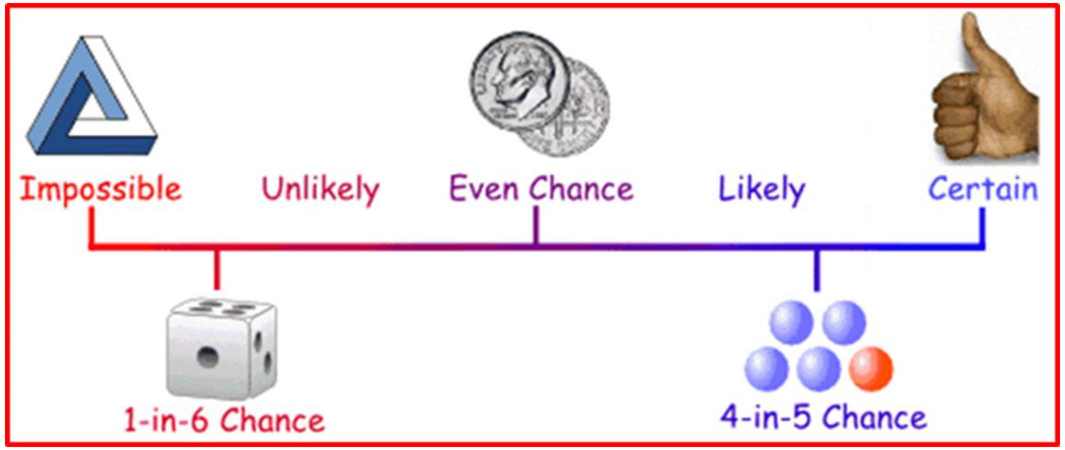
Πανεπιστήμιο Πειραιώς
Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων

ΔΡ. ΦΙΛΙΠΠΑΚΗΣ ΜΙΧΑΗΛ
Καθηγητής

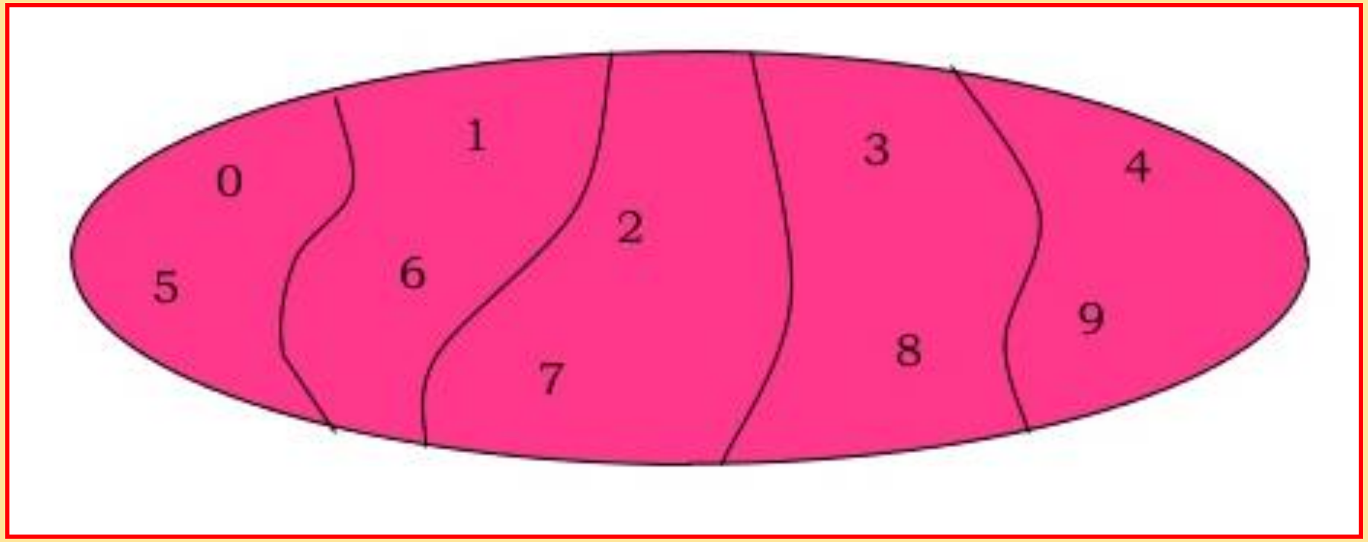


Διαφάνειες από το ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ βιβλίο "ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ, συγγραφέας. ΜΙΧΑΗΛ ΦΙΛΙΠΠΑΚΗΣ, Εκδόσεις Τσότρας 2019

ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Ορισμός 3.3.1 Ορίζουμε ως **διαμέριση** ενός δειγματικού χώρου S μια συλλογή $A_1, A_2, ..., A_n$ ενδεχομένων του S τα οποία είναι κατά ζεύγη ξένα και η ένωσή τους είναι ο S, δηλαδή ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

1. $A_i \cap A_j = \varnothing$, για κάθε $i, j = 1, 2, ..., n$ με $i \neq j$,
2. $S = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$



ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Πρόταση 3.3.2 Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας Αν Ω ένας δειγματικός χώρος και $B \subseteq \Omega$ ένα ενδεχόμενο του τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $0 < P(B) < 1$. Τότε για κάθε ενδεχόμενο A του ίδιου δειγματικού χώρου ισχύει ο τύπος,

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'). \quad (1)$$

Θεώρημα 3.3.4 Γενίκευση Θεωρήματος της Ολικής Πιθανότητας

Αν τα ενδεχόμενα $B_1, B_2, \dots, B_n$ αποτελούν μια διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε $P(B_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ τότε για κάθε ενδεχόμενο A με $P(A) > 0$ ισχύει:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

Παράδειγμα

Ο Ολυμπιακός έχει ήδη προκριθεί στον τελικό του Κυπέλλου Ελλάδος και περιμένει τον νικητή του ζευγαριού Άρης - ΠΑΟΚ. Για αυτό το παιχνίδι τα γραφεία στοιχημάτων δίνουν 40% πιθανότητα στον Άρη να προκριθεί. Επίσης τα ίδια γραφεία εκτιμούν ότι **αν προκριθεί ο Άρης, ο Ολυμπιακός έχει 60% πιθανότητα να τον κερδίσει**, ενώ **αν προκριθεί ο ΠΑΟΚ, οι πιθανότητες είναι μοιρασμένες**. Ποια η πιθανότητα να πάρει ο Ολυμπιακός το Κύπελλο Ελλάδας αυτή τη χρονιά;

Ο το ενδεχόμενο ο **Ολυμπιακος** να κερδίσει το κύπελλο

Α το ενδεχόμενο να προκριθεί ο Άρης στον τελικό.

$P(A)=0.4$, $P(A^c) = 0{,}6$, $P(O \mid A) = 0{,}6$, $P(O \mid A^c) = 0{,}5$.

$\mathbf{P(O)} = P(O \mid A) \cdot P(A) + P(O \mid A^c) \cdot P(A^c)$

Παράδειγμα

Ένας επαγγελματίας γευσιγνώστης ειδικός στην γαλλική και ιταλική κουζίνα που συνεργάζεται με το περιοδικό «Ας φάμε έξω» γράφει καλές κριτικές για το 60% των ιταλικών και το 70% των γαλλικών εστιατορίων που επισκέπτεται. Στους 6 μήνες συνεργασίας του με το περιοδικό έχει επισκεφτεί 40 ιταλικά και 10 γαλλικά εστιατόρια:

(i) Ποια η πιθανότητα η επόμενη του επίσκεψη σε εστιατόριο να καταλήξει σε θετική κριτική;

A : το ενδεχόμενο ένα εστιατόριο να πάρει θετική κριτική P(A)=?

B: το ενδεχόμενο να είναι ιταλικό , P(B) = 0,8

Γ :να είναι γαλλικό, P(Γ) = 0,2, P(A|B) = 0,6, P(A|Γ) = 0,7

$$P(A) = P(A \mid B) \cdot P(B) + P(A \mid \Gamma) \cdot P(\Gamma) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}38$$

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ BAYES

Θεώρημα 3.4.1 (Τύπος του Bayes) Αν $B_1, B_2, \ldots, B_n$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε $P(B_i) > 0$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε για κάθε ενδεχόμενο A του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A) > 0$ ισχύει ότι,

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \cdots + P(A \mid B_n)P(B_n)} = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Θεώρημα 3.4.2 (Τύπος του Bayes) Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε $P(A_i) > 0$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε για κάθε ενδεχόμενο A του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(B) > 0$ ισχύει ότι,

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \cdots + P(B \mid A_n)P(A_n)} = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)P(A_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ BAYES

Θεώρημα 3.4.1 (Τύπος του Bayes) Αν $B_1, B_2, \dots, B_n$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε $P(B_i) > 0$ για όλα τα $i = 1, 2, \dots, n$. Τότε για κάθε ενδεχόμενο A του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A) > 0$ ισχύει ότι,

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \cdots + P(A \mid B_n)P(B_n)} = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Παρατήρηση 3.4.3 Στην ειδική περίπτωση όπου έχουμε $n = 2$ και $B_1 = B,\ B_2 = B'$ το **Θεώρημα του Bayes** γράφεται στη μορφή, $P(B_1 \mid A) = P(B \mid A) = \dfrac{P(A \mid B_1)P(B_1)}{P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2)} = \dfrac{P(A \mid B)P(B)}{P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B')P(B')}$ και

$$P(B' \mid A) = \frac{P(A \mid B')P(B')}{P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B')P(B')}.$$

Παράδειγμα Ένας επαγγελματίας γευσιγνώστης ειδικός στην γαλλική και ιταλική κουζίνα που συνεργάζεται με το περιοδικό «Ας φάμε έξω» γράφει καλές κριτικές για το 60% των ιταλικών και το 70% των γαλλικών εστιατορίων που επισκέπτεται.

Στους 6 μήνες συνεργασίας του με το περιοδικό έχει επισκεφτεί 40 ιταλικά και 10 γαλλικά εστιατόρια:

(i) Ποια η πιθανότητα η επόμενη του επίσκεψη σε εστιατόριο να καταλήξει σε θετική κριτική;

(ii) Αν η κριτική που έγραψε για ένα νέο εστιατόριο ήταν θετική, ποια η πιθανότητα αυτό να ήταν ιταλικό;

Λύση

Α : το ενδεχόμενο ένα εστιατόριο να πάρει θετική κριτική P(A)=?

B: το ενδεχόμενο να είναι ιταλικό , P(B) = 0,8

Γ :να είναι γαλλικό, $P(\Gamma) = 0{,}2$, P(A|B) = 0,6, P(A|Γ) = 0,7

$$P(A) = P(A\,|\,B)\cdot P(B) + P(A\,|\,\Gamma)\cdot P(\Gamma) = 0{,}6\cdot 0{,}8 + 0{,}7\cdot 0{,}2 = 0{,}38$$

ενδεχόμενο B|A

$$\boxed{P(B\,|\,A) = \frac{P(A\,|\,B)\cdot P(B)}{P(A\,|\,B)\cdot P(B) + P(A\,|\,\Gamma)P(\Gamma)}}$$

Παράδειγμα

$$P(I|X)=\frac{P(I)P(X|I)}{P(X|I)P(I)+P(X|II)P(II)+P(X|III)P(III)}$$

Ένα κομοδίνο έχει τρία συρτάρια. Στο πρώτο υπάρχουν δυο χρυσά νομίσματα, στο δεύτερο ένα χρυσό και ένα ασημένιο και στο τρίτο δυο ασημένια. Επιλέγουμε τυχαία ένα συρτάρι, από το οποίο παίρνουμε ένα νόμισμα. Αν αυτό το νόμισμα είναι χρυσό ποια είναι η πιθανότητα το άλλο νόμισμα στο συρτάρι να είναι επίσης χρυσό;

- I, II, III τα ενδεχόμενα να βρίσκεται στο πρώτο, δεύτερο ή τρίτο συρτάρι
- X, A τα ενδεχόμενα ένα νόμισμα να είναι χρυσό ή ασημένιο

Παράδειγμα

Ένα κομοδίνο έχει τρία συρτάρια. Στο πρώτο υπάρχουν δυο χρυσά νομίσματα, στο δεύτερο ένα χρυσό και ένα ασημένιο και στο τρίτο δυο ασημένια. Επιλέγουμε τυχαία ένα συρτάρι, από το οποίο παίρνουμε ένα νόμισμα. Αν αυτό το νόμισμα είναι χρυσό ποια είναι η πιθανότητα το άλλο νόμισμα στο συρτάρι να είναι επίσης χρυσό;

- \

$$P(I|X)=\frac{P(I)P(X|I)}{P(X|I)P(I)+P(X|II)P(II)+P(X|III)P(III)}$$

$$P(I)=P(II)=P(III)=\frac{1}{3}$$

$$P(X|I)=1\ ,P(X|II)=1/2\ \ ,P(X|III)=0$$

Παράδειγμα

Η Κλαίρη και η Μπεάτα έχουν σκεφτεί (η κάθε μία ανεξάρτητα και μυστικά από την άλλη) να δολοφονήσουν τον πλούσιο θείο Αγησίλαο για να τον κληρονομήσουν μια ώρα αρχύτερα. Εκμεταλλευόμενη την αδυναμία του θείου στα γλυκά η Κλαίρη, έβαλε στρυχνίνη στην τούρτα παγωτό ενώ η Μπεάτα, χωρίς να ξέρει τι σχεδιάζει η αδελφή της, έβαλε υδροκυάνιο στην mousse au chocolate. Η πιθανότητα κάποιος να πεθάνει τρώγοντας την τούρτα με την στρυχνίνη είναι 60% ενώ την mousse με υδροκυάνιο 90%. Γνωρίζοντας τις συνήθειες του θείου Αγησίλαου, η πιθανότητα να ζητήσει μετά το δείπνο τούρτα είναι 50%, σοκολάτα 40%, ενώ 1 στις 10 φορές δεν τρώει γλυκό μετά το δείπνο. Αφού τελείωσε το δείπνο του με ένα ποτήρι κονιάκ, ο θείος Αγησίλαος ένιωσε μια ξαφνική ζάλη και σωριάστηκε νεκρός. Ποια από τις δυο γυναίκες πρέπει να θεωρηθεί ως βασικός ύποπτος για τον θάνατο του θείου Αγησίλαου;

Παράδειγμα

$$P(A_1|B)?,\quad P(A_2|B)?$$

Η Κλαίρη και η Μπεάτα έχουν σκεφτεί (η κάθε μία ανεξάρτητα και μυστικά από την άλλη) να δολοφονήσουν τον πλούσιο θείο Αγησίλαο για να τον κληρονομήσουν μια ώρα αρχύτερα. Εκμεταλλευόμενη την αδυναμία του θείου στα γλυκά η Κλαίρη, έβαλε στρυχνίνη στην **τούρτα παγωτό** ενώ η Μπεάτα, χωρίς να ξέρει τι σχεδιάζει η αδελφή της, έβαλε υδροκυάνιο στην **mousse au chocolate**. Η πιθανότητα κάποιος να πεθάνει τρώγοντας την τούρτα με την στρυχνίνη είναι 60% ενώ την mousse με υδροκυάνιο 90%. Γνωρίζοντας τις συνήθειες του θείου Αγησίλαου, η πιθανότητα να ζητήσει μετά το δείπνο τούρτα είναι 50%, σοκολάτα 40%, ενώ 1 στις 10 φορές δεν τρώει γλυκό μετά το δείπνο. Αφού τελείωσε το δείπνο του με ένα ποτήρι κονιάκ, ο θείος Αγησίλαος ένιωσε μια ξαφνική ζάλη και σωριάστηκε νεκρός. Ποια από τις δυο γυναίκες πρέπει να θεωρηθεί ως βασικός ύποπτος για τον θάνατο του θείου Αγησίλαου;

A_1 να φάει τούρτα παγωτό, A_2 να φάει mousse au chocolate και A_3 να μην φάει τίποτα. B το ενδεχόμενο να πεθάνει ο θείος

$P(A_1) = 0{,}5$, $P(A_2) = 0{,}4$ $P(A_3)=0{,}1$.

$P(B|A_1) = 0{,}6$, $P(B|A_2) = 0{,}9$, $P(B|A_3) = 0$

$P(B) = 0{,}6\cdot 0{,}5+0{,}9\cdot 0{,}4+0\cdot 0{,}1=0{,}66$

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)\cdot P(A_1)}{P(B)} = 0.4545$$

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Ορισμός 3.5.1 Όταν η πραγματοποίηση του ενδεχομένου Β δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου Α, τότε λέμε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι **(στοχαστικά) *ανεξάρτητα*** **(independent).** Στην περίπτωση αυτή και υπό την προϋπόθεση ότι $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$ ισχύει ισοδύναμα το εξής: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Παρατήρηση 3.5.2 Είδαμε λοιπόν ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα αν και μόνο αν $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Σε αντίθετη περίπτωση που ισχύει ότι $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ τα ενδεχόμενα Α και Β ονομάζονται **εξαρτημένα.**

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Ορισμός 3.5.1 Όταν η πραγματοποίηση του ενδεχομένου B δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου A, τότε λέμε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι **(στοχαστικά) ανεξάρτητα (independent).** Στην περίπτωση αυτή και υπό την προϋπόθεση ότι $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$ ισχύει ισοδύναμα το εξής: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Παρατήρηση 3.5.2 Είδαμε λοιπόν ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα αν και μόνο αν $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Σε αντίθετη περίπτωση που ισχύει ότι $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ τα ενδεχόμενα A και B ονομάζονται **εξαρτημένα.**

Ορισμός 3.5.5 Δύο ενδεχόμενα A και B ονομάζονται **ανεξάρτητα (στοχαστικά ανεξάρτητα)** αν και μόνο αν ικανοποιείται η σχέση $P(B | A) = P(B)$. Ισοδύναμα δύο ενδεχόμενα A και B ονομάζονται **ανεξάρτητα (στοχαστικά ανεξάρτητα)** αν και μόνο αν ικανοποιείται η σχέση $P(A | B) = P(A)$.

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Ορισμός 3.5.1 Όταν η πραγματοποίηση του ενδεχομένου B δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου A, τότε λέμε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι **(στοχαστικά)** ***ανεξάρτητα*** **(independent).** Στην περίπτωση αυτή και υπό την προϋπόθεση ότι $P(A)>0$ και $P(B)>0$ ισχύει ισοδύναμα το εξής: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

Πρόταση 3.5.7 Αν A και B είναι δύο ανεξάρτητα ενδεχομενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε είναι ανεξάρτητα και τα ακόλουθα ζεύγη ενδεχομένων:

- A και B', $\left(B^c \text{ ή } \overline{B}\right)$
- A' και B
- A' και B'

Ορισμός 3.5.1 Όταν η πραγματοποίηση του ενδεχομένου B δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου A, τότε λέμε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι **(στοχαστικά) ανεξάρτητα (independent).** Στην περίπτωση αυτή και υπό την προϋπόθεση ότι $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$ ισχύει ισοδύναμα το εξής: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Μια άσκηση Στατιστικής δίνεται σε τρεις φοιτητές α, β, γ οι οποίοι έχουν 1/2, 1/3 και 1/4 πιθανότητα αντίστοιχα να την λύσουν. Αν οι τρεις φοιτητές δουλεύουν ανεξάρτητα, ποια είναι η πιθανότητα το πρόβλημα να μη λυθεί;

Β1: Α: , Β:, Γ:

P(A)=1/2

P(B)=1/3

P(Γ)=1/4

$$P\left(A^c \cap B^c \cap \Gamma^c\right) = P\left(A^c\right)P\left(B^c\right)P\left(\Gamma^c\right) =$$

$$= \left(1 - P(A)\right)\left(1 - P(B)\right)\left(1 - P(\Gamma)\right)$$

Παράδειγμα

1. **Η πιθανότητα ένας πενηντάχρονος άνδρας να γιορτάσει τα εξηκοστά γενέθλια του είναι 85%, ενώ η πιθανότητα μια σαρανταπεντάχρονη γυναίκα να είναι στη ζωή μετά από δέκα χρόνια είναι 95%. Ποια είναι η πιθανότητα σ' ένα ανδρόγυνο, όπου ο άνδρας είναι 50 και η γυναίκα 45 χρόνων, μετά από 10 χρόνια:**

(i) να ζούνε και οι δύο; $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}85 \cdot 0{,}95 = 0{,}8075$.

(ii) να ζει τουλάχιστον ένας από τους δύο;

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}9925$.

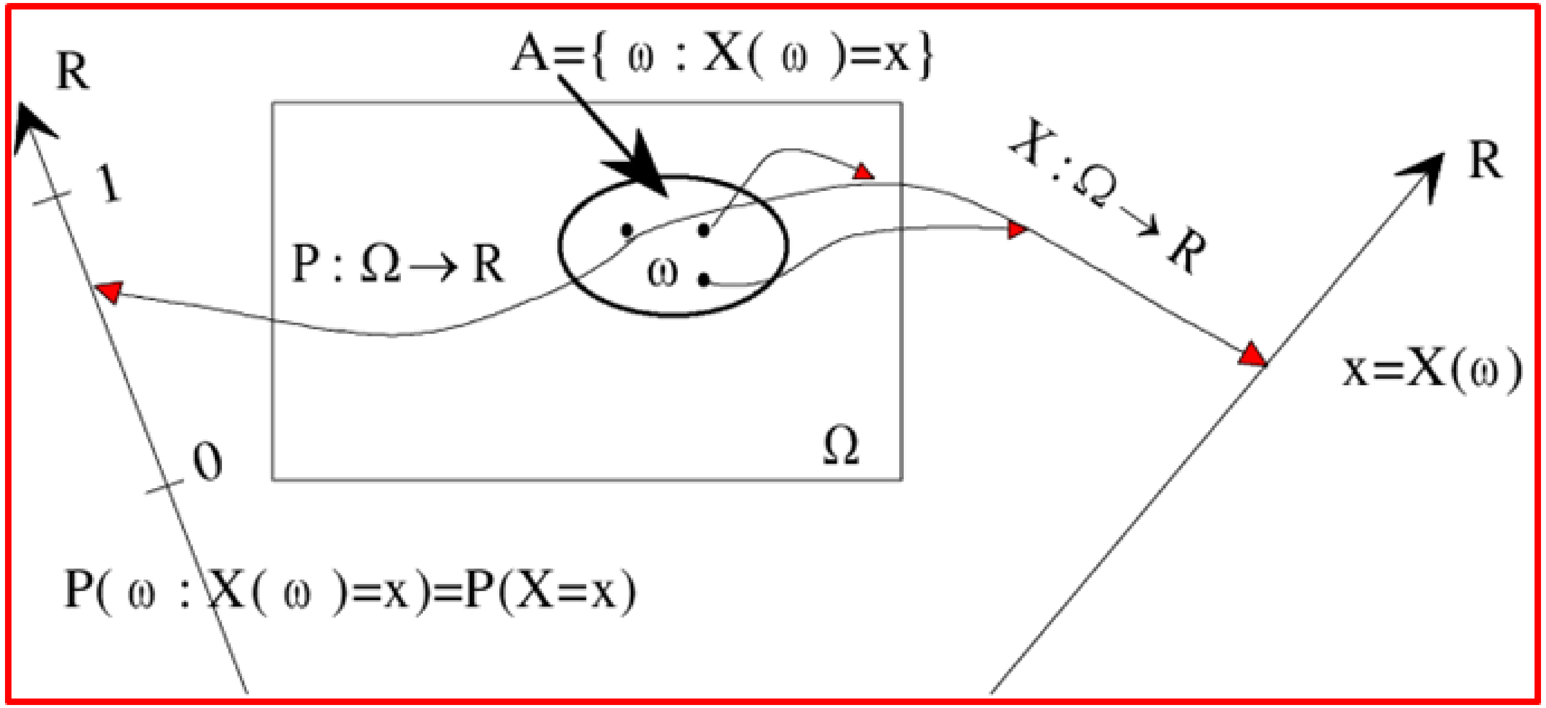
(i) να ζει μόνο ένας από τους δύο;

(ii) $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0{,}9925 - 0{,}8075 = 0{,}185$

Ανεξαρτησία τριών ή περισσοτέρων ενδεχομένων

Ορισμός 3.5.10 Έστω τρία ενδεχομενα A_1, A_2, A_3 του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Τα ενδεχομενα A_1, A_2, A_3 ονομάζονται **ανεξάρτητα** αν και μόνο αν ισχύουν οι ισότητες i)$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, ii)$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$, iii)$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$, και η ισότητα $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ



Παράδειγμα 4.1.1

- Θεωρούμε τη ρίψη ενός νομίσματος 3 φορές. Να οριστεί η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των γραμμάτων στις 3 ρίψεις.
- **Απάντηση Ορίζουμε Χ τον αριθμό των γραμμάτων στις 3 ρίψεις**
- **Β1:** $\boxed{\Omega = \{\text{ΚΚΚ}, \text{ΚΚΓ}, \text{ΚΓΚ}, \text{ΚΓΓ}, \text{ΓΚΚ}, \text{ΓΚΓ}, \text{ΓΓΚ}, \text{ΓΓΓ}\}}$

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$X(\text{ΚΚΚ}) = 0, X(\text{ΚΚΓ}) = 1, X(\text{ΚΓΚ}) = 1, X(\text{ΚΓΓ}) = 2$$

$$X(\text{ΓΚΚ}) = 1, X(\text{ΓΚΓ}) = 2, X(\text{ΓΓΚ}) = 2, X(\text{ΓΓΓ}) = 3$$

Παράδειγμα 4.1.1

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

- Θεωρούμε τη ρίψη ενός νομίσματος 3 φορές. Να οριστεί η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των γραμμάτων στις 3 ρίψεις.
- **Απάντηση Ορίζουμε Χ τον αριθμό των γραμμάτων στις 3 ρίψεις**
- **Β1:** $\boxed{\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}}$

$$X(ΚΚΚ) = 0, X(ΚΚΓ) = 1, X(ΚΓΚ) = 1, X(ΚΓΓ) = 2$$

$$X(ΓΚΚ) = 1, X(ΓΚΓ) = 2, X(ΓΓΚ) = 2, X(ΓΓΓ) = 3$$

$\omega \in \Omega$	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	0	1	1	2	1	2	2	3

Παράδειγμα 4.1.1

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\boxed{\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}}$$

$$X(KKK) = 0, X(KK\Gamma) = 1, X(K\Gamma K) = 1, X(K\Gamma\Gamma) = 2$$

$$X(\Gamma KK) = 1, X(\Gamma K\Gamma) = 2, X(\Gamma\Gamma K) = 2, X(\Gamma\Gamma\Gamma) = 3$$

$\omega \in \Omega$	KKK	KKΓ	KΓK	KΓΓ	ΓKK	ΓKΓ	ΓΓK	ΓΓΓ
$X(\omega)$	0	1	1	2	1	2	2	3

$$P(X = 0) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\}) = P(\{KKK\}) = \frac{1}{8}$$

Παράδειγμα 4.1.1

$$X:\Omega \to \mathbb{R}$$

- .

$$\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$$

$\omega \in \Omega$	KKK	KKΓ	KΓK	KΓΓ	ΓKK	ΓKΓ	ΓΓK	ΓΓΓ
$X(\omega)$	0	1	1	2	1	2	2	3

$$P(X=0) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\}) = P(\{KKK\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\}) = P(\{KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 2\}) = P(\{K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K\}) = \frac{3}{8}$$

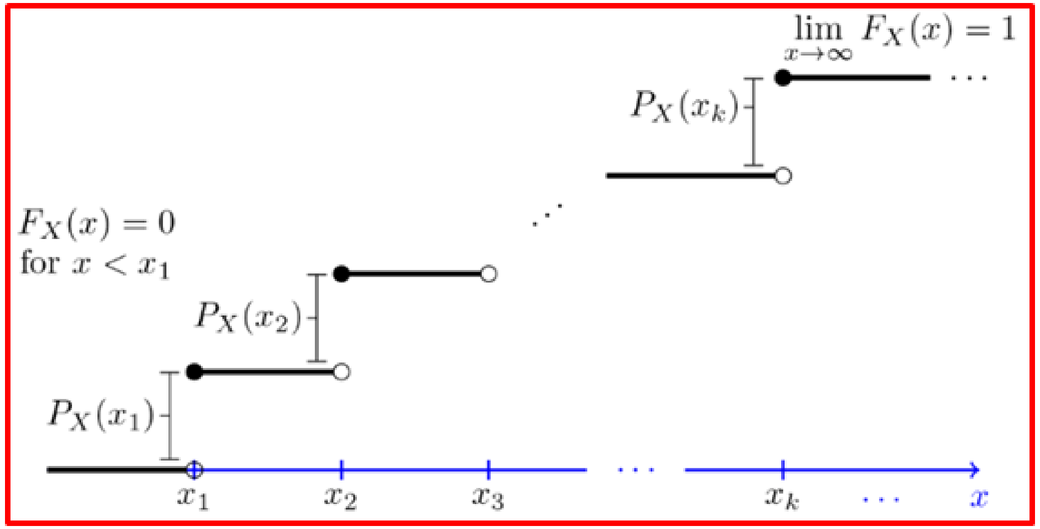
$$P(X=3) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 3\}) = P(\{\Gamma\Gamma\Gamma\}) = \frac{1}{8}.$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Ορισμός 4.2.1 Θεωρούμε ένα δειγματοχώρο Ω ενός πειράματος τύχης και μία τυχαία μεταβλητή X που ορίζεται σε αυτόν. Η πραγματική συνάρτηση $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που δίνεται από τον τύπο

$$F_X(t)=P(X\le t)=P\left(\left\{\omega\in\Omega: X(\omega)\le t\right\}\right),\quad -\infty<t<\infty$$

ονομάζεται **αθροιστική τυχαία μεταβλητή** ή **συνάρτηση αθροιστικής κατανομής** ή πιο απλά **συνάρτηση κατανομής** της τυχαίας μεταβλητής X.



$$F_X(3)=P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{8}{8}=1,$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Ορισμός 4.2.1 Θεωρούμε ένα δειγματοχώρο Ω ενός πειράματος τύχης και μία τυχαία μεταβλητή Χ που ορίζεται σε αυτόν. Η πραγματική συνάρτηση $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που δίνεται από τον τύπο

$$F_X(t)=P(X\le t)=P(\{\omega\in\Omega: X(\omega)\le t\}),\quad -\infty<t<\infty$$

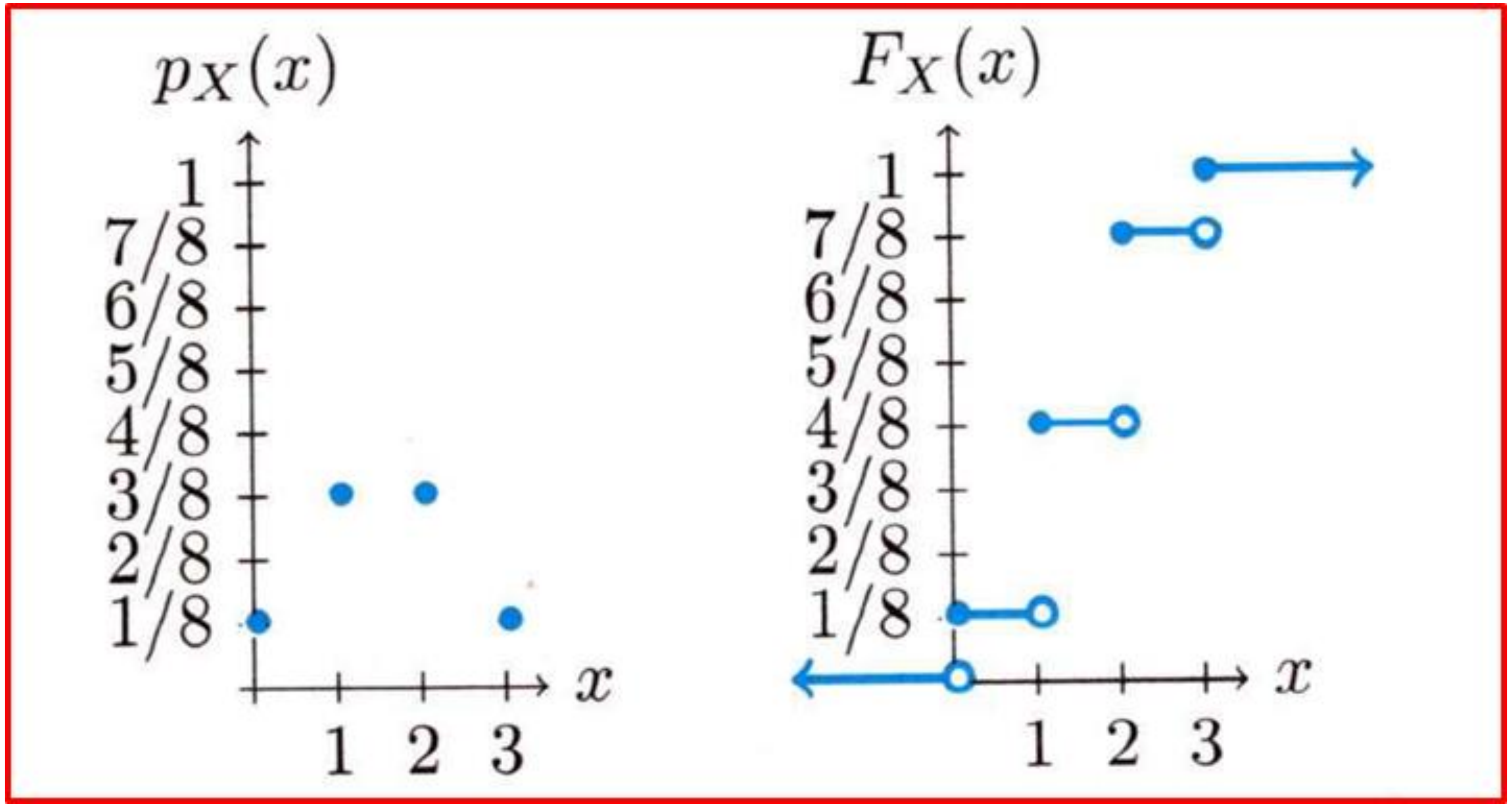
ονομάζεται **αθροιστική τυχαία μεταβλητή** ή **συνάρτηση αθροιστικής κατανομής** ή πιο απλά **συνάρτηση κατανομής** της τυχαίας μεταβλητής Χ.

$$F_X(0)=P(X\le 0)=P(X=0)=\frac{1}{8},$$

$$F_X(1)=P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8},$$

$$F_X(2)=P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8},$$

•



$p_X(x)$
1
7/8
6/8
5/8
4/8
3/8
2/8
1/8
x
1 2 3
$F_X(x)$
1
7/8
6/8
5/8
4/8
3/8
2/8
1/8
x
1 2 3

Παράδειγμα 4.2.2 Θεωρούμε τη ρίψη ενός ζαριού. Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής αυτής.

- $$\boxed{F_X(x) = P\left(X \le x\right) = P\left(\left\{\omega \in \Omega : X\left(\omega\right) \le x\right\}\right), \quad -\infty < x < \infty.}$$

$$\Omega = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}.$$

- X η ένδειξη της πάνω έδρας του ζαριού $$P\left(\omega \in \Omega\right) = \frac{1}{6}, \forall \omega \in \Omega.$$

Παράδειγμα 4.2.2 Θεωρούμε τη ρίψη ενός ζαριού. Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής αυτής.

- $$\boxed{F_X(x) = P\left(X \le x\right) = P\left(\left\{\omega \in \Omega : X\left(\omega\right) \le x\right\}\right), \quad -\infty < x < \infty.}$$

$$\Omega = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}.$$

- X η ένδειξη της πάνω έδρας του ζαριού $$P\left(\omega \in \Omega\right) = \frac{1}{6}, \forall \omega \in \Omega.$$

$$F_X(1) = P\left(X \le 1\right) = P\left(X = 1\right) = \frac{1}{6}, \qquad F_X(2) = P\left(X \le 2\right) = P\left(X = 1\right) + P\left(X = 2\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6},$$

$$F_X(3) = P\left(X \le 3\right) = P\left(X = 1\right) + P\left(X = 2\right) + P\left(X = 3\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6},$$

Παράδειγμα 4.2.2 Θεωρούμε τη ρίψη ενός ζαριού. Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής αυτής.

- $\boxed{F_X(x) = P\left(X \le x\right) = P\left(\left\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\right\}\right), \quad -\infty < x < \infty.}$

$$P\left(\omega \in \Omega\right) = \frac{1}{6}, \forall \omega \in \Omega. \qquad F_X(1) = P\left(X \le 1\right) = P\left(X = 1\right) = \frac{1}{6},$$

$$F_X(2) = P\left(X \le 2\right) = P\left(X = 1\right) + P\left(X = 2\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6},$$

$$F_X(3) = P\left(X \le 3\right) = P\left(X = 1\right) + P\left(X = 2\right) + P\left(X = 3\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6},$$

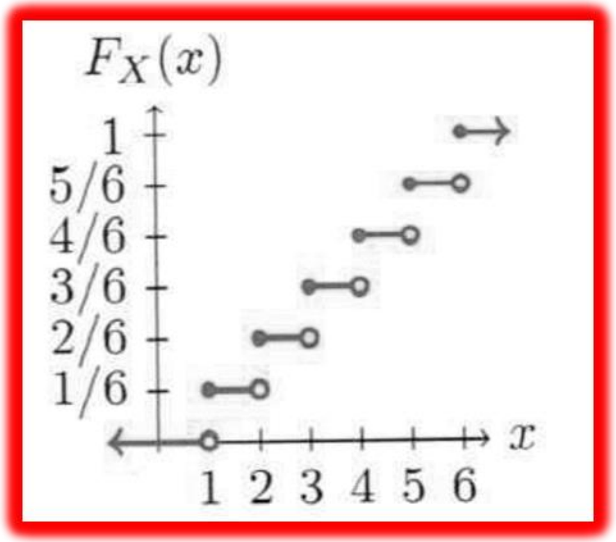
$$F_X(4) = P\left(X \le 4\right) = P\left(X = 1\right) + P\left(X = 2\right) + P\left(X = 3\right) + P\left(X = 4\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6},$$

- $$F_X(x) = P(X \le x) = P(\varnothing) = 0, \quad -\infty < x < 1$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(\Omega) = 1, \quad 6 \le x < +\infty.$$

- $$F_X(5) = P(X \le 5) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6},$$

$$F_X(6) = P(X \le 6) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6}$$



.

$$f_X(x), p_X(x) = P(X = x)$$

Αν η X είναι διακριτή τ. μ. τότε η συνάρτηση $P_X(x) = P(X = x)$ που πληροί τις ιδιότητες:

$$F(s) = P(X \le s) = \sum_{x=0}^{s} P_X(x)$$

(i) $P_X(x) \geq 0 \ \forall \ x \in \mathcal{R}$

(ii) $\sum_{X} P_X(x) = 1$

(iii) $P(X = U) = \sum_{X \in U} P_X(x), \ U \subseteq A$

λέγεται συνάρτηση πιθανότητας (probability function, p.f.) ή κατανομή πιθανότητας της μεταβλητής X.

X είναι συνεχής τ. μ.

Αν X είναι <u>συνεχής </u>τ. μ. τότε η συνάρτηση *$f_X(x)$ που ορίζεται ως*

$$P(x \in V) = \int_V f_X(x)dx \quad \forall\, V \in A$$

και πληροί τις ιδιότητες:

$$\boxed{F(y) = P(X < y) = \int_{-\infty}^{y} f(x)dx}$$

(i) $f_X(x) \geq 0,\ x \in \mathcal{R}$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

(iii) $P(x < X \leq x + dx) = f(x)dx$

λέγεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function, p.d.f.) ή κατανομή πιθανότητας της μεταβλητής X

Έστω Χ διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $P(X = xi) = P_{x_i}$ όπου $i = 1, 2, \ldots, \kappa$ τότε:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i P_{x_i}$$

$$\boxed{E(X) = \sum_{x_i \in X} x_i p_X(x_i) = \sum_{x_i \in X} x_i P(X = x_i)}$$

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{\kappa} (x_i - E(X))^2 P_{x_i}$$ είναι η **διακύμανσ**

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2}$$

$$\boxed{E(X^2) = \sum_{x_i \in X} x_i^2 p_X(x_i) = \sum_{x_i \in X} x_i^2 P(X = x_i)}$$

$$\boxed{E(g(X)) = \sum_{x_i \in X} g(x_i) p_X(x_i) = \sum_{x_i \in X} g(x_i) P(X = x_i)}$$

Έστω X είναι συνεχής με συνάρτηση πιθανότητας f(x), $: x \in A$

·

$$\boxed{E(X) = \int_A x f(x) dx}$$

$$\boxed{E(X^2) = \int_A x^2 f(x) dx}$$

$$E(g(X)) = \int_A g(x) f(x) dx$$

$$\boxed{V(X) = \int_A (x - E(X))^2 f(x) dx}$$

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

Ιδιότητες της μέσης τιμής, E(X)

1.	$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$,	X_1, X_2 τ.μ.
2.	$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$,	X_i τ.μ. $i=1,2,\ldots,n$ (γενίκευση της Ιδ. 1)
3.	$E(\alpha X) = \alpha\, E(X)$,	X τ.μ., α σταθερά
4.	$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha\, E(X) + \beta\, E(Y)$	X,Y τ.μ., $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ (γενίκευση των 1&3)
5.	$E(\alpha) = \alpha$,	α σταθερά

Ιδιότητες της διακύμανσης, V(X)

1. $V(X1 + X2) = V(X1) + V(X2)$

2. $V(X1 - X2) = V(X1) + V(X2)$

3. $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

4. $V(\alpha X) = \alpha^2 V(X)$

5. $V(\alpha X \pm \beta Y) = \alpha^2 V(X) + \beta^2 V(Y)$

6. $V(\alpha) = 0$

7. $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Παράδειγμα Αν X είναι ο αριθμός των κορονών σε τέσσερις ρίψεις ενός νομίσματος, να υπολογιστεί η διακύμανση V(X).

- Η κατανομή του αριθμού X των κορονών σε τέσσερις ρίψεις ενός νομίσματος είναι:

X	0	1	2	3	4
P_X	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i P_{x_i}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x_i \in X} x_i^2 p_X(x_i) = \sum_{x_i \in X} x_i^2 P(X = x_i)$$

Παράδειγμα Αν X είναι ο αριθμός των κορονών σε τέσσερις ρίψεις ενός νομίσματος, να υπολογιστεί η διακύμανση V(X).

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\kappa} x_i P_{x_i}$$

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$$

- Η κατανομή του αριθμού X των κορονών σε τέσσερις ρίψεις ενός νομίσματος είναι:

X	0	1	2	3	4
P_X	*1/16*	*4/16*	*6/16*	*4/16*	*1/16*

$$E(X^2)=\sum_{x_i\in X} x_i^2 p_X(x_i)=\sum_{x_i\in X} x_i^2 P(X=x_i)$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\kappa} x_i P_{x_i} = 0\cdot 1/16+1\cdot 4/16+\ldots+4\cdot 1/16=\frac{4+12+12+4}{16}=2$$

και

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 P_{x_i}=\frac{4+24+36+16}{16}=5$$

Βασικές Διακριτές Κατανομές

- **Δίτιμη (Bernoulli)**
- Σε ένα στατιστικό πείραμα που συνίσταται σε μία και μόνο προσπάθεια ή δοκιμή με δύο δυνατά αποτελέσματα, επιτυχία με πιθανότητα p και αποτυχία 1-p = q, ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή Χ ως εξής: Χ=1 αν το αποτέλεσμα είναι επιτυχία και Χ=0 αν το αποτέλεσμα είναι αποτυχία.

$$P(X=x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

$$E(x) = p, \quad V(x) = p \cdot q \quad \text{και } q = 1 - p$$

Βασικές Διακριτές Κατανομές

- **Δυωνυμική (Binomial) B(n,p)**
- **Η κατανομή πιθανότητας του αριθμού των «επιτυχιών» σε n ανεξάρτητες προσπάθειες Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p και αποτυχίας 1-p = q, ίδια για όλες τις προσπάθειες, δίνεται από τον τύπο:**

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \ x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$E(x) = n \cdot p, \ V(x) = n \cdot p \cdot q, \text{ όπου } q = 1 - p$$

Παράδειγμα

Δέκα φοιτητές εξετάζονται στην Στατιστική ΙΙ, μάθημα του Ε΄ εξαμήνου, ένα μάθημα που τα τελευταία χρόνια παρουσιάζει ποσοστό επιτυχίας 60%. Αν οι προσπάθειες των φοιτητών θεωρηθούν ανεξάρτητες, να υπολογιστούν οι πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

- (i) Να περάσουν ακριβώς 5 φοιτητές.
- (ii) Να περάσουν όλοι οι φοιτητές.
- (iii) Να περάσουν τουλάχιστον 7 φοιτητές.
- (iv) Να περάσουν λιγότεροι από 7 φοιτητές.

Παράδειγμα

Δέκα φοιτητές εξετάζονται στην Στατιστική ΙΙ, μάθημα του Ε΄ εξαμήνου, ένα μάθημα που τα τελευταία χρόνια παρουσιάζει ποσοστό επιτυχίας 60%. Αν οι προσπάθειες των φοιτητών θεωρηθούν ανεξάρτητες, να υπολογιστούν οι πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

- Χ ο αριθμός των φοιτητών που περνάνε το μάθημα, από την ομάδα των δέκα. Αν θεωρήσουμε ότι οι εξετάσεις των 10 φοιτητών συνιστούν 10 ανεξάρτητες προσπάθειες, όπου η κάθε μία έχει πιθανότητα επιτυχίας 0,6 τότε η τ.μ. Χ ακολουθεί δυωνυμική κατανομή με παραμέτρους, $n = 10$ και $p = 0,6$.$X \sim B(n=10,p=0.6)$

Παράδειγμα

- X ο αριθμός των φοιτητών που περνάνε το μάθημα, από την ομάδα των δέκα. Αν θεωρήσουμε ότι οι εξετάσεις των 10 φοιτητών συνιστούν 10 ανεξάρτητες προσπάθειες, όπου η κάθε μία έχει πιθανότητα επιτυχίας 0,6 τότε η τ.μ. X ακολουθεί δυωνυμική κατανομή με παραμέτρους, n = 10 και p = 0,6.X~B(n=10,p=0.6)

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, x=0,1,2,..,n$$

$$P(X=x)=\binom{10}{x}0.6^x(1-0.6)^{10-x}, \quad x=0,1,2,..,10$$

Παράδειγμα

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0,1,2,..,n$$

$$\boxed{P(X = x) = \binom{10}{x} 0.6^x (1-0.6)^{10-x}, \quad x = 0,1,2,..,10}$$

- Να περάσουν ακριβώς 5 φοιτητές.
- (ii) Να περάσουν όλοι οι φοιτητές.
- (iii) Να περάσουν τουλάχιστον 7 φοιτητές.
- (iv) Να περάσουν λιγότεροι από 7 φοιτητές.

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} 0.6^5 (1-0.6)^{10-5}$$

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} 0.6^{10} (1-0.6)^{10-10} = 0.6^{10}$$

$$P(X \geq 7) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$P(X < 7) = 1 - P(X \geq 7) = ...$$

2) Γεωμετρική Κατανομή, G(p)

Η κατανομή πιθανότητας του **αριθμού των προσπαθειών (X) μέχρι την εμφάνιση της πρώτης επιτυχίας** σε μία ακολουθία ανεξάρτητων **δοκιμών Bernoulli** με πιθανότητα επιτυχίας p (αποτυχίας 1-p).

$$P(X = x) = p \cdot (1 - p)^{x-1}, x = 1, 2, ..$$

$$E(X) = \frac{1}{p}, V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Παράδειγμα Ένας παίκτης του basketball έχει ποσοστό επιτυχίας 70% στις ελεύθερες βολές. Αν σε ένα παιχνίδι επιχειρήσει 12 βολές, υπολογίστε την πιθανότητα:

$$P(X=x)=\binom{12}{x}0.7^x(1-0.7)^{12-x}, x=0,1,2,..,n$$

- E: μια πετυχημενη βολή, P(E)=0,7
- X τ.μ. ο αριθμός των επιτυχημένων βολών από τις 12
- X~B(n=12, p=0.7)
- (i) Να βάλει και τις 12 βολές. $P(X=12)$
- (ii) Να βάλει τουλάχιστον 10. $P(X\geq 10)$
- (iii) Η πρώτη πετυχημένη βολή να έρθει στην πέμπτη προσπάθεια.
- (iv) Η πέμπτη πετυχημένη βολή να έρθεί στην όγδοη προσπάθεια.

Παράδειγμα Ένας παίκτης του basketball έχει ποσοστό επιτυχίας 70% στις ελεύθερες βολές. Αν σε ένα παιχνίδι επιχειρήσει 12 βολές, υπολογίστε την πιθανότητα:

$$P(X=x)=\binom{12}{x}0.7^{x}(1-0.7)^{12-x}, x=0,1,2,..,n$$

- E: μια πετυχημενη βολή, P(E)=0,7
- X τ.μ. ο αριθμός των επιτυχημένων βολών από τις 12
- X~B(n=12, p=0.7)
- (i) Να βάλει και τις 12 βολές. $P(X=12)$
- (ii) Να βάλει τουλάχιστον 10. $P(X\geq 10)$
- (iii) Y τμ αριθμό E βολώνμεχρι να μπει καλάθι

$$P(Y=y)=0.3^{y-1}\cdot 0.7,\quad y=1,2,..,12$$

- Η πρώτη πετυχημένη βολή να έρθει στην πέμπτη προσπάθεια.

$$P(Y=5)=0.3^{5-1}\cdot 0.7$$

Παράδειγμα

Ο Νίκος δουλεύει κοντά στη πλατεία Ομονοίας και κάθε μεσημέρι παίρνει τον ηλεκτρικό. Επειδή η μητέρα του μένει στην Κηφισιά και η κοπέλα του στο Φάληρο, ο Νίκος παίρνει τον πρώτο συρμό που έρχεται και πηγαίνει για φαγητό είτε στην Κηφισιά είτε στο Φάληρο. Οι συρμοί περνούν κάθε 10 λεπτά και στις δύο κατευθύνσεις, με αυτόν της Κηφισιάς να περνά δύο λεπτά μετά από αυτόν του Φαλήρου. Η μητέρα του Νίκου διαμαρτύρεται ότι δεν έρχεται πια για φαγητό στο σπίτι και ειδικά τον τελευταίο μήνα (20 εργάσιμες μέρες) ήρθε μόνο 3 φορές. Ο Νίκος πάλι λέει ότι δεν θυμάται, αλλά σύμφωνα με το σκεπτικό του οι επισκέψεις πρέπει να είναι μοιρασμένες. Ποιο από τα δύο σενάρια συγκεντρώνει μεγαλύτερη πιθανότητα;

Παράδειγμα

Ο Νίκος δουλεύει κοντά στη πλατεία Ομονοίας και κάθε μεσημέρι παίρνει τον ηλεκτρικό. Επειδή η μητέρα του μένει στην Κηφισιά και η κοπέλα του στο Φάληρο, ο Νίκος παίρνει τον πρώτο συρμό που έρχεται και πηγαίνει για φαγητό είτε στην Κηφισιά είτε στο Φάληρο. Οι συρμοί περνούν κάθε 10 λεπτά και στις δύο κατευθύνσεις, με αυτόν της Κηφισιάς να περνά δύο λεπτά μετά από αυτόν του Φαλήρου. Η μητέρα του Νίκου διαμαρτύρεται ότι δεν έρχεται πια για φαγητό στο σπίτι και ειδικά τον τελευταίο μήνα (**20 εργάσιμες μέρες**) ήρθε μόνο 3 φορές. Ο Νίκος πάλι λέει ότι δεν θυμάται, αλλά σύμφωνα με το σκεπτικό του οι επισκέψεις πρέπει να είναι μοιρασμένες. **Ποιο από τα δύο σενάρια συγκεντρώνει μεγαλύτερη πιθανότητα;**

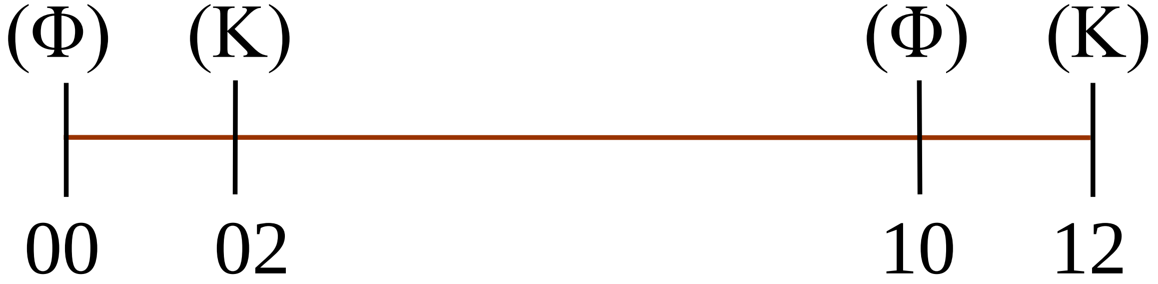
Χ ο αριθμός των επισκέψεων του Νίκου στη Κηφισιά τον τελευταίο μήνα

$$P(X=3) < ??? > P(X=10)$$

.E: να παει κηφισια

p=P(E)=2/10=0.2, X~B(n=20,p=0.2)

$$P(X=x)=\binom{20}{x}0.2^{x}(1-0.2)^{20-x},\ x=0,1,2,..,20$$



$$P(X=3)=\binom{20}{3}0.2^{3}(1-0.2)^{20-3}=0.2054$$

$$P(X=10)=\binom{20}{10}0.2^{10}(1-0.2)^{20-10}=0.0020$$

4) Poisson (λ)

- Η κατανομή πιθανότητας του αριθμού των εμφανίσεων X ενός τυχαίου γεγονότος μέσα σ’ ένα χρονικό ή χωρικό πλαίσιο, η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, x = 0, 1, 2, \ldots.$$

$$E(X) = \lambda, \quad V(X) = \lambda$$

Πείραμα Poisson

- Τα φαινόμενα που προσεγγιστικά ερμηνεύονται από τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κατανομή Poisson χαρακτηρίζονται από ένα χρονικό ή κάποιες φορές χωρικό πλαίσιο μέσα στο οποίο εξελίσσονται

Χρονικό Πλαίσιο

- 1) Ο αριθμός των τηλεφωνικών κλήσεων στο 1142 για καταγγελία καπνίσματος σε κλειστό χώρο που γίνονται από τις 9:00 έως τις 9:30 κάθε πρωί.
- 2) Ο αριθμός των αιτήσεων των στεγαστικών δανείων που δέχεται ένα συγκεκριμένο Κατάστημα της Εθνικής Τράπεζας κάθε μέρα.
- 3) Ο αριθμός των διαφημίσεων μπίρας που παίζονται στο ημίχρονο των ποδοσφαιρικών αγώνων που δείχνει η κρατική τηλεόραση.
- 8) Ο αριθμός των τερμάτων που σημειώνει ο Ολυμπιακός σε κάθε παιχνίδι πρωταθλήματος.
- 7) Ο αριθμός των ατυχημάτων σε μία συγκεκριμένη διασταύρωση κατά την διάρκεια μίας εβδομάδας

Χωρικό Πλαίσιο

- 1) Ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών ανά σελίδα σε ένα βιβλίο.
- 5) Ο αριθμός των ελεύθερων κρεβατιών εντατικής σε κάθε νοσοκομείο της χώρας, μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή
- 7) Ο αριθμός των σταφίδων που έχει ένα μπισκότο (Cookie) μιας συγκεκριμένης μάρκας

Παράτηρηση

- Αν $X1 \sim Poisson(\lambda 1)$ και $X2 \sim Poisson(\lambda 2)$ μεταξύ τους ανεξάρτητες τότε:

$X1+X2 \sim Poisson(\lambda 1+\lambda 2)$

Βασικές Συνεχείς Κατανομές

- Κανονική Κατανομή Ν (μ,σ^2)

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , -\infty < x < +\infty, \sigma > 0$$

$E(x) = \mu$ και $V(x) = \sigma^2$

Βασικές Συνεχείς Κατανομές

- Κανονική Κατανομή Ν (μ,σ^2)
- Αν Χ,Υ δυο τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κανονική κατανομή, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
- (i) Χ,Υ ανεξάρτητες =>Χ+Υ ακολουθεί κανονική κατανομή
- (ii) Χ,Υ ανεξάρτητες => Χ-Υ ακολουθεί κανονική κατανομή

Βασικές Συνεχείς Κατανομές

- **Τυπική Κανονική Κατανομή N (μ=0,σ^2=1)**

Λ.3.1. Έστω X τ.μ. η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή E(X)= μ και διακύμανση V(X) = σ^2 (δηλ. X ~ N (μ,σ^2). Αν ορίσουμε μία νέα τ.μ. Z έτσι ώστε Z = $\frac{X-\mu}{\sigma}$, να αποδειχθεί ότι E(Z) = 0 και V(Z) =1.

$$\boxed{\text{Αν } X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)}$$

•

Διαφάνειες από το ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ βιβλίο "ΘΕΩΡΙΑ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ,
συγγραφέας. ΜΙΧΑΗΛ ΦΙΛΙΠΠΑΚΗΣ, Εκδόσεις Τσότρας 2019

Παράδειγμα

1. Αν το ύψος X των ενήλικων κατοίκων μιας περιοχής ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μ = 175 (εκ.) και $\sigma^2 = 16$, τότε:

A. **Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:**

(i)P(X < 175). Η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένα κάτοικος να έχει ύψος μικρότερο από 175 cm.
(ii)P(X < 185)
(iii)P(X > 185)
(iv)P(X < 169)
(v)P(170 < X < 180)
(vi)P(172<X<182)

$$\boxed{\text{Αν } X \sim N(175, 4^2) \Rightarrow Z = \frac{X - 175}{4} \sim N(0,1)}$$

X ~ N(175,16).

Παράδειγμα

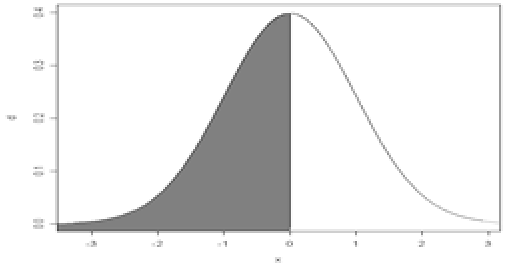
1. Αν το ύψος Χ των ενήλικων κατοίκων μιας περιοχής ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μ = 175 (εκ.) και $\sigma^2 = 16$, τότε:

Α. **Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:**

(i) P(X < 175).

$$\text{Αν} \quad X \sim N(175, 4^2) \Rightarrow Z = \frac{X-175}{4} \sim N(0,1)$$

$$P(X<175) = P\left(\frac{X-175}{4} < \frac{175-175}{4}\right) = P\left(Z = \frac{X-175}{4} < 0\right) = 0.5$$



Παράδειγμα

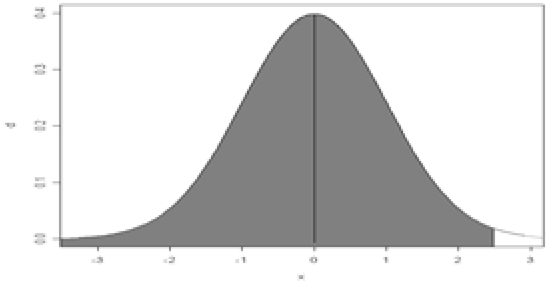
1. Αν το ύψος X των ενήλικων κατοίκων μιας περιοχής ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μ = 175 (εκ.) και σ^2 = 16, τότε:

Α.**Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:**

P(X < 185).

$$\boxed{\text{Αν } \; X \sim N(175, 4^2) \Rightarrow Z = \frac{X-175}{4} \sim N(0,1)}$$

$$P(X<185) = P\left(\frac{X-175}{4} < \frac{185-175}{4}\right) = P(Z<2.5) =$$



Παράδειγμα

1. Αν το ύψος X των ενήλικων κατοίκων μιας περιοχής ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μ = 175 (εκ.) και σ^2 = 16, τότε:

A. **Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:**

P(X >185).

$$\text{Αν}\quad X \sim N(175, 4^2) \Rightarrow Z = \frac{X - 175}{4} \sim N(0,1)$$

$$P(X > 185) = 1 - P(X \leq 185)$$

• Διαφάνειες από **το ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΒΙΒΛΙΟ (ΜΕΣΩ του ΕΥΔΟΞΟΥ)**
ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
Εφαρμογές με python , R, SPSS, Matlab
Συγγραφέας Μιχαήλ Φιλιππακης Καθηγητής Πανεπιστήμιο Πειραιώς,
Εκδόσεις Τσότρας, Αθηνα 2019