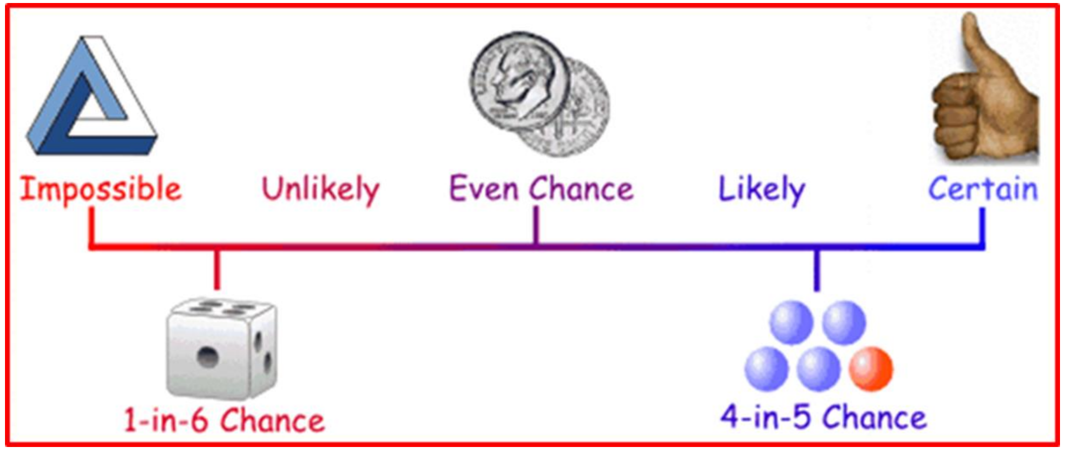
Πανεπιστήμιο Πειραιώς
Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων

ΔΡ. ΦΙΛΙΠΠΑΚΗΣ ΜΙΧΑΗΛ
Καθηγητής



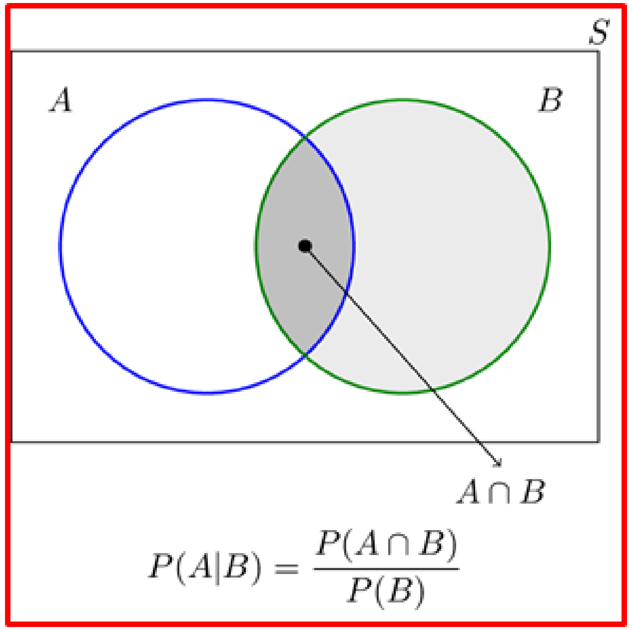
Διαφάνειες από το ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ βιβλίο "ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ, συγγραφέας. ΜΙΧΑΗΛ ΦΙΛΙΠΠΑΚΗΣ, Εκδόσεις Τσότρας 2019

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

- Πολλές φορές όταν θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου γνωρίζουμε εκ των προτέρων κάποιες πληροφορίες για αυτό.
- Για παράδειγμα, η πιθανότητα μια ρίψη ενός ζαριού να φέρει 4 είναι μεγαλύτερη αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι η ρίψη αυτή του ζαριού έχει φέρει ζυγό αριθμό

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

- **Ορισμός 3.1.1** Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου και $P(B)>0$, , τότε η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A δεδομένου ότι έχει ήδη συμβεί το ενδεχόμενο B ή δοθέντος του B ονομάζεται **δεσμευμένη πιθανότητα του A δεδομένου του B**, και συμβολίζεται με $P(A|B)$. Η πιθανότητα αυτή υπολογίζεται ως εξής: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

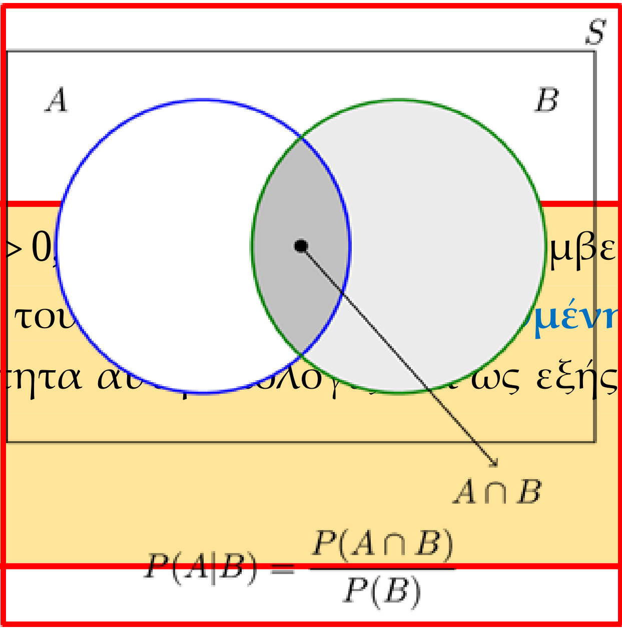


Διαφάνειες από το ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ βιβλίο "ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ, συγγραφέας. ΜΙΧΑΗΛ ΦΙΛΙΠΠΑΚΗΣ, Εκδόσεις Τσότρας 2019

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

- **Ορισμός 3.1.1** Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου και $P(B) > 0$, … μβεί το ενδεχόμενο A δεδομένου ότι έχει ήδη συμβεί το ενδεχόμενο B ή δοθέντος του … **μένη πιθανότητα του A δεδομένου του B**, και συμβολίζεται με $P(A|B)$. Η πιθανότητα αυ… ολο… ως εξής:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$



Αν εκτελεστεί ένα πείραμα τύχης και δεν γνωρίζουμε το ακριβές αποτέλεσμα του πειράματος όμως γνωρίζουμε ότι αυτό περιέχεται σε ένα γεγονός B δηλαδή το B έχει συμβεί τότε αυτή η πληροφορία αλλάζει και την πιθανότητα να έχει συμβεί το ενδεχόμενο A. Αυτό συμβαίνει διότι ο νέος δειγματικός χώρος αποτελείται από όλα τα απλά ενδεχόμενα που περιέχονται στο B και να έχει συμβεί το A θα πρέπει το αποτέλεσμα του επιράματος να είναι στο B και στο A δηλαδή στην τομή τους. Για παράδειγμα αν η πιθανότητα να βρέχει σε ένα τόπο ένα καλοκαίρι είναι γνωστή τότε αυτή η πιθανότητα αυξάνεται αν παρατηρηθεί ότι έχει συννεφιά.

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

- .

Ορισμός 3.1.7 Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου και $P(A)>0$, τότε η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο Β δεδομένου ότι έχει ήδη συμβεί το ενδεχόμενο Α ή δοθέντος του Α ονομάζεται **δεσμευμένη πιθανότητα του Β δεδομένου του Α**, και συμβολίζεται με $P(B|A)$. Η πιθανότητα αυτή υπολογίζεται ως εξής:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

Ορισμός 3.1.1 Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου και $P(B)>0$, , τότε η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A δεδομένου ότι έχει ήδη συμβεί το ενδεχόμενο B ή δοθέντος του B ονομάζεται **δεσμευμένη**
- **πιθανότητα του A δεδομένου του B**, και συμβολίζεται με $P(A|B)$. Η πιθανότητα αυτή υπολογίζεται ως εξής:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

1. **Έστω A, B δύο υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/2$ και $P(A\cup B) = 2/3$. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:**

- **(i) $P(A\cap B|A\cup B)$ (ii) $P(A|A\cup B)$**

Ορισμός 3.1.1 Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου και $P(B)>0$, , τότε η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο Α δεδομένου ότι έχει ήδη συμβεί το ενδεχόμενο Β ή δοθέντος του Β ονομάζεται **δεσμευμένη πιθανότητα του Α δεδομένου του Β**, και συμβολίζεται με $P(A|B)$. Η πιθανότητα αυτή υπολογίζεται ως εξής:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

1. Έστω Α, Β δύο υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει P(A) = 1/3, P(B) = 1/2 και P(A∪B) = 2/3. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)= P(A) + P(B)- P(A\cup B)$

$$P(A\cap B|A\cup B)=\frac{P\left[(A\cap B)\cap(A\cup B)\right]}{P(A\cup B)}\overset{A\cap B\subseteq A\cup B}{=}\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{1/6}{4/6}=\frac{1}{4}$$

- **(i) P(A∩B|A∪B)   (ii) P(A|A∪B)**

Ορισμός 3.1.1 Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου και $P(B)>0$, , τότε η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A δεδομένου ότι έχει ήδη συμβεί το ενδεχόμενο B ή δοθέντος του B ονομάζεται **δεσμευμένη πιθανότητα του A δεδομένου του B**, και συμβολίζεται με $P(A|B)$. Η πιθανότητα αυτή υπολογίζεται ως εξής:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

1. Έστω A, B δύο υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει P(A) = 1/3, P(B) = 1/2 και P(A∪B) = 2/3. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) – P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)= P(A) + P(B)- P(A\cup B)$

(ii) P(A|A∪B)

$$P(A|A\cup B)=\frac{P\left[A\cap(A\cup B)\right]}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{1/3}{2/3}=\frac{1}{2}$$

Παράδειγμα

- **Ο Πέτρος, που ξεκινάει το 3ο εξάμηνο στο τμήμα DS, έχει να επιλέξει ανάμεσα σε δυο μαθήματα, την Στατιστική ΙΙ και τα Οικονομικά της Εργασίας. Παρόλο που προτιμάει την Στατιστική, εκτιμά ότι η πιθανότητα να περάσει με την πρώτη το μάθημα είναι 3/4 για τα Οικονομικά και 1/4 για την Στατιστική (της οποίας ο καθηγητής είναι λίγο στριμμένος). Μη μπορώντας να αποφασίσει αλλιώς, το ρίχνει κορώνα- γράμματα. Ποια η πιθανότητα να περάσει ο Πέτρος την Στατιστική με την πρώτη?**
- **Α το ενδεχόμενο ο Πέτρος να επιλέξει την Στατιστική ΙΙ**
- **Β το ενδεχόμενο να περάσει με την πρώτη όποιο μάθημα διαλέξει**

$$P(A \cap B) = ?$$

Παράδειγμα

- **Ο Πέτρος, που ξεκινάει το 3ο εξάμηνο στο τμήμα DS, έχει να επιλέξει ανάμεσα σε δυο μαθήματα, την Στατιστική ΙΙ και τα Οικονομικά της Εργασίας. Παρόλο που προτιμάει την Στατιστική, εκτιμά ότι η πιθανότητα να περάσει με την πρώτη το μάθημα είναι 3/4 για τα Οικονομικά και 1/4 για την Στατιστική (της οποίας ο καθηγητής είναι λίγο στριμμένος). Μη μπορώντας να αποφασίσει αλλιώς, το ρίχνει κορώνα- γράμματα. Ποια η πιθανότητα να περάσει ο Πέτρος την Στατιστική με την πρώτη?**
- **A το ενδεχόμενο ο Πέτρος να επιλέξει την Στατιστική ΙΙ**
- **B το ενδεχόμενο να περάσει με την πρώτη όποιο μάθημα διαλέξει**

$$\boxed{P(A \cap B) = ?} \qquad \boxed{P(A) = \frac{1}{2}} \qquad P(B|A) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Παράδειγμα 3.1.5 Ρίχνουμε δύο ζάρια. Ποια είναι η πιθανότητα το 2ο ζάρι να είναι 3 δοθέντος ότι το άθροισμα των ζαριών είναι 8;

- .

Απάντηση

- Έστω Ω ο δειγματικός χώρος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων (α, β) του πειράματος που συνίσταται στην ταυτόχρονη ρίψη δύο ζαριών με α το αποτέλεσμα του πρώτου ζαριού και β του δευτέρου. Το σύνολο Ω περιέχει 36 σημεία-ζεύγη αριθμών, τα ακόλουθα:

$$\Omega = \begin{matrix} (1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6) \\ (2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6) \\ (3,1)\ (3,2)\ (3,3)\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6) \\ (4,1)\ (4,2)\ (4,3)\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6) \\ (5,1)\ (5,2)\ (5,3)\ (5,4),\ (5,5),\ (5,6) \\ (6,1)\ (6,2)\ (6,3)\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6) \end{matrix}$$

Παράδειγμα 3.1.5 Ρίχνουμε δύο ζάρια. Ποια είναι η πιθανότητα το 2ο ζάρι να είναι 3 δοθέντος ότι το άθροισμα των ζαριών είναι 8;

- **Α= το ενδεχόμενο το 2ο ζάρι να είναι 3**
- **Β =το ενδεχόμενο το άθροισμα να είναι 8**
- A={(1,3), (2,3), (3,3), (4,3), (5,3), (6,3)},   N(A)=6
- B={(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)}, N(B)=5
- **P(A/B)=??**

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$A\cap B=\{(5,3),N\left(A\cap B\right)=1$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/36}{5/36}=\frac{1}{5}$$

Απάντηση

- Έστω Ω ο δειγματικός χώρος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων (α, β) του πειράματος που συνίσταται στην ταυτόχρονη ρίψη δύο ζαριών με α το αποτέλεσμα του πρώτου ζαριού και β του δευτέρου. Το σύνολο Ω περιέχει 36 σημεία-ζεύγη αριθμών, τα ακόλουθα:

$$\Omega = \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4), & (1,5), & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4), & (2,5), & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4), & (3,5), & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4), & (4,5), & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4), & (5,5), & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{matrix}$$

Ορίζουμε τα ενδεχομενα:

- **Α= το ενδεχόμενο το 2ο ζάρι να είναι 4,**
- **Β= το ενδεχόμενο το άθροισμα των ζαριών να είναι 8,**

Τότε το ενδεχόμενο Α περιγράφεται από το σύνολο $A=\{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3)\}$ με $N(A)=6$. Το ενδεχόμενο Β περιγράφεται από το σύνολο $B=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ με $N(B)=6$. Επιπλέον έχουμε ότι $A\cap B=\{(4,3)\}$ με $N(A\cap B)=1$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(A|B)$ καιδίνεται από τη σχέση $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ (1). Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε ότι $P(A\cap B)=\dfrac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\dfrac{1}{36}$ και $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{6}{36}$. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1/36}{6/36}=\dfrac{1}{6}$.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ

- .

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A).$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B).$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ

- .

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\,|\,A).$$

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A\,|\,B).$$

$$P\left(\Gamma\,|\,A\cap B\right)=\frac{P\left(A\cap B\cap\Gamma\right)}{P\left(A\cap B\right)}\Rightarrow$$

$$P\left(A\cap B\cap\Gamma\right)=P\left(\Gamma\,|\,A\cap B\right)\cdot P\left(A\cap B\right)=P\left(\Gamma\,|\,A\cap B\right)\cdot P\left(B\,|\,A\right)\cdot P\left(A\right)$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ

- .

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A).$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B).$$

$$P(\Gamma \mid A \cap B) = \frac{P(A \cap B \cap \Gamma)}{P(A \cap B)} \Rightarrow$$

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(\Gamma \mid A \cap B) \cdot P(A \cap B) = P(\Gamma \mid A \cap B) \cdot P(B \mid A) \cdot P(A)$$

Θεώρημα 3.2.1 (Πολλαπλασιαστικός τύπος) Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ γεγονότα ενός πειράματος τύχης έτσι ώστε να ισχύει $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) > 0$ τότε παίρνουμε ότι

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_n \mid A_{n-1} \cap A_{n-2} \cdots \cap A_1) \cdots P(A_3 \mid A_2 \cap A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1), \ \ n \geq 2$$

$$P(A_n \mid A_{n-1} \cap A_{n-2} \cap \cdots \cap A_1) P(A_{n-1} \mid A_{n-2} \cap A_{n-3} \cap \cdots \cap A_1) \cdots P(A_2 \mid A_1) P(A_1)$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ

Θεώρημα 3.2.1 (Πολλαπλασιαστικός τύπος) Αν $A_1, A_2, \dots, A_n$ γεγονότα ενός πειράματος τύχης έτσι ώστε να ισχύει $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) > 0$ τότε παίρνουμε ότι

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_n \mid A_{n-1} \cap A_{n-2} \cdots \cap A_1) \cdots P(A_3 \mid A_2 \cap A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1), \quad n \geq 2$$

Παράδειγμα 3.2.2 Θεωρούμε ένα δοχείο που περιέχει 8 άσπρες και 4 κόκκινες μπαλες. Αφαιρούμε 2 μπάλες από το δοχείο χωρίς επανατοποθέτηση.

i) Αν υποθέσουμε ότι σε κάθε αφαίρεση κάθε μπάλα που βρίσκεται στο δοχείο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί ποια είναι η πιθανότητα να είναι άσπρες και οι δύο μπάλες που θα αφαιρεθούν;

$$B_1 : P(B_2 \mid B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} \Rightarrow P(B_1 \cap B_2) = P(B_2 \mid B_1) \cdot P(B_1)$$

$$B_2 :, P(B_2 \mid B_1) = 7/11, P(B_1) = 8/12$$

$$P(B_1 \cap B_2) = ?$$

Παράδειγμα

Το πλήρωμα μιας επανδρωμένης διαστημικής πτήσης, που έχει στόχο να συλλέξει πετρώματα από το υπέδαφος της σελήνης, αποτελείται από τον κυβερνήτη, τον συγκυβερνήτη και 2 γεωλόγους. Αν για την αποστολή εκπαιδεύονται 6 πιλότοι και 5 γεωλόγοι, πόσα διαφορετικά πληρώματα μπορούν να επιλεγούν;

/

Ο κυβερνήτης και ο συγκυβερνήτης θα επιλεγούν από τους 6 πιλότους. Παρόλα αυτά έχουν διακριτούς ρόλους, δηλαδή αν ο Α και ο Β επιλεγούν , ένα πλήρωμα μπορεί να έχει τον Α κυβερνήτη και τον Β συγκυβερνήτη, ενώ ένα δεύτερο, διαφορετικό, πλήρωμα μπορεί να έχει τον Β κυβερνήτη και τον Α συγκυβερνήτη. Άρα υπάρχουν ${}_6P_2$ διατάξεις – τρόποι να επιλεγούν ο κυβερνήτης και ο συγκυβερνήτης, ενώ οι δυο γεωλόγοι μπορούν να επιλεγούν με ${}_5C_2$ τρόπους (δεν έχει σημασία για κάποιον αν θα επιλεγεί πρώτος ή δεύτερος, οι ρόλοι είναι ίδιοι). Εφαρμόζοντας την πολλαπλασιαστική αρχή καταλήγουμε στο ότι ο ζητούμενος αριθμός διαφορετικών πληρωμάτων είναι: ${}_6P_2 \cdot {}_5C_2 = \frac{6!}{4!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 300$.

Θεώρημα 3.2.1 (Πολλαπλασιαστικός τύπος) Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ γεγονότα ενός πειράματος τύχης έτσι ώστε να ισχύει $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) > 0$ τότε παίρνουμε ότι

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_n \mid A_{n-1} \cap A_{n-2} \cdots \cap A_1) \cdots P(A_3 \mid A_2 \cap A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1), \quad n \geq 2$$

Απάντηση

Θεωρούμε ένα δοχείο που περιέχει 8 άσπρες και 4 κόκκινες μπαλες. Αφαιρούμε 2 μπάλες από το δοχείο χωρίς επανατοποθέτηση.

i) **Α τρόπος:** Υποθέτουμε ότι σε κάθε αφαίρεση κάθε μπάλα που βρίσκεται στο δοχείο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί. **Θεωρούμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:**

- B_1 : **Το ενδεχόμενο ότι η πρώτη μπάλα είναι άσπρη,**
- B_2 : **Το ενδεχόμενο ότι η δεύτερη μπάλα είναι άσπρη,**

Με δεδομένο ότι η πρώτη μπάλα που επιλέγεται είναι άσπρη μένουν 7 άσπρες και 4 κόκκινες μπάλες και άρα ισχύει ότι: $P(B_2 \mid B_1) = \dfrac{7}{11}$. Επιπλέον από τα δεδομένα έχουμε ότι $P(B_1) = \dfrac{8}{12}$. Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε ότι $P(B_2 \mid B_1) = \dfrac{P(B_2 \cap B_1)}{P(B_1)}$ από όπου παίρνουμε ότι

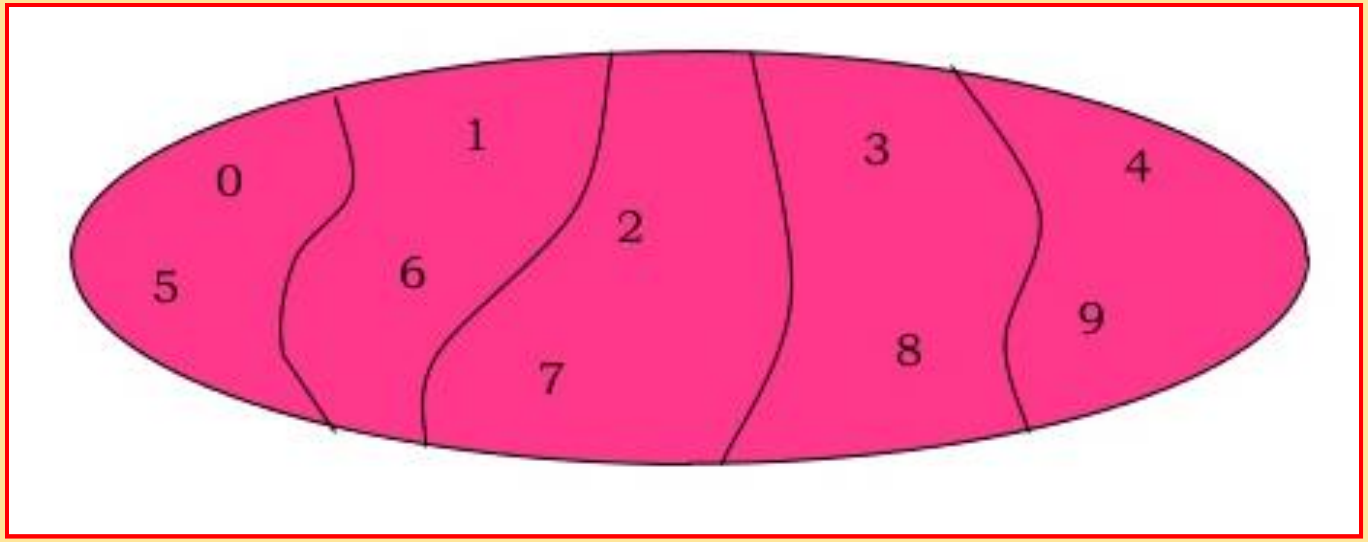
$$P(B_2 \mid B_1) = \frac{P(B_2 \cap B_1)}{P(B_1)} \Rightarrow P(B_2 \cap B_1) = P(B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1)$$

οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι ιση με: $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1) = \left(\dfrac{2}{3}\right) \cdot \left(\dfrac{7}{11}\right) = \dfrac{14}{33}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Ορισμός 3.3.1 Ορίζουμε ως **διαμέριση** ενός δειγματικού χώρου S μια συλλογή $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ενδεχομένων του S τα οποία είναι κατά ζεύγη ξένα και η ένωσή τους είναι ο S, δηλαδή ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

1. $A_i \cap A_j = \varnothing$, για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$ με $i \neq j$,
2. $S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$



ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Πρόταση 3.3.2 Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας Αν Ω ένας δειγματικός χώρος και $B \subseteq \Omega$ ένα ενδεχόμενο του τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $0 < P(B) < 1$. Τότε για κάθε ενδεχόμενο A του ίδιου δειγματικού χώρου ισχύει ο τύπος,

$$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B')P(B'). \quad (1)$$

Θεώρημα 3.3.4 Γενίκευση Θεωρήματος της Ολικής Πιθανότητας

Αν τα ενδεχόμενα $B_1, B_2, \ldots, B_n$ αποτελούν μια διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε $P(B_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ τότε για κάθε ενδεχόμενο A με $P(A) > 0$ ισχύει:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \cdots + P(A \mid B_n)P(B_n)$$

Παράδειγμα

Ο Ολυμπιακός έχει ήδη προκριθεί στον τελικό του Κυπέλλου Ελλάδος και περιμένει τον νικητή του ζευγαριού Άρης - ΠΑΟΚ. Για αυτό το παιχνίδι τα γραφεία στοιχημάτων δίνουν 40% πιθανότητα στον Άρη να προκριθεί. Επίσης τα ίδια γραφεία εκτιμούν ότι **αν προκριθεί ο Άρης, ο Ολυμπιακός έχει 60% πιθανότητα να τον κερδίσει**, ενώ **αν προκριθεί ο ΠΑΟΚ, οι πιθανότητες είναι μοιρασμένες**. Ποια η πιθανότητα να πάρει ο Ολυμπιακός το Κύπελλο Ελλάδας αυτή τη χρονιά;

Ο το ενδεχόμενο ο **Ολυμπιακος** να κερδίσει το κύπελλο

Α το ενδεχόμενο να προκριθεί ο Άρης στον τελικό.

$P(A)=0.4$, $P(A^c) = 0{,}6$, $P(O \mid A) = 0{,}6$, $P(O \mid A^c) = 0{,}5$.

$\mathbf{P(O)} = P(O \mid A)\cdot P(A) + P(O \mid A^c)\cdot P(A^c)$

Παράδειγμα

Ένας επαγγελματίας γευσιγνώστης ειδικός στην γαλλική και ιταλική κουζίνα που συνεργάζεται με το περιοδικό «Ας φάμε έξω» γράφει καλές κριτικές για το 60% των ιταλικών και το 70% των γαλλικών εστιατορίων που επισκέπτεται. Στους 6 μήνες συνεργασίας του με το περιοδικό έχει επισκεφτεί 40 ιταλικά και 10 γαλλικά εστιατόρια:

(i) Ποια η πιθανότητα η επόμενη του επίσκεψη σε εστιατόριο να καταλήξει σε θετική κριτική;

Α : το ενδεχόμενο ένα εστιατόριο να πάρει θετική κριτική P(A)=?

Β: το ενδεχόμενο να είναι ιταλικό , $P(B) = 0,8$

Γ :να είναι γαλλικό, $P(\Gamma) = 0,2$, $P(A|B) = 0,6$, $P(A|\Gamma) = 0,7$

$$P(A) = P(A \mid B) \cdot P(B) + P(A \mid \Gamma) \cdot P(\Gamma) = 0,6 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,2 = 0,38$$

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ BAYES

Θεώρημα 3.4.1 (Τύπος του Bayes) Αν $B_1, B_2, \ldots, B_n$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε $P(B_i) > 0$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε για κάθε ενδεχόμενο Α του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A) > 0$ ισχύει ότι,

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \cdots + P(A \mid B_n)P(B_n)} = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Θεώρημα 3.4.2 (Τύπος του Bayes) Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε $P(A_i) > 0$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε για κάθε ενδεχόμενο Α του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(B) > 0$ ισχύει ότι,

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \cdots + P(B \mid A_n)P(A_n)} = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)P(A_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ BAYES

Θεώρημα 3.4.1 (Τύπος του Bayes) Αν $B_1, B_2, \ldots, B_n$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε $P(B_i) > 0$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε για κάθε ενδεχόμενο A του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A) > 0$ ισχύει ότι,

$$P(B_i | A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Παρατήρηση 3.4.3 Στην ειδική περίπτωση όπου έχουμε $n = 2$ και $B_1 = B$, $B_2 = B'$ το **Θεώρημα του Bayes** γράφεται στη μορφή, $P(B_1 | A) = P(B|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')}$ και

$$P(B'|A) = \frac{P(A|B')P(B')}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')}.$$

Παράδειγμα Ένας επαγγελματίας γευσιγνώστης ειδικός στην γαλλική και ιταλική κουζίνα που συνεργάζεται με το περιοδικό «Ας φάμε έξω» γράφει καλές κριτικές για το 60% των ιταλικών και το 70% των γαλλικών εστιατορίων που επισκέπτεται.

Στους 6 μήνες συνεργασίας του με το περιοδικό έχει επισκεφτεί 40 ιταλικά και 10 γαλλικά εστιατόρια:

(i) Ποια η πιθανότητα η επόμενη του επίσκεψη σε εστιατόριο να καταλήξει σε θετική κριτική;

(ii) Αν η κριτική που έγραψε για ένα νέο εστιατόριο ήταν θετική, ποια η πιθανότητα αυτό να ήταν ιταλικό;

Λύση

Α : το ενδεχόμενο ένα εστιατόριο να πάρει θετική κριτική $P(A)=?$

Β: το ενδεχόμενο να είναι ιταλικό , $P(B) = 0,8$

Γ :να είναι γαλλικό, $P(\Gamma) = 0,2$, $P(A|B) = 0,6$, $P(A|\Gamma) = 0,7$

$$P(A) = P(A|B)\cdot P(B) + P(A|\Gamma)\cdot P(\Gamma) = 0,6\cdot 0,8 + 0,7\cdot 0,2 = 0,38$$

ενδεχόμενο Β|Α

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A|B)\cdot P(B) + P(A|\Gamma)P(\Gamma)}}$$

Διαφάνειες από **το ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΒΙΒΛΙΟ (ΜΕΣΩ του ΕΥΔΟΞΟΥ)**

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Εφαρμογές με python , R, SPSS, Matlab

Συγγραφέας Μιχαήλ Φιλιππακης Καθηγητής Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Εκδόσεις Τσότρας, Αθηνα 2019