frac{252}{1140} = 0{,}2211 \quad \text{(περίπου 22\%)}.$$

Μία κληρωτίδα περιέχει 8 κόκκινα, 3 άσπρα και 9 μπλε σφαιρίδια. Εάν βγάλουμε ταυτόχρονα 3 σφαιρίδια στη τύχη, να υπολογιστεί η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

(i) **E_3: τουλάχιστον ένα σφαιρίδιο να είναι άσπρο.**

Μία κληρωτίδα περιέχει 8 κόκκινα, 3 άσπρα και 9 μπλε σφαιρίδια. Εάν βγάλουμε ταυτόχρονα 3 σφαιρίδια στη τύχη, να υπολογιστεί η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

(i) **E_3: τουλάχιστον ένα σφαιρίδιο να είναι άσπρο.**

(i) Το ενδεχόμενο ένα τουλάχιστον σφαιρίδιο να είναι άσπρο (E_3) είναι συμπληρα του ενδεχόμενου κανένα σφαιρίδιο να μην είναι άσπρο (E_3^c). Άρα η ζητούμενη πιθα είναι:

$$P(E_3) = 1- P\,(E_3^c) = 1 - \frac{{}_{17}C_3}{{}_{20}C_3} = 1 - \frac{680}{1140} = \frac{460}{1140} = 0{,}4035 \text{ (περίπου 40\%).}$$

Μία κληρωτίδα περιέχει 8 κόκκινα, 3 άσπρα και 9 μπλε σφαιρίδια. Εάν βγάλουμε ταυτόχρονα 3 σφαιρίδια στη τύχη, να υπολογιστεί η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

(i) **E_4: να βγει ένα σφαιρίδιο από το κάθε χρώμα.**

Μία κληρωτίδα περιέχει 8 κόκκινα, 3 άσπρα και 9 μπλε σφαιρίδια. Εάν βγάλουμε ταυτόχρονα 3 σφαιρίδια στη τύχη, να υπολογιστεί η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

(i) E_4: να βγει ένα σφαιρίδιο από το κάθε χρώμα.

(i) Η πιθανότητα να βγει ένα σφαιρίδιο από κάθε χρώμα είναι:

$$P\,(E_4) = \frac{({}_8C_1)({}_3C_1)({}_9C_1)}{{}_{20}C_3} = \frac{216}{1140} = 0{,}1894 \ \text{(περίπου 19\%)}.$$

Μία κληρωτίδα περιέχει 8 κόκκινα, 3 άσπρα και 9 μπλε σφαιρίδια. Εάν βγάλουμε ταυτόχρονα 3 σφαιρίδια στη τύχη, να υπολογιστεί η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

(i) **E_5: να βγουν στη σειρά ένα κόκκινο, ένα άσπρο και ένα μπλε σφαιρίδιο.**

Μία κληρωτίδα περιέχει 8 κόκκινα, 3 άσπρα και 9 μπλε σφαιρίδια. Εάν βγάλουμε ταυτόχρονα 3 σφαιρίδια στη τύχη, να υπολογιστεί η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

(i) **E_5: να βγουν στη σειρά ένα κόκκινο, ένα άσπρο και ένα μπλε σφαιρίδιο.**

(i) Όταν έχουμε τρία σφαιρίδια, ένα από το κάθε χρώμα, μπορούμε να τα διατάξο
3!=6 τρόπους (μεταθέσεις). Μία από αυτές τις 6 μεταθέσεις θα έχει πρώτο το κόκκινο, δ
το άσπρο και τρίτο το μπλε σφαιρίδιο. Άρα, στις 216 περιπτώσεις που μπορούμε να επιλ
τρία σφαιρίδια, ένα από το κάθε χρώμα, το ένα έκτο αυτών είναι σε σειρά κόκκινο-
μπλε. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(E_5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{216}{1140} = \frac{36}{1140} = 0{,}0316 \quad \text{(περίπου 3\%)}.$$

1. **Από μία τάξη που έχει 40 φοιτητές επιλέγουμε τυχαία τους 8. Αν στη τάξη βρίσκονται 25 κορίτσια και 15 αγόρια, ποια η πιθανότητα η αναλογία του φύλου στην τάξη να διατηρηθεί και στο δείγμα;**

Από μία τάξη που έχει 40 φοιτητές επιλέγουμε τυχαία τους 8. Αν στη τάξη βρίσκονται 25 κορίτσια και 15 αγόρια, ποια η πιθανότητα η αναλογία του φύλου στην τάξη να διατηρηθεί και στο δείγμα;

Η αναλογία των κοριτσιών στην τάξη είναι 25/40 ή 5/8 ενώ των αγοριών 3/8. Για να διατηρηθεί αυτή η αναλογία στο δείγμα θα πρέπει να επιλεγούν 3 αγόρια και 5 κορίτσια. Η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει με:

$$\binom{25}{5} \cdot \binom{15}{3} = 53.130 \cdot 455 = 24.174.150 \text{ συνολικά τρόπους.}$$

Ενώ μπορούμε να επιλέξουμε τυχαία (χωρίς περιορισμούς) 8 άτομα από τα 40 με:

$$\binom{40}{8} = 76.904.685 \text{ τρόπους.}$$

Άρα, η πιθανότητα να διατηρηθεί η αναλογία στο φύλο είναι:

$$p = \frac{24.174.150}{76.904.685} = 0,3143.$$

Παράδειγμα 2.3.6

- Θεωρούμε μία συνάντηση 15 ατόμων. Πόσες δυνατές χειραψίες υπάρχουν; Ποια είναι η γενίκευση του προβλήματος αυτού αν έχουμε n άτομα;

Παράδειγμα 2.3.6

- Θεωρούμε μία συνάντηση 15 ατόμων. Πόσες δυνατές χειραψίες υπάρχουν; Ποια είναι η γενίκευση του προβλήματος αυτού αν έχουμε n άτομα;

Απάντηση

Θεωρούμε μία συνάντηση 15 ατόμων. Σε κάθε χειραψία παίρνουν μέρος δύο άτομα και δεν μας ενδιαφέρει η σειρά, άρα έχουμε συνδυασμούς. Επομένως μία χειραψία μεταξύ δύο ατόμων είναι ισοδύναμη με την επιλογή δύο ατόμων από τα 15. Άρα ο συνολικός αριθμός όλων των δυνατών χειραψιών είναι ίσος με:

$${}_{15}C_2 = \binom{15}{2} = \frac{15!}{2!\cdot(15-2)!} = \frac{15!}{2!\cdot(13)!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13!}{2\cdot(13)!} = \frac{15\cdot 14}{2} = 105 \text{ χειραψίες συνολικά.}$$

Παράδειγμα 2.3.6

- Θεωρούμε μία συνάντηση 15 ατόμων. Πόσες δυνατές χειραψίες υπάρχουν; Ποια είναι η γενίκευση του προβλήματος αυτού αν έχουμε n άτομα;

Γενίκευση: Έχουμε συνάντηση n ατόμων και θέλουμε να υπολογίσουμε το συνολικό αριθμό όλων των χειραψιών. Τότε με ανάλογα επιχειρήματα όπως πριν διαπιστώνουμε ότι είναι ίσος με το συνδυασμό n ανά δύο και άρα έχουμε ότι, ${}_{n}C_{2}=\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{2!\cdot(n-2)!}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$.

Β) Δειγματοληψία με επανάθεση ή επανατοποθέτηση (with replacement):

• 1) Διατάξεις n ανά k

Πρόταση 2.3.19 Το πλήθος των ομάδων που προκύπτουν από την επιλογή και διάταξη k αντικειμένων από συνολικά n ($k \le n$) όπου το κάθε αντικείμενο (από τα n) μπορεί να επαναλαμβάνεται μέσα στην ομάδα των k χωρίς περιορισμούς, το συμβολίζουμε με ${}_n\mathrm{U}_k, \mathrm{U}_{n,k}$ ή ${}_n\mathrm{N}_k, \mathrm{N}_{n,k}$ και ο τύπος υπολογισμού είναι ο ακόλουθος: ${}_n\mathrm{U}_k = n^k$.

• 2) Συνδυασμοί n ανά k

Ορισμός 2.3.20 Ορίζουμε **επαναληπτικούς συνδυασμούς** n ανά k το πλήθος των ομάδων που προκύπτουν από την επιλογή k αντικειμένων με επανάληψη από συνολικά n ($k \le n$) χωρίς να μας ενδιαφέρει η μεταξύ τους διάταξη (σειρά), ο συμβολισμός είναι $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ ενώ ο τύπος υπολογισμού των επαναληπτικών συνδυασμών n ανά k είναι ο ακόλουθος $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$, $n,k \ge 1$.

B) Δειγματοληψία με επανάθεση ή επανατοποθέτηση (with replacement):

- 3) Κυκλικές Διατάξεις

Πρόταση 2.3.24 Ο αριθμός των **κυκλικών διατάξεων των n στοιχείων ανά k** συμβολίζεται με $K_{n,k}$ και είναι ίσος με $K_{n,k} = \frac{{}_nP_k}{k} = \frac{(n)_k}{k} = \frac{n!}{k\cdot(n-k)!}$.

Ειδικότερα ο αριθμός των κυκλικών διατάξεων των n στοιχείων ($k=n$) δηλαδή των κυκλικών μεταθέσεων είναι ίσος με $K_n = (n-1)!$

-

- Η εντυπωσιακή ξανθιά στην άκρη της μπάρας άφησε διακριτικά το χαρτάκι με το τηλέφωνό της κάτω από το μισοάδειο ποτήρι μπέρμπον. Ο Θανάσης το ίδιο διακριτικά το τράβηξε και το δίπλωσε στην παλάμη του. Το απόγευμα της επομένης, όταν ανέσυρε το μαγικό χαρτάκι από την τσέπη του παντελονιού του, διαπίστωσε ότι το τελευταίο ψηφίο ήταν σβησμένο από την υγρασία του ποτηριού.
- (i) Δοκιμάζοντας το τελευταίο ψηφίο στην τύχη ποια είναι η πιθανότητα να μην καλέσει περισσότερους από δυο λάθος αριθμούς;
- (ii) Αφού είχε δοκιμάσει το ψηφίο 0 χωρίς επιτυχία θυμήθηκε μια φράση της κοπέλας «Το ζώδιο μου είναι ζυγός, όπως και το τελευταίο νούμερο του τηλεφώνου μου». Αλλάζει η παραπάνω πιθανότητα;

Διαφάνειες από **το ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΒΙΒΛΙΟ (ΜΕΣΩ του ΕΥΔΟΞΟΥ)**
ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
Εφαρμογές με python , R, SPSS, Matlab
Συγγραφέας Μιχαήλ Φιλιππακης Καθηγητής Πανεπιστήμιο Πειραιώς,
Εκδόσεις Τσότρας, Αθηνα 2019