Πανεπιστήμιο Πειραιώς
Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων

ΒΙΟΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Καθηγητής
Μιχαήλ Φιλιππάκης

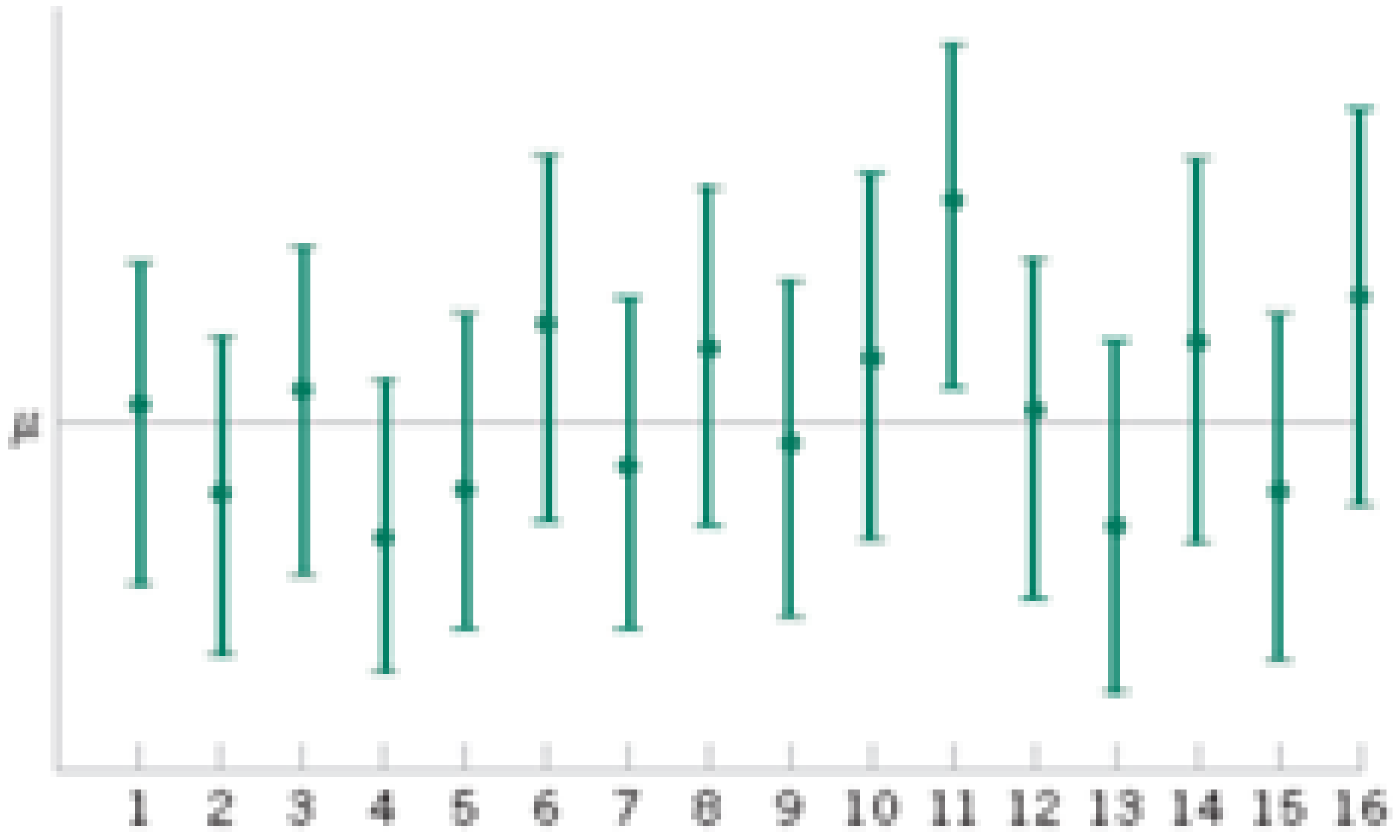
Σημειακή & Διαστημική Εκτίμηση …

- Για παράδειγμα, υποθέστε ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το καλοκαιρινό μέσο εισόδημα μιας τάξης φοιτητών της επιχειρηματικότητας. Για *n*=25 φοιτητές, $\bar{x}$ υπολογίζεται να είναι 400 $/εβδομάδα.

- σημειακή εκτίμηση

διαστημική εκτίμηση

- Μία εναλλακτική αναφορά είναι:
- Το μέσο εισόδημα κυμαίνεται ***μεταξύ*** 380 και 420 $/εβδομάδα.



μ
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16

1) Εκτιμώντας το μ όταν το σ είναι γνωστό …

- Μπορούμε να υπολογίσουμε ένα διαστημικό εκτιμητή από μια δειγματοληπτική κατανομή, ως εξής:
- Επιλέγοντας ένα δείγμα μεγέθους *n* από έναν πληθυσμό
- Υπολογίζοντας την μέση τιμή, $\bar{x}$
- Και, από το κεντρικό οριακό θεώρημα, γνωρίζουμε ότι Χ ακολουθεί κανονική (ή προσεγγιστικά κανονική κατανομή) κατανεμημένο ως …

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- …ως τυπική κανονική κατανομή (ή προσεγγιστικά κανονική) κατανομή.

Εκτιμώντας το $\boldsymbol{\mu}$ όταν το $\boldsymbol{\sigma}$ είναι γνωστό …

- Εξετάζοντας το πιο προσεκτικά …

τυπική κανονική κατανομή (γνωστό)

δειγματοληπτική μέση τιμή (γνωστή)

Μέση τιμή του πληθυσμού, άγνωστη και θέλουμε να την εκτιμήσουμε

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Τυπική απόκλιση του πληθυσμού, **(υποθέτουμε** ότι είναι γνωστή**)**

Ο αριθμός του δείγματος, (γνωστό)

Εκτιμώντας το $\boldsymbol{\mu}$ όταν το $\boldsymbol{\sigma}$ είναι γνωστό …

Το διάστημα εμπιστοσύνης

- Συμβολίζουμε: $$P\left(\overbrace{\mu - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{x} \le \mu + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1-\alpha$$

Η δειγματοληπτική μέση τιμή βρίσκεται μέσα στο διάστημα…

$\bar{X} - \mu$

- Έτσι, η ***πιθανότητα*** ότι το διάστημα:

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \left\{\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$$

- περικλείει την μέση τιμή του πληθυσμού, $\boldsymbol{\mu}$, είναι 1-α. Αυτή είναι μία ***εκτιμήτρια για διάστημα εμπιστοσύνης για μ***.

-

- .

$$1-a = P\left(-z_{a/2} \le Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{a/2}\right) =$$

$$P\left(-z_{a/2}\,\sigma/\sqrt{n} \le \bar{X}-\mu \le \sigma/\sqrt{n}\,z_{a/2}\right) =$$

$$= P\left(-\bar{X}-z_{a/2}\,\sigma/\sqrt{n} \le -\mu \le -\bar{X}+\sigma/\sqrt{n}\,z_{a/2}\right) =$$

$$= P\left(\bar{X}+z_{a/2}\,\sigma/\sqrt{n} \ge \mu \ge \bar{X}-\sigma/\sqrt{n}\,z_{a/2}\right) =$$

$$P\left(\bar{X}-\sigma/\sqrt{n}\,z_{a/2} \le \mu \le \bar{X}+z_{a/2}\,\sigma/\sqrt{n}\right) =$$

Εκτιμήτρια Διαστήματος εμπιστοσύνης για μ:

- Η πιθανότητα 1–*α* καλείται ***επίπεδο εμπιστοσύνης***.

Συνήθως παριστάνεται με ένα συν/πλην (±) πρόσημο

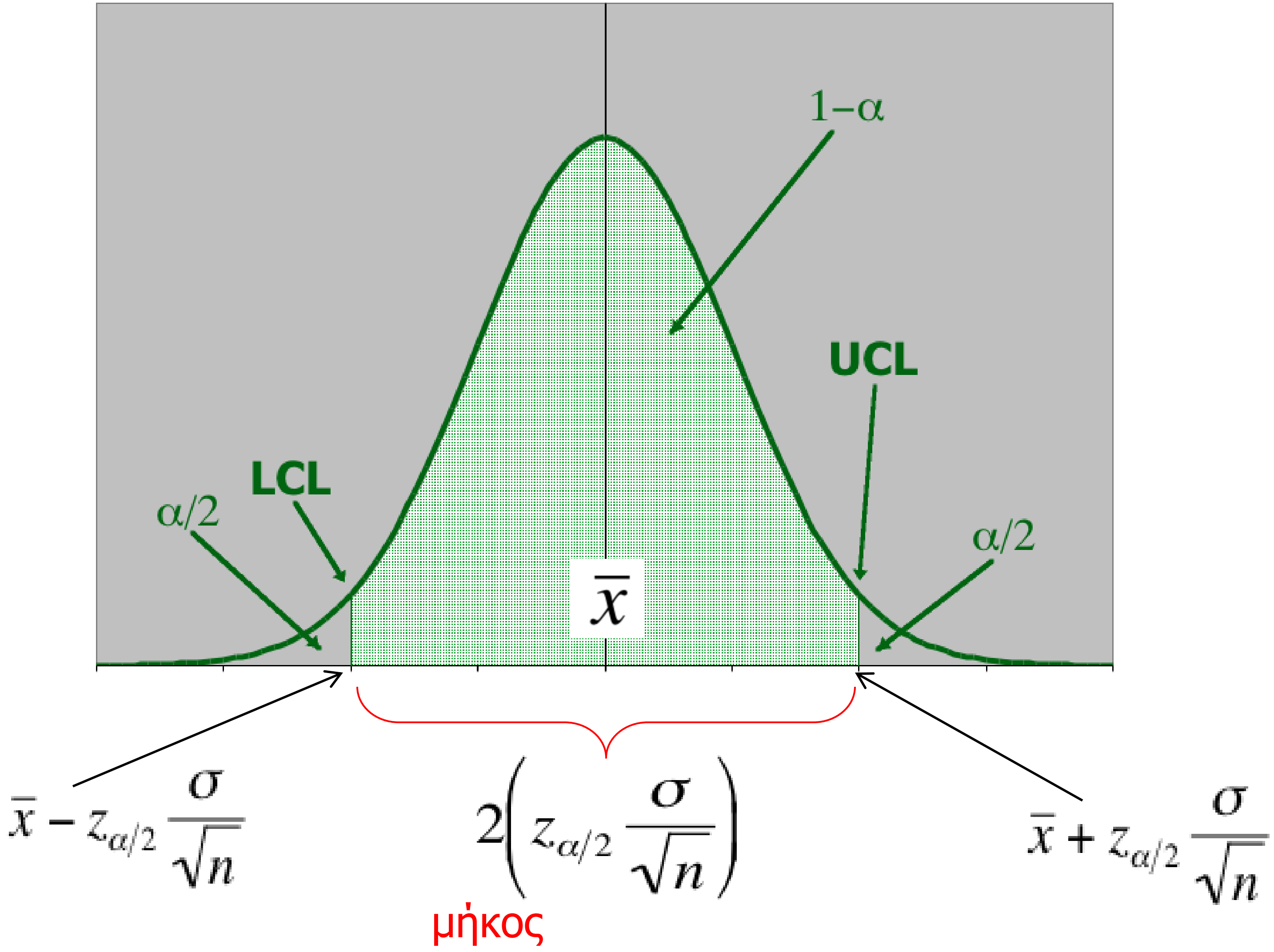
Άνω Φράγμα Εμπιστοσύνης (ΚΦΕ ή UCL)

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \left\{ \bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

Κάτω Φράγμα Εμπιστοσύνης (ΚΦΕ ή LCL)

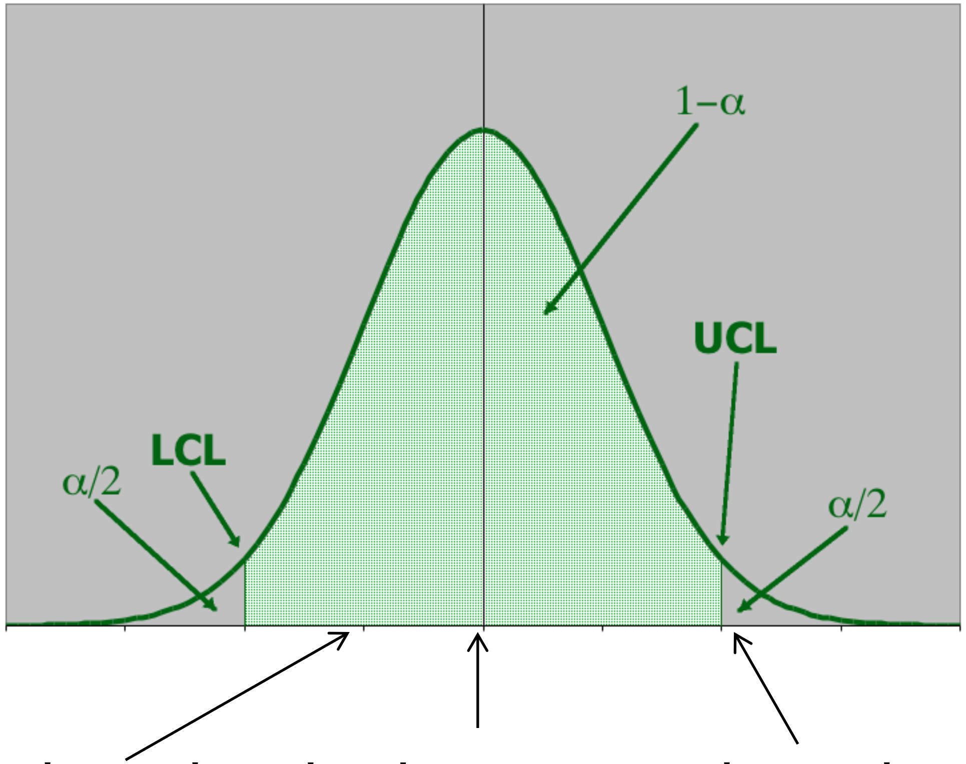
Γραφικά ...

- ...εδώ είναι το διάστημα εμπιστοσύνης για $\boldsymbol{\mu}$:



Γραφικά …

- …η ***πραγματική*** τοποθεσία της μέσης τιμής του πληθυσμού…



…μπορεί να είναι εδώ… …ή εδώ… …ή πιθανώς ακόμα και εδώ…

Η μέση τιμή του πληθυσμού είναι σταθερή αλλά ***άγνωστη*** ποσότητα. Είναι λάθος να ερμηνεύσουμε την εκτιμήτρια ενός διαστήματος εμπιστοσύνης σαν μία αναφορά σε μία πιθανότητα σχετικά με το ***μ***. Το διάστημα ενεργεί ως τα κάτω και άνω φράγματα του διαστημικού ***εκτιμητή*** της μέση τιμή του πληθυσμού.

μ

Τέσσερα επίπεδα εμπιστοσύνης που χρησιμοποιούνται πιο συχνά …

- Επίπεδο εμπιστοσύνης

βάλτε το κάπου εύκαιρα!

$1-\alpha$	α	$\alpha/2$	$z_{\alpha/2}$
.90	.10	.05	$z_{.05} = 1.645$
.95	.05	.025	$z_{.025} = 1.96$
.98	.02	.01	$z_{.01} = 2.33$
.99	.01	.005	$z_{.005} = 2.575$

Table 10.1

Παράδειγμα 1 …

- Μία εταιρία υπολογιστών παίρνει δείγμα για την ζήτηση των υπολογιστών κατά την διάρκεια βασικών περιόδων για 25 περιόδους:

235	374	309	499	253
421	361	514	462	369
394	439	348	344	330
261	374	302	466	535
386	316	296	332	334

- Είναι γνωστό ότι η τυπική απόκλιση της ζήτησης κατά βασικών περιόδων είναι 75 υπολογιστές. Θέλουμε να εκτιμήσουμε την ***μέση τιμή*** της ζήτησης σε βασικές χρονικές περιόδους με 95% εμπιστοσύνη με σκοπό να εκτιμήσουμε επίπεδα αποθεμάτων …

Παράδειγμα 1 …

- «Θέλουμε να εκτιμήσουμε την ***μέση τιμή*** της ζήτησης σε βασικές χρονικές περιόδους με 95% εμπιστοσύνη με σκοπό να εκτιμήσουμε επίπεδα αποθεμάτων …»

Αναγνωρίστε την παράμετρο

- Έτσι, η παράμετρο που θέλουμε να εκτιμήσουμε είναι η μέση τιμή του πληθυσμού: ***μ***

- Και έτσι η εκτιμήτρια του διαστήματος εμπιστοσύνης για το μ είναι.
- $$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Παράδειγμα 1 …

Υπολογίστε

- Με σκοπό να χρησιμοποιήσουμε την εκτιμήτρια του διαστήματος εμπιστοσύνης για το μ, χρειαζόμαστε τις ακόλουθες ποσότητες:

$\bar{x}$	370.16
$z_{\alpha/2}$	1.96
σ	75
n	25

υπολογισμένη από τα δεδομένα…

$$1-\alpha = .95,\ \therefore \alpha/2 = .025$$

$$so\ \ z_{\alpha/2} = z_{.025} = 1.96$$

δίνεται

- επομένως: $\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 370.16 \pm z_{.025}\dfrac{75}{\sqrt{25}} = 370.16 \pm 1.96\dfrac{75}{\sqrt{25}} = 370.16 \pm 29.40$

- Τα **κάτω** και **άνω** φράγματα εμπιστοσύνης είναι 340.76 and 399.56.

Ερμηνεύστε

Παράδειγμα 1…

- Η εκτίμηση της μέσης τιμής για την ζήτηση υπολογιστών κατά την διάρκεια βασικών περιόδων κυμαίνεται μεταξύ 340.76 και 399.56 — μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό ως μέσον για να αναπτύξουμε μία τακτική για τα αποθέματα.

- Δηλαδή, εκτιμούμε ότι η μέση τιμή ζήτησης υπολογιστών κατά την διάρκεια βασικών περιόδων κυμαίνεται μεταξύ 340.76 και 399.56 — και αυτός ο τύπος της εκτιμήτριας είναι σωστή 95% των φορών. Αυτό επίσης σημαίνει ότι 5% των φορών θα είναι λανθασμένη.

- Παρεμπιπτόντως, τα μέσα συχνά αναφέρονται, αντί για 95%, ως «19 φορές από τις 20», το οποίο δίνει έμφαση στην ***μακροχρόνια*** όψη του επιπέδου εμπιστοσύνης.

Εύρος Διαστήματος…

- ***Το εύρος διαστήματος εξασφαλίζει λίγη πληροφόρηση.***

- Για παράδειγμα, υποθέστε ότι εκτιμούμε με 95% εμπιστοσύνη ότι ο μέσος μισθός του λογιστή είναι μεταξύ $15,000 και $100,000.

- ***Σε αντίθεση*** με αυτό: ένα άλλο 95% διάστημα εμπιστοσύνης εκτιμάει ότι οι αρχικοί μισθοί είναι μεταξύ $42,000 και $45,000.

- Η δεύτερη εκτιμήτρια είναι πολύ πιο στενή, εξασφαλίζοντας πιο ακριβή πληροφόρηση σχετικά με τους αρχικούς μισθούς.

Εύρος Διαστήματος…

- Το εύρος ενός διαστήματος εμπιστοσύνης είναι μία συνάρτηση του επιπέδου εμπιστοσύνης, η τυπική απόκλιση του πληθυσμού, και το μέγεθος του δείγματος…

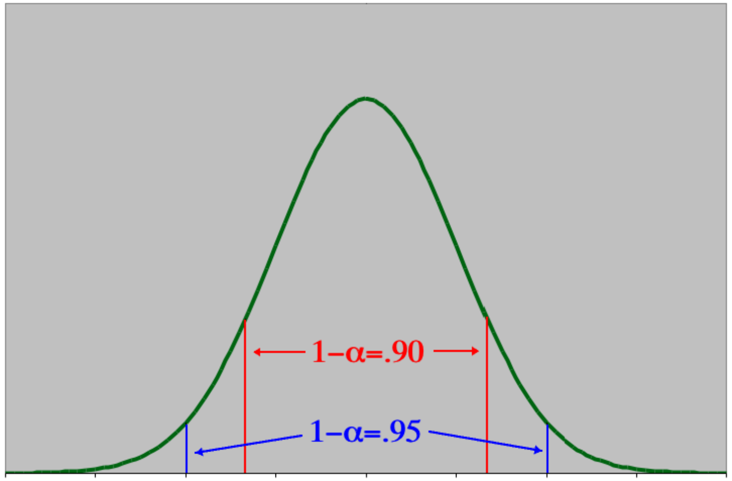
$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Εύρος Διαστήματος…

- Το εύρος ενός διαστήματος εμπιστοσύνης είναι μία συνάρτηση του επιπέδου εμπιστοσύνης, η τυπική απόκλιση του πληθυσμού, και το μέγεθος του δείγματος…

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Ένα μεγαλύτερο επίπεδο
- εμπιστοσύνης εξασφαλίζει
- ένα **ευρύτερο** διάστημα
- εμπιστοσύνης:

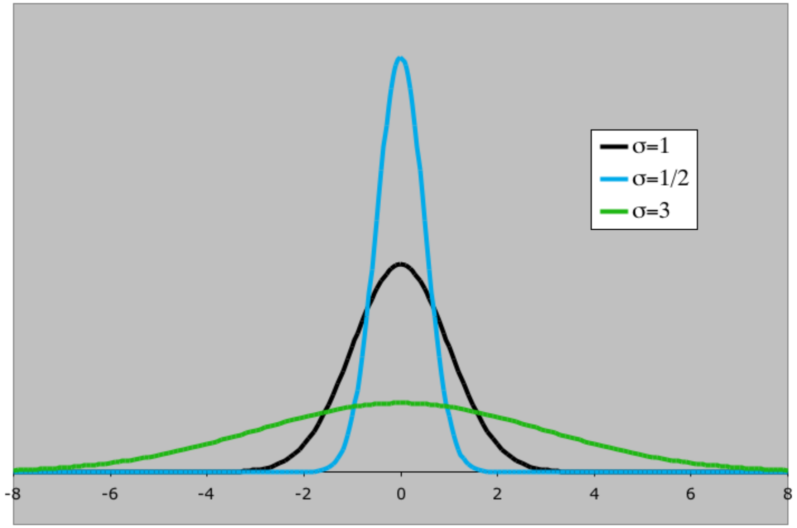


Εύρος Διαστήματος…

- Το εύρος ενός διαστήματος εμπιστοσύνης είναι μία συνάρτηση του επιπέδου εμπιστοσύνης, η τυπική απόκλιση του πληθυσμού, και το μέγεθος του δείγματος…

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Πιο απομακρυσμένες τιμές
- εξασφαλίζουν **ευρύτερα**
- διαστήματα εμπιστοσύνης:
-



Εύρος Διαστήματος…

- Το εύρος ενός διαστήματος εμπιστοσύνης είναι μία συνάρτηση του επιπέδου εμπιστοσύνης, η τυπική απόκλιση του πληθυσμού, και το μέγεθος του δείγματος…
- $$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\boxed{\sqrt{n}}}$$

- Αυξάνοντας το μέγεθος του δείγματος μειώνει το εύρος του διαστήματος εμπιστοσύνης ενώ το εύρος του διαστήματος εμπιστοσύνης παραμένει αμετάβλητο.
- Σημειώστε: αυτό επίσης αυξάνει το ***κόστος*** το να πετύχουμε επιπρόσθετα δεδομένα

Επιλέγοντας το Μέγεθος του Δείγματος …

- Μπορούμε να ελέγξουμε το εύρος του διαστήματος, καθορίζοντας το μέγεθος του δείγματος αναγκαίο να παράγει στενά διαστήματα.

- Υποθέστε ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε την μέση τιμή ζήτησης «εντός 5 μονάδων», π.χ. θέλουμε την ε $\bar{x} \pm 5$ ρια του διαστήματος να είναι:

- Αφού: $$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Επακολουθεί ότι $$z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \boxed{5}$$

Λύστε ως προς **n** για να πετύχετε το αναγκαίο μέγεθος του δείγματος!

Επιλέγοντας το Μέγεθος του Δείγματος …

- Λύνοντας - $n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{5}\right)^2 = \left(\frac{(1.96)(75)}{5}\right)^2 = 865$

- Δηλαδή, να εξασφαλίσει μία 95% διαστήματος εμπιστοσύνης εκτιμήτρια της μέσης τιμής (±5 units), χρειαζόμαστε ως δείγμα 865 βασικές χρονικές στιγμές (έναντι των 25 δεδομένων που είχαμε πρόσφατα).

Μέγεθος του δείγματος για την Εκτίμηση της Μέσης Τιμή…

- Ο γενικός τύπος για το μέγεθος του δείγματος απαιτούμενος για την εκτίμηση της μέσης τιμής του πληθυσμού με ένα διάστημα: $\bar{x} \pm W$

- Απαιτείται μέγεθος δείγματος τουλάχιστον τόσο στο μέγεθος:

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{W} \right)^2$$

Παράδειγμα 2…

- Μία εταιρία ξυλείας πρέπει να εκτιμήσει την μέση τιμή της διαμέτρου των δέντρων για να καθορίσει εάν ή όχι υπάρχει επαρκής ξυλεία για να θερίσουν μια περιοχή του δάσους. Χρειάζεται να εκτιμήσουμε την διάμετρο εντός 1 ίντσας με επίπεδο εμπιστοσύνης 99%. Η διάμετρος του δέντρου είναι κανονικά κατανεμημένη με τυπική απόκλιση 6 ιντσών.

- Πόσα δέντρα χρειάζονται στο δείγμα?

Παράδειγμα 2…

- Πράγματα που γνωρίζουμε:

- Επίπεδο εμπιστοσύνης = 99%, επομένως α =.01

$1-\alpha$	α	$\alpha/2$	$z_{\alpha/2}$
.90	.10	.05	$z_{.05} = 1.645$
.95	.05	.025	$z_{.025} = 1.96$
.98	.02	.01	$z_{.01} = 2.33$
.99	.01	.005	$z_{.005} = 2.575$

$$z_{\alpha/2} = z_{.005} = 2.575$$

- Θέλουμε $\bar{x} \pm 1$ εκ' τούτου W=1.
- Μας δίνεται ότι $\boldsymbol{\sigma}$ = 6.

Παράδειγμα 2…

- Υπολογίζουμε …

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{W} \right)^2 = \left(\frac{(2.575)(6)}{1} \right)^2 = 239$$

- Δηλαδή, θα χρειαστούμε δείγμα τουλάχιστον 239 δέντρων για να έχουμε ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης του $\bar{x} \pm 1$

2) Εκτιμώντας το μ όταν το σ είναι άγνωστο …(αλλά το δείγμα n>=30)

- Μπορούμε να υπολογίσουμε ένα διαστημικό εκτιμητή από μια δειγματοληπτική κατανομή, ως εξής: $\bar{x}$
- Επιλέγοντας ένα δείγμα μεγέθους *n* από έναν πληθυσμό
- Υπολογίζοντας την μέση τιμή,
- Και, από το κεντρικό οριακό θεώρημα, γνωρίζουμε ότι X ακολουθεί κανονική (ή προσεγγιστικά κανονική κατανομή) κατανεμημένο ως …

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}} \qquad Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- …ως τυπική κανονική κατανομή (ή προσεγγιστικά κανονική) κατανομή.

Εκτιμώντας το μ όταν το σ είναι άγνωστό ...(αλλά το δείγμα n>=30),

δειγματική τυπική κανονική κατανομή (άγνωστό)

δειγματοληπτική μέση τιμή (γνωστή)

- Εξετάζοντας το πιο προσεκτικά ...

Μέση τιμή του πληθυσμού, άγνωστη και θέλουμε να την εκτιμήσουμε

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}}$$

Δειγματική τυπική απόκλιση του πληθυσμού, **(υποθέτουμε** ότι είναι άγνωστή**)**

Ο αριθμός του δείγματος, (γνωστό)

Εκτιμώντας το ***μ*** όταν το ***σ*** είναι άγνωστό …

Το διάστημα εμπιστοσύνης

- Συμβολίζουμε:

$$P\left(\mu - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \bar{x} \le \mu + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Η δειγματοληπτική μέση τιμή βρίσκεται μέσα στο διάστημα…

- Έτσι, η ***πιθανότητα*** ότι το διάστημα:

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} = \left\{\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right\}$$

- περικλείει την μέση τιμή του πληθυσμού, ***μ,*** είναι 1-*α*. Αυτή είναι μία ***εκτιμήτρια για διάστημα εμπιστοσύνης για μ***.

Εκτιμήτρια Διαστήματος εμπιστοσύνης για μ:

- Η πιθανότητα 1–*α* καλείται ***επίπεδο εμπιστοσύνης***.

Συνήθως παριστάνεται με ένα συν/πλην (±) πρόσημο

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} = \left\{ \bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right\}$$

Άνω Φράγμα Εμπιστοσύνης (ΚΦΕ ή UCL)

Κάτω Φράγμα Εμπιστοσύνης (ΚΦΕ ή LCL)

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

$\mu \quad \bar{X}$

$\sigma^2 = \mathrm{Var} \quad S^2$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad S = \sqrt{S^2}$

Παράδειγμα

$$\sigma^2 = 25, n = 20$$

$$1 - a = 0.95 \Rightarrow a = 0.05$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

- Ένα διεγερτικό φάρμακο ελέγχεται για την επίδραση του στην πίεση του αίματος. Οι πιέσεις αίματος 20 ατόμων μετρούνται μισή ώρα πριν και μετά τη λήψη του φαρμάκου και λαμβάνονται οι **παρακάτω διαφορές**

7	6	0	8	-9	-4	0	1	-9	1
2	7	0	6	-6	-5	-1	6	-2	4

- Να κατασκευαστεί **ένα 95% Δ.Ε. για τη μέση διαφορά μ** της πίεσης του αίματος αν από προηγούμενες μελέτες είναι γνωστό ότι ή πριν ή και μετά τη λήψη, διαφοράς πιέσεων ακολουθεί **κανονική κατανομή** με **διακύμανση 25** και ii) αν δεν γνωρίζουμε τη διακύμανση.

Να κατασκευαστεί ένα 95% Δ.Ε. για τη μέση διαφορά μ της πίεσης του αίματος αν από προηγούμενες μελέτες είναι γνωστό ότι ή πριν ή και μετά τη λήψη, διαφοράς πιέσεων ακολουθεί κανονική κατανομή με διακύμανση 25 και

- Η διακύμανση είναι **γνωστή** άρα η τυπική απόκλιση είναι σ=5 από **κανονικό πληθυσμό** και ζητάμε **Δ.Ε. για τη μέση τιμή μ από κανονικό πληθυσμό**
- Χρησιμοποιούμε η **δειγματική συνάρτηση** και άρα το (1-a)% **ΔΕ είναι το**

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$$

$$\boxed{\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]}$$

$$\left[0.6 - z_{0.025} \cdot \frac{5}{\sqrt{20}},\ 0.6 + z_{0.025} \cdot \frac{5}{\sqrt{20}}\right]$$

- $z_{\alpha} : P\left(Z \geq z_{\alpha}\right) = a$
- $z_{\alpha/2} : P\left(Z \geq z_{\alpha/2}\right) = a/2$

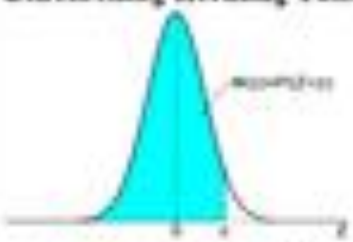
$$P(A^{c}) = 1 - P(A)$$

$$P\left(Z \geq z_{0.025}\right) = 0.025 \Leftrightarrow 1 - P\left(Z < z_{0.025}\right) = 0.025 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\Leftrightarrow P\left(Z < z_{0.025}\right) = 0.975}$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z < z_{0.025}\right) = 0.975$$

Στατιστικός Πίνακας Τυπικής Κανονικής Κατανομής



Παραδείγματα:

$z = 1.28 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0.90$

$z = 1.65 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0.95$

$z = 2.33 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0.99$

$z = 3.08 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0.999$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

- Συνεπώς αναζητούμε στο εσωτερικό του πίνακα της τυπικής κανονικής την τιμή 1-α/2=0.975. Η τιμή αυτή φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Προκύπτει ότι

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
[illegible]	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

$$\boxed{z_{0.05/2} = z_{0.025} = 1.96}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow P\left(Z < z_{0.025}\right) = 0.975}$$

. a=0.1, $1-{}^{a}\!/_{2}=0.95$

$z_{a/2} = ????$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
[illegible]	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

. P.x.2 a=0.1 Συνεπώς αναζητούμε στο εσωτερικό του πίνακα της τυπικής κανονικής την τιμή 1-α/2=0.95. Η τιμή αυτή φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Προκύπτει ότι

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	[illegible]
1.5	[illegible]	[illegible]	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	[illegible]	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	[illegible]	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.9989	.9989	.9990	.9990

$$\boxed{1-a/2=0.95}$$

$$\boxed{z_{0.1/2}=z_{0.05}=1.645}$$

. P.x.3 1-a=98%   a=0,02 a/2=0,01   1-a/2=0,99

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	[illegible]
1.5	[illegible]	[illegible]	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	[illegible]	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	[illegible]	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
[illegible]	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

p.x.3 1-a=0.98 a=0.02 a/2=0.01 **1-a/2=0.99**

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	[illegible]	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	[illegible]	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
[illegible]	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

$$\boxed{z_{0.02/2} = z_{0.01} = 2.33}$$

p.x.4 1-a=0.99,a=0.01 a/2=0.005 **1-a/2=0.995**

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	[illegible]	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
[illegible]	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

$$\boxed{z_{0.02/2} = z_{0.01} = 2.33}$$

p.x.4 1-a=0.99,a=0.01 a/2=0.005

1-a/2=0.995

2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

$$\boxed{z_{0.01/2} = z_{0.005} = 2.575}$$

- $$\boxed{\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]}$$

$$\boxed{z_{\alpha/2} = 1.96}$$

- .

$$\boxed{\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{12}{20} = 0.6}$$

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[0.6 - 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{20}}, 0.6 + 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{20}}\right] =$$

$$= [-1.59, 2.79]$$

Παρατήρηση

- Δεν γράφουμε ποτέ ότι $\boxed{P(-1.59 \le \mu \le 2,79) = 0,95}$
- Αναφέρουμε ότι έχουμε 95% εμπιστοσύνη ότι ισχύει η σχέση

$$-1.59 \le \mu \le 2,79$$

- $$\boxed{\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]}$$

$$\boxed{z_{\alpha/2} = 1.96}$$

- .

$$\boxed{\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{12}{20} = 0.6}$$

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[0.6 - 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{20}}, 0.6 + 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{20}}\right] =$$

$$= [-1.59, 2.79]$$

ii) Να κατασκευαστεί ένα 95% Δ.Ε. για τη μέση διαφορά μ της πίεσης του αίματος ii) αν δεν γνωρίζουμε τη διακύμανση. σ άγνωστο

7	6	0	8	-9	-4	0	1	-9	1
2	7	0	6	-6	-5	-1	6	-2	4

Να κατασκευαστεί ένα 95% Δ.Ε. για τη μέση διαφορά μ της πίεσης του αίματος αν από προηγούμενες μελέτες είναι γνωστό ότι ή πριν ή και μετά τη λήψη, διαφοράς πιέσεων ακολουθεί κανονική κατανομή με διακύμανση 25 και

- Η διακύμανση είναι **άγνωστη** από κανονικό πληθυσμό και ζητάμε Δ.Ε. για τη μέση τιμή μ από κανονικό πληθυσμό
- Χρησιμοποιούμε η δειγματική συνάρτηση και άρα το ΔΕ είναι το

$$\boxed{T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}}$$

$$\boxed{\left[\bar{X} - t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]}$$

- $$\left[\bar{X} - t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} \cdot n$$

- Έχουμε 1-α=0.95 άρα α=0.05 και άρα α/2=0.025
- Η τιμή αυτή φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Προκύπτει ότι

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right\} =$$

$$== \frac{1}{20-1}\left\{536 - \frac{1}{20}12^2\right\} = 27.83$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{12}{20} = 0.6$$

$$S = \sqrt{S^2} = 5.28$$

$$\boxed{\left[\bar{X} - t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]}$$

$$t_{n-1,\alpha/2} = t_{19,0.025} = 2.093$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{12}{20} = 0.6$$

- Άρα παίρνουμε

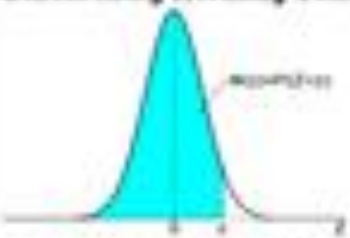
$$\left[\bar{X} - t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = \left[0.6 - 2.093 \cdot \frac{5.28}{\sqrt{20}}, 0.6 - 2.093 \cdot \frac{5.28}{\sqrt{20}}\right] =$$

$$= \left[-1.87, 3.07\right]$$

n	α=.10	α=.05	α=.025	α=.01	α=.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.92	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.44	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.86	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.25
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.35	1.771	2.16	2.65	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.12	2.583	2.921
17	1.333	1.74	2.11	2.567	2.898
18	1.33	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.08	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.5	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.06	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.31	1.697	2.042	2.457	2.75

$$t_{n-1,\alpha/2} = t_{19,0.025} = 2.093$$

Στατιστικός Πίνακας Τυπικής Κανονική Κατανομής



Παράδειγμα:

$z = 1.28 \Longleftrightarrow \Phi(z) = 0.90$

$z = 1.65 \Longleftrightarrow \Phi(z) = 0.95$

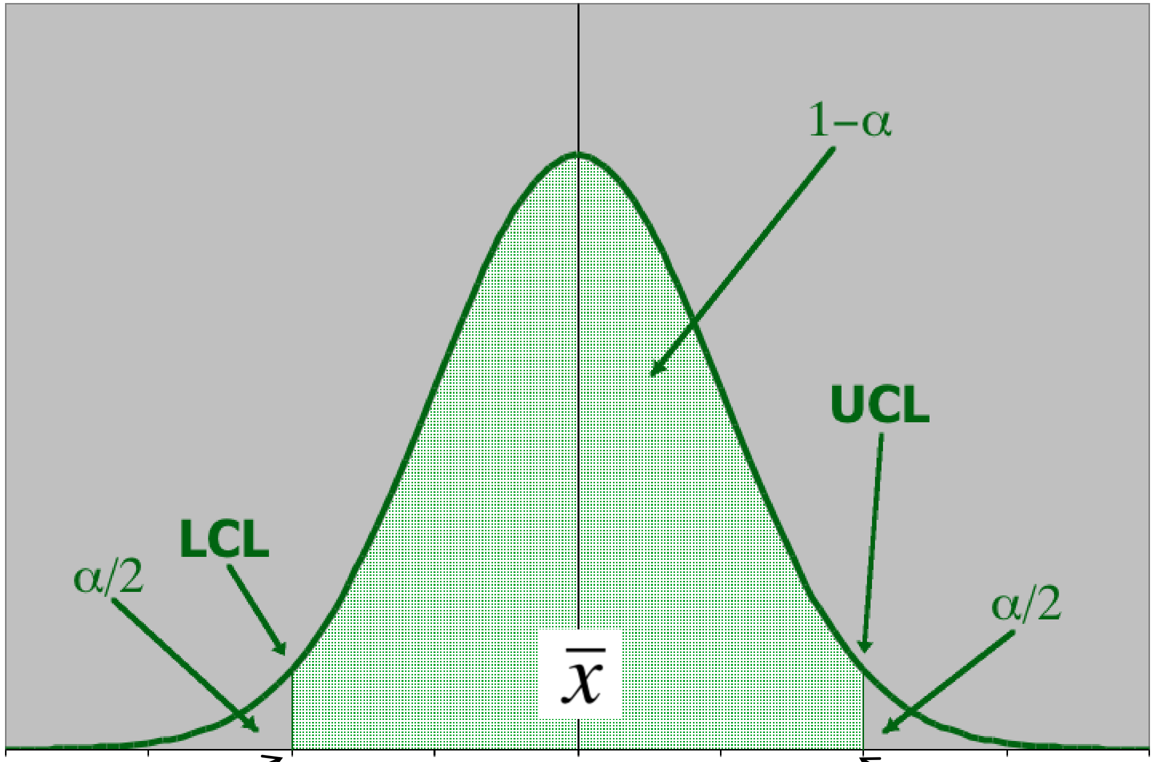
$z = 2.33 \Longleftrightarrow \Phi(z) = 0.99$

$z = 3.08 \Longleftrightarrow \Phi(z) = 0.999$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7643	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Γραφικά ...

- ...εδώ είναι το διάστημα εμπιστοσύνης για $\boldsymbol{\mu}$:



$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

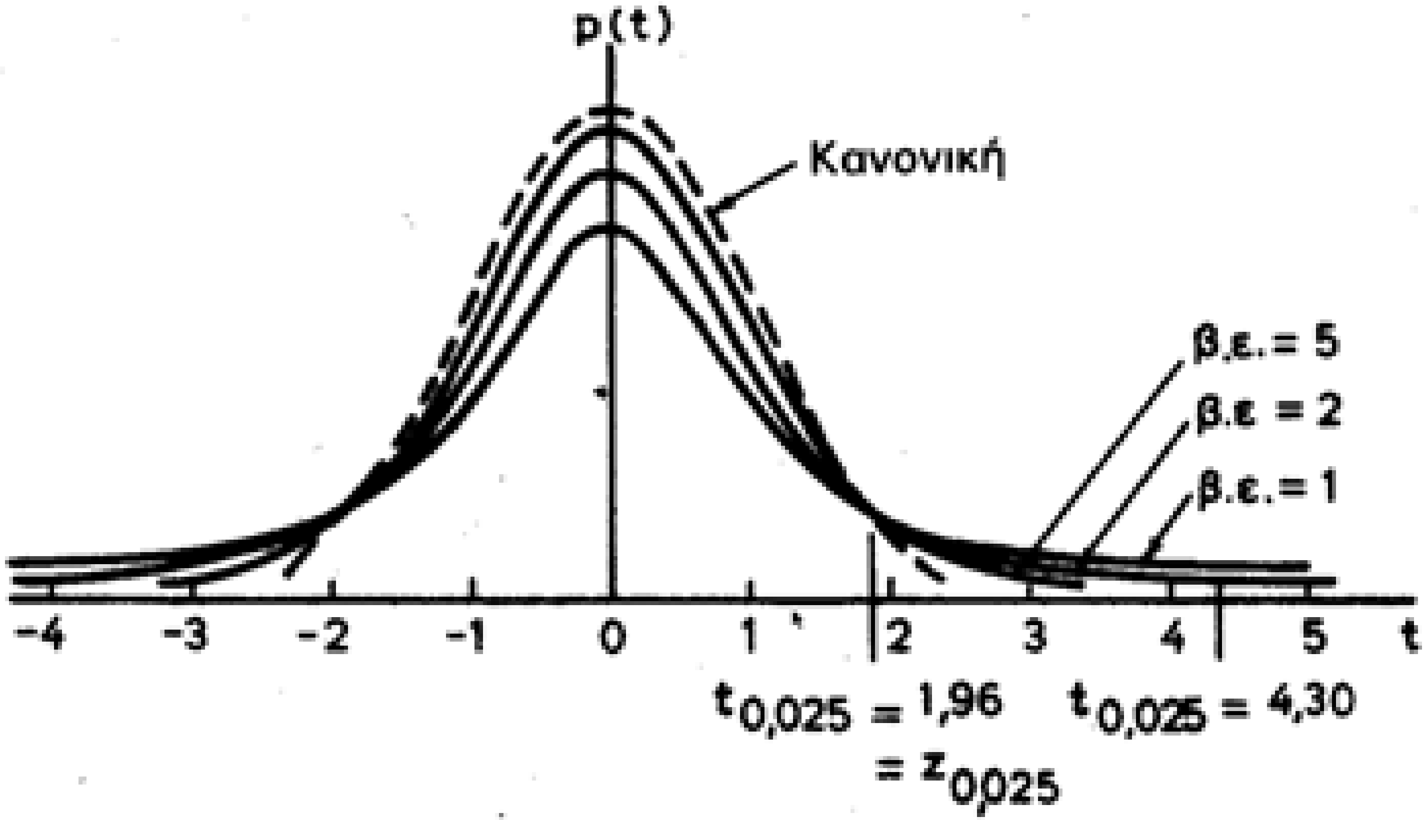
$$\underbrace{2 \cdot z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}}_{\text{μήκος}}$$

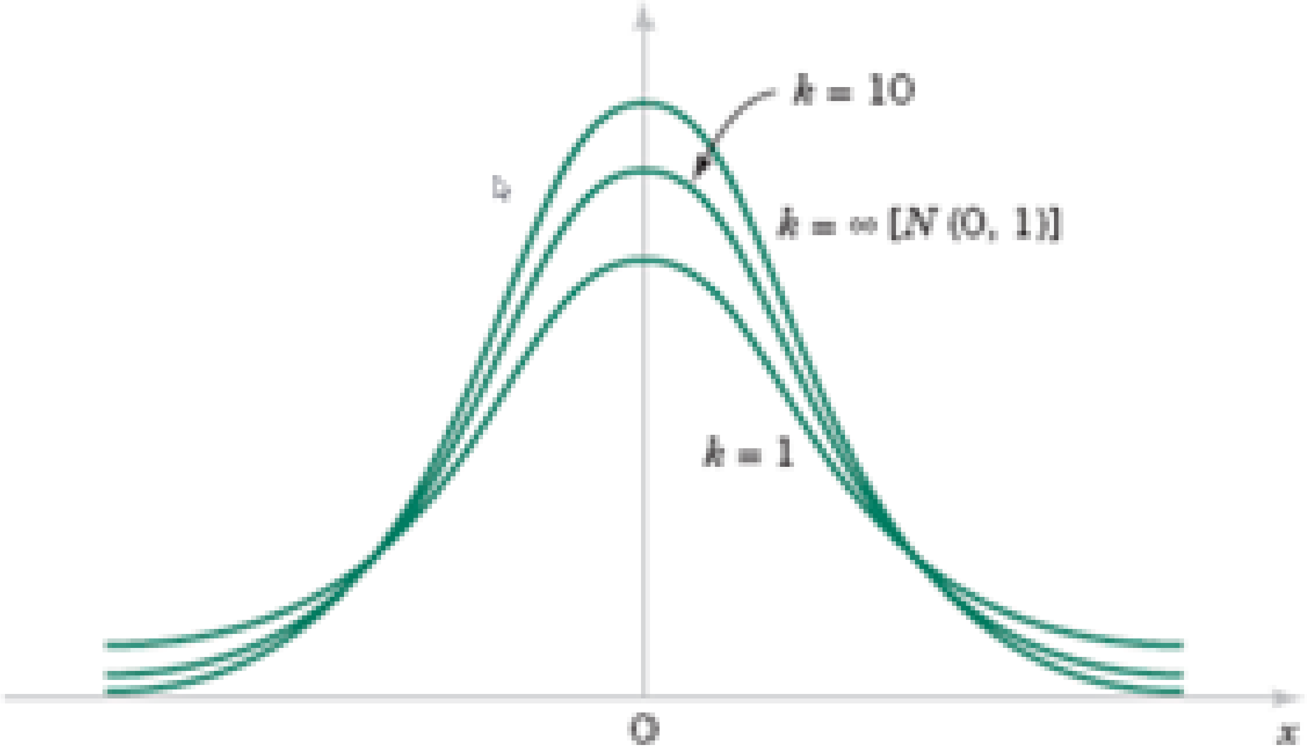
$$\bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

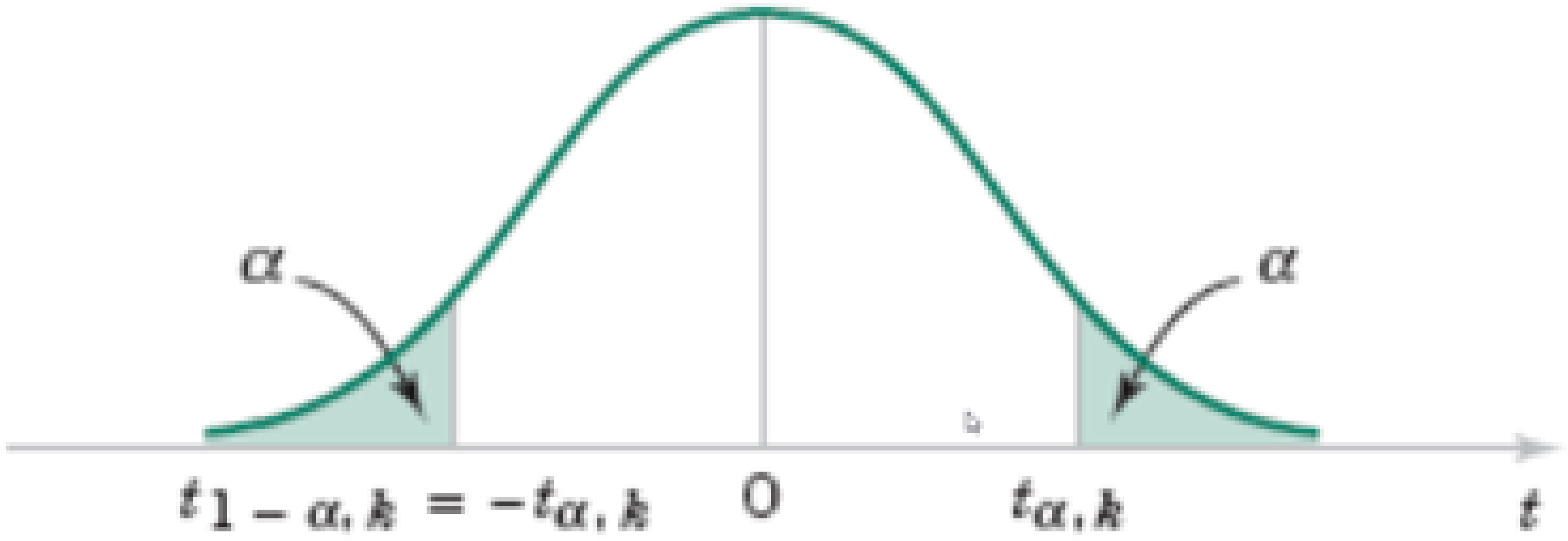
2) Εκτιμώντας το μ όταν το σ είναι άγνωστο …(αλλά το δείγμα n<30)

- Μπορούμε να υπολογίσουμε ένα διαστημικό εκτιμητή από μια δειγματοληπτική κατανομή, ως εξής: $\bar{x}$
- Επιλέγοντας ένα δείγμα μεγέθους *n* από έναν πληθυσμό
- Υπολογίζοντας την μέση τιμή,
- Και, γνωρίζουμε ότι X ακολουθεί student-t κατανομή με n-1 β.ε.

$$\boxed{T = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}}$$


p(t)
Κανονική
β.ε. = 5
β.ε = 2
β.ε. = 1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
t
$t_{0,025} = 1,96$
$= z_{0,025}$
$t_{0,025} = 4,30$


k = 10
k = ∞ [N (0, 1)]
k = 1
O
x



α
α
$t_{1-\alpha,k} = -t_{\alpha,k}$
0
$t_{\alpha,k}$
t

- Η κατανομή — t είναι συμμετρική περί τον μέσο.
- Για μεγάλα δείγματα, πρακτικά, ταυτίζεται με την κανονική με μ = 0 και σ=1.
- Για μικρά δείγματα κάτω των 30 μονάδων η διάκριση γίνεται προφανής.
- Ειδικότερα, ενώ υπάρχει μία μόνο τυπική κανονική κατανομή, υπάρχει μία οικογένεια κατανομών t, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

- Εκ της μελέτης του σχήματος προκύπτει ότι για δείγμα μικρού μεγέθους η κατανομή — t διαφέρει σημαντικά από την κανονική, αλλά καθώς το δείγμα αυξάνει, αυτή προσεγγίζει την κανονική.
- Η κατανομή — t είναι πινακοποιημένη όχι σύμφωνα με το μέγεθος του δείγματος <n> αλλά βάσει του παρανομαστή της δειγματικής διακυμάνσεως S^2, που ονομάζεται «βαθμοί ελευθερίας».

Εκτιμώντας το $\boldsymbol{\mu}$ όταν το $\boldsymbol{\sigma}$ είναι άγνωστό …(αλλά το δείγμα n<30),

δειγματική τυπική
κανονική κατανομή
(άγνωστό)

δειγματοληπτική
μέση τιμή (γνωστή)

- Εξετάζοντας το πιο προσεκτικά …

Μέση τιμή του
πληθυσμού,
άγνωστη και θέλουμε
να την εκτιμήσουμε

$$\boxed{T = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}}$$

Δειγματική τυπική
απόκλιση του
πληθυσμού,
(υποθέτουμε ότι
είναι άγνωστη**)**

Ο αριθμός του
δείγματος, (γνωστό)

Εκτιμώντας το $\boldsymbol{\mu}$ όταν το $\boldsymbol{\sigma}$ είναι άγνωστό …

Το διάστημα εμπιστοσύνης

- Συμβολίζουμε:

$$P\left(\overbrace{\mu - t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \bar{x} \le \mu + t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}}\right) = 1-\alpha$$

Η δειγματοληπτική μέση τιμή βρίσκεται μέσα στο διάστημα…

- Έτσι, η ***πιθανότητα*** ότι το διάστημα:

$$\bar{x} \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} = \left\{\bar{x} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right\}$$

- περικλείει την μέση τιμή του πληθυσμού, ***μ,*** είναι 1-*α*. Αυτή είναι μία ***εκτιμήτρια για διάστημα εμπιστοσύνης για μ***.

Εκτιμήτρια Διαστήματος εμπιστοσύνης για μ:

- Η πιθανότητα 1–*α* καλείται ***επίπεδο εμπιστοσύνης***.

Συνήθως παριστάνεται με ένα συν/πλην (±) πρόσημο

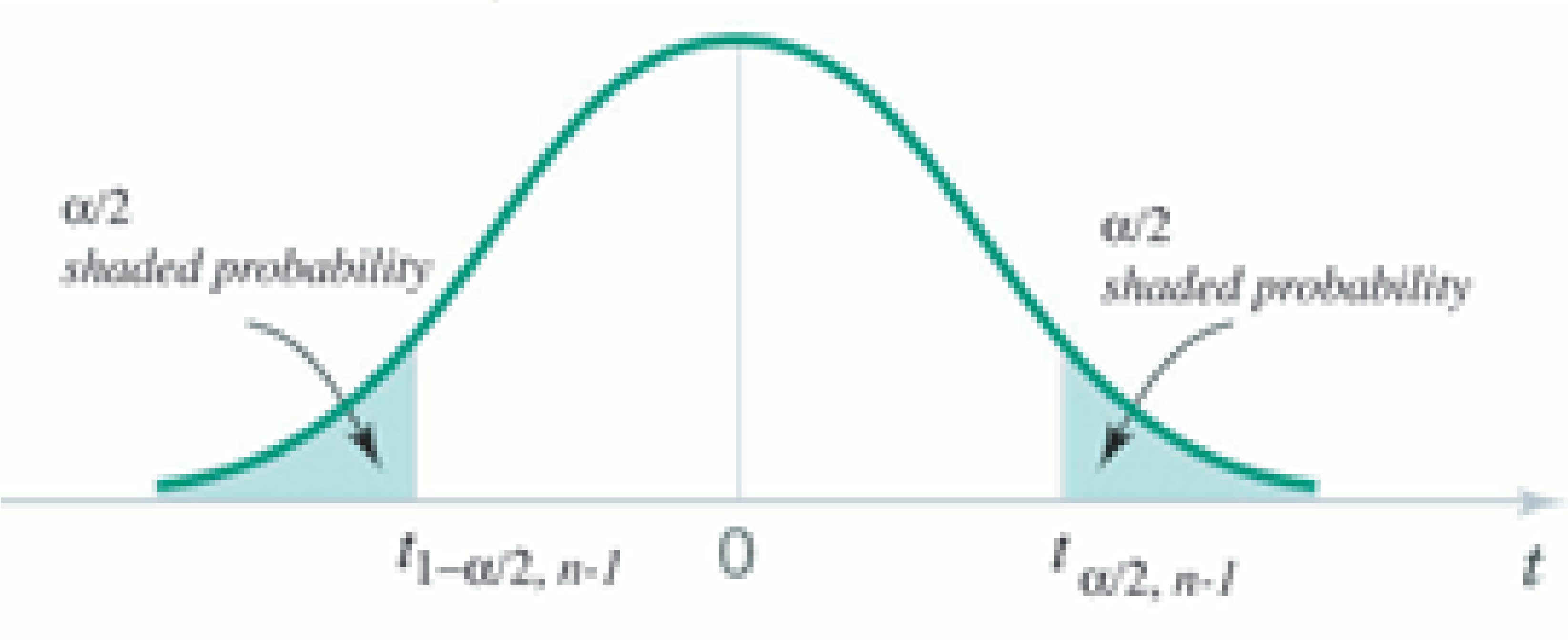
Άνω Φράγμα Εμπιστοσύνης (ΚΦΕ ή UCL)

$$\bar{x} \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} = \left\{\bar{x} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right\}$$

Κάτω Φράγμα Εμπιστοσύνης (ΚΦΕ ή LCL)

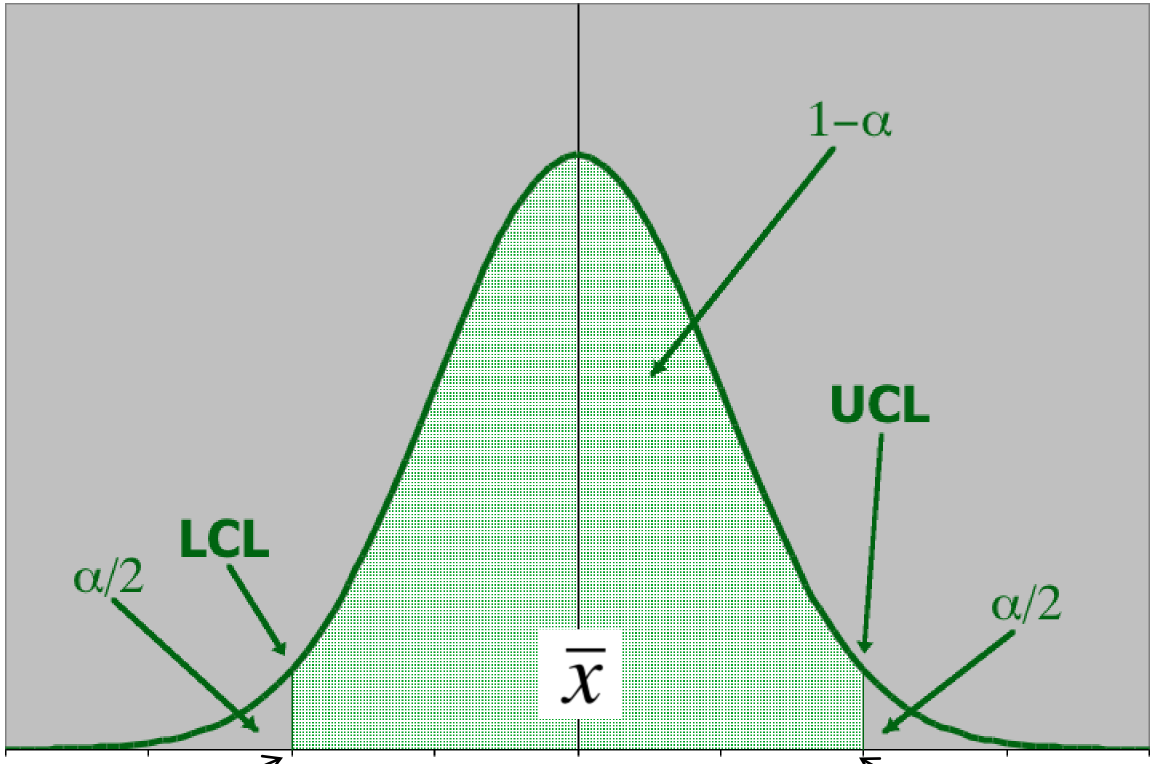
·

$$t_{n-1,\alpha/2} = t_{n-1,1-\alpha/2}$$



Γραφικά ...

- ...εδώ είναι το διάστημα εμπιστοσύνης για $\boldsymbol{\mu}$:



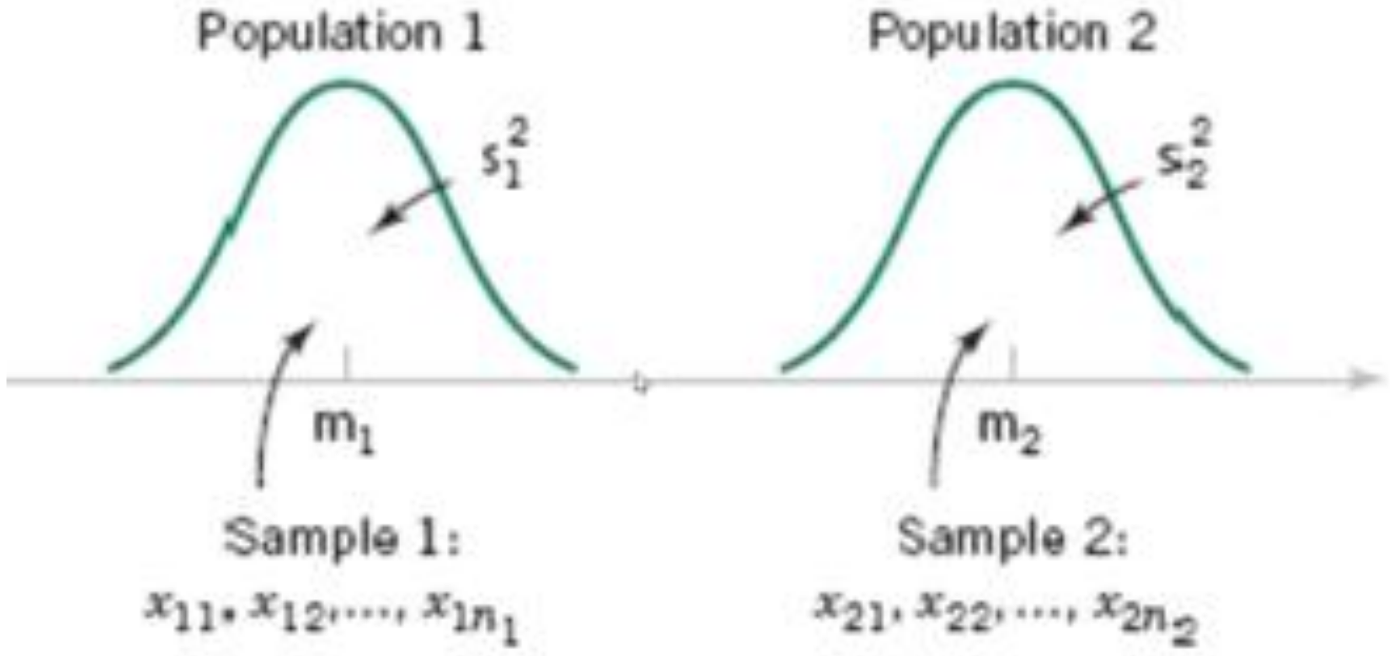
$$\bar{x} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$2 \cdot t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

μήκος

$$\bar{x} + t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Δ.Ε. για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμων



Υποθέσεις

1. $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ is a random sample from population 1.
2. $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ is a random sample from population 2.
3. The two populations represented by X_1 and X_2 are independent.
4. Both populations are normal.

$$E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = E(\overline{X}_1) - E(\overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

$$V(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = V(\overline{X}_1) + V(\overline{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

Inference for a Difference in Means of Two Normal Distributions, Variances Known

The quantity

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

has a $N(0, 1)$ distribution.

Δ.Ε. για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών των οποίων οι διασπορές είναι γνωστές.

If $\bar{x}_1$ and $\bar{x}_2$ are the means of independent random samples of sizes n_1 and n_2 from two independent normal populations with known variances σ_1^2 and σ_2^2, respectively, a $100(1-\alpha)\%$ confidence interval for $\mu_1 - \mu_2$ is

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad (10\text{-}7)$$

where $z_{\alpha/2}$ is the upper $\alpha/2$ percentage point of the standard normal distribution.

Δ.Ε. για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών των οποίων οι διασπορές είναι γνωστές (πληθυσμός όχι κανονικός αλλά μεγάλα δείγματα>=30)

- Το Δ.Ε. είναι

$$\left(\bar{x}-\bar{y}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}},\bar{x}-\bar{y}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}\right)$$

- όπου $$s_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_{1i}-\bar{x}_1\right)^2, s_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(x_{2i}-\bar{x}_2\right)^2,$$

One-Sided Confidence Bounds

Upper Confidence Bound

$$\mu_1 - \mu_2 \le \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad (10\text{-}9)$$

Lower Confidence Bound

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \qquad (10\text{-}10)$$

Δ.Ε. για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών των οποίων οι διασπορές είναι άγνωστές (Πληθυσμοί κανονικοί, δείγματα ανεξάρτητοι με μεγέθη μικρά δηλ. <30)

- 1) Πληθυσμοί κανονικοί, Άγνωστες διακυμάνσεις $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$$\hat{\sigma}_2 = S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

- Ο S_p^2 είναι ένας εκτιμητής της κοινής διασποράς δηλαδή ο σταθμισμένος μέσος των δύο δειγματικών διασπορών (συμμετέχουν στον υπολογισμό οι δύο διασπορές σε ποσοστό ανάλογο του μεγέθους του δείγματος από το οποίο προέρχεται κάθε μία)

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2, s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2,$$

Δ.Ε. για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών των οποίων οι διασπορές είναι άγνωστές (Πληθυσμοί κανονικοί, δείγματα ανεξάρτητα με μεγέθη μικρά δηλ. <30)

- 1) Πληθυσμοί κανονικοί, Άγνωστες διακυμάνσεις $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$$\boxed{T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}}$$

$$\hat{\sigma}_2 = S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2, s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2,$$

Δ.Ε. για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών των οποίων οι διασπορές είναι άγνωστές

- 1) Πληθυσμοί κανονικοί, δείγματα ανεξάρτητα
- , Άγνωστες διακυμάνσεις $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$
- Το Δ.Ε. είναι

$$\left(\bar{x} - \bar{y} - t_{n_1+n_2-2,\alpha/2} \cdot S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \bar{x} - \bar{y} + t_{n_1+n_2-2,\alpha/2} \cdot S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$$

2) Δ.Ε. για τη διαφορά των μέσων τιμών/Πληθυσμοί κανονικοί, δείγματα ανεξάρτητα, Άγνωστες διακυμάνσεις και άνισες $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Διακρίνω 2 περιπτώσεις:1η περίπτωση $n_1 = n_2$

- 2i) Αν $n_1 = n_2$ το 100(1-α)% Δ.Ε. είναι το

$$\left(\bar{x} - \bar{y} - t_{v,\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}, \bar{x} - \bar{y} + t_{v,\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right), \qquad v = 2(n_1 - 1)$$

2ii) Δ.Ε. για τη διαφορά των μέσων τιμών/Πληθυσμοί κανονικοί, δείγματα ανεξάρτητα, Άγνωστες διακυμάνσεις και άνισες $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Διακρίνω 2 περιπτώσεις:2η περίπτωση $n_1 \neq n_2$

- 2ii) Αν $n_1 \neq n_2$ το 100(1-α)% Δ.Ε. είναι το

$$\left(\bar{x} - \bar{y} - t_{v,\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}, \bar{x} - \bar{y} + t_{v,\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right)$$

- Η τιμή v στρογγυλοποιημένη στον πλησιέστερο ακέραιο,

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} \right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2} \right)^2}{n_2 - 1}}$$

Δ.Ε. για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών (Πληθυσμοί κανονικοί, δείγματα εξαρτημένα)

- Έστω ότι συγκρίνονται δύο θεραπείες (π.χ. σύγκριση δύο παυσίπονων)
- Επιλέγεται λοιπόν μία ομάδα ατόμων και στα ίδια άτομα σε διαφορετικές χρονικές στιγμές εφαρμόζονται οι θεραπείες και γίνονται μετρήσεις.
- Οι παρατηρήσεις που συγκεντρώνονται με αυτό τον τρόπο ονομάζονται **ζευγαρωτές παρατηρήσεις.**

Δ.Ε. για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών (Πληθυσμοί κανονικοί, δείγματα εξαρτημένα)

- Αν λοιπόν $x_i\,,\ y_i$ είναι οι δύο μετρήσεις στο i-άτομο, τότε η x_i
- παρατήρηση με την y_i δεν είναι ανεξάρτητες ενώ για το δείγμα των ατόμων οι διαφορές $x_i - y_i$ για τα διάφορα i είναι ανεξάρτητες.
- Έτσι για κάθε i ορίζεται η διαφορά $z_i = x_i - y_i$,τα $z_i\,,\ i = 1,\ldots,n$
- είναι ανεξάρτητες παρατηρήσεις αποτελούν τυχαίο δείγμα με μέση τιμή

$$\boxed{\overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - y_i\right)}$$

- και διασπορά

$$\boxed{S_z^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(z_i - \overline{z}\right)^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - n\overline{z}^2\right)}$$

Δ.Ε. για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών (Πληθυσμοί κανονικοί, <u>δείγματα εξαρτημένα</u>)

- Ένα 100(1-α)% για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2 = \mu_z$ στην περίπτωση των ζευγαρωτών παρατηρήσεων είναι το

$$\bar{z} \pm t_{n-1,\alpha/2} \frac{s_z}{\sqrt{n}} = \left\{ \bar{z} - t_{n-1,\alpha/2} \frac{s_z}{\sqrt{n}}, \bar{z} + t_{n-1,\alpha/2} \frac{s_z}{\sqrt{n}} \right\}$$

- **Παρατήρηση:** Για n>=30 ισχύει ότι $\boxed{t_{n-1,\alpha/2} = z_{\alpha/2}}$

ΔΕ για την αναλογία p στοιχείων ενός πληθυσμου

- Αν x είναι τα στοιχεία δείγματος μεγέθους n που έχουν κάποιο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό τότε $\hat{p} = \frac{x}{n}$ είναι ένας εκτιμητής της αναλογίας p στοιχείων του πληθυσμού με το χαρακτηριστικό αυτό
- Επιπλέον ισχύει ότι $E(\hat{p}) = p,\ V(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n},$
- Για μεγάλο n από ΚΟΘ έχουμε

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \Rightarrow \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

Δ.Ε. για την αναλογία p στοιχείων ενός πληθυσμού

- Αν x είναι τα στοιχεία δείγματος μεγέθους n που έχουν κάποιο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό τότε $\hat{p} = \frac{x}{n}$ είναι ένας εκτιμητής της αναλογίας p στοιχείων του πληθυσμού με το χαρακτηριστικό αυτό
- Επιπλέον ισχύει ότι $E(\hat{p}) = p,\ V(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n},$
- Για μεγάλο n από ΚΟΘ έχουμε $\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \Rightarrow \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$
- (1-α)%ΔΕ για την αναλογία p είναι το
- $$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\quad \hat{p} = \frac{x}{n}$$

Δ.Ε. για την διαφορά των αναλογιών 2 πληθυσμών

- . $\hat{p}_1 = \dfrac{x_1}{n} \qquad \hat{p}_2 = \dfrac{x_2}{n_2}$

$$\hat{p}_1 \sim N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right) \qquad \hat{p}_2 \sim N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right) \Rightarrow \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}, \quad \hat{p}_1 = \frac{x_1}{n}, \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$$

Δ.Ε. για τη διασπορά ενός πληθυσμού Προϋπόθεση Πληθυσμός από κανονική κατανομή

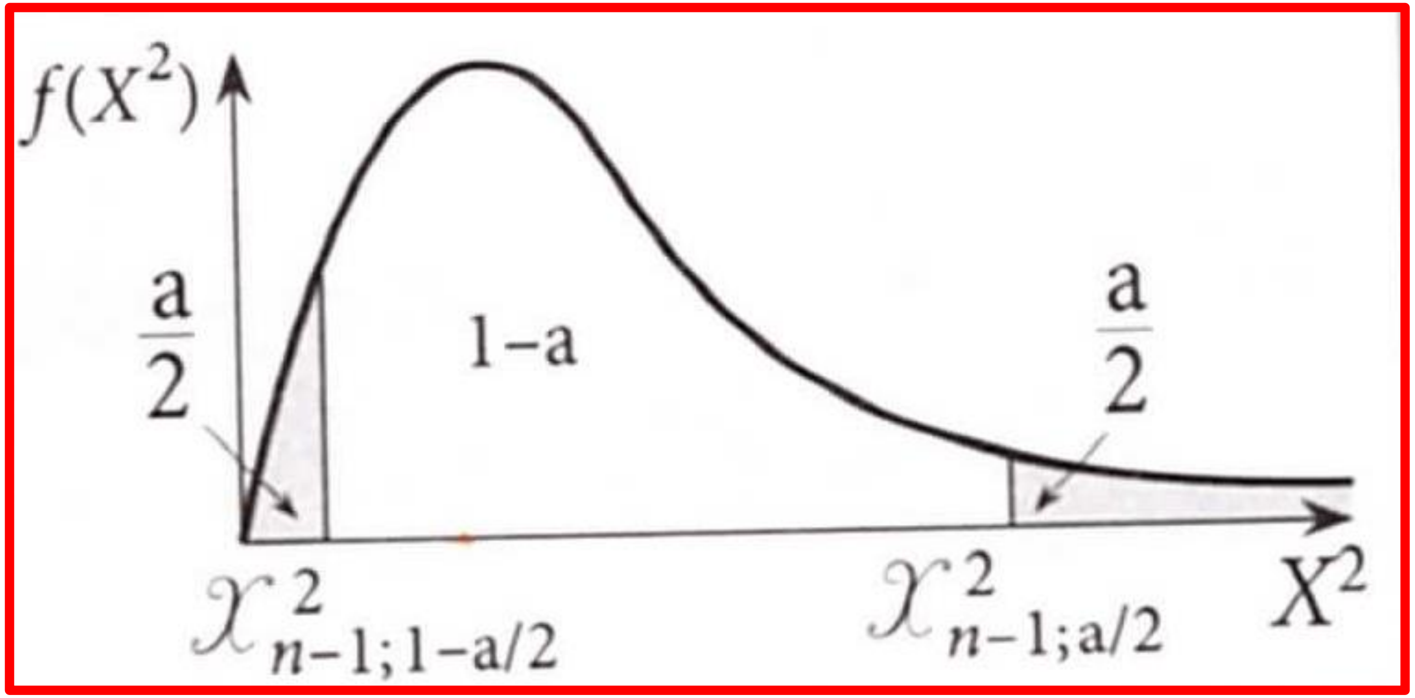
- .

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

Δ.Ε. για τη διασπορά ενός πληθυσμού

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$\boxed{P\left(\chi_1 < X^2 < \chi_2\right) = 1 - a}$$

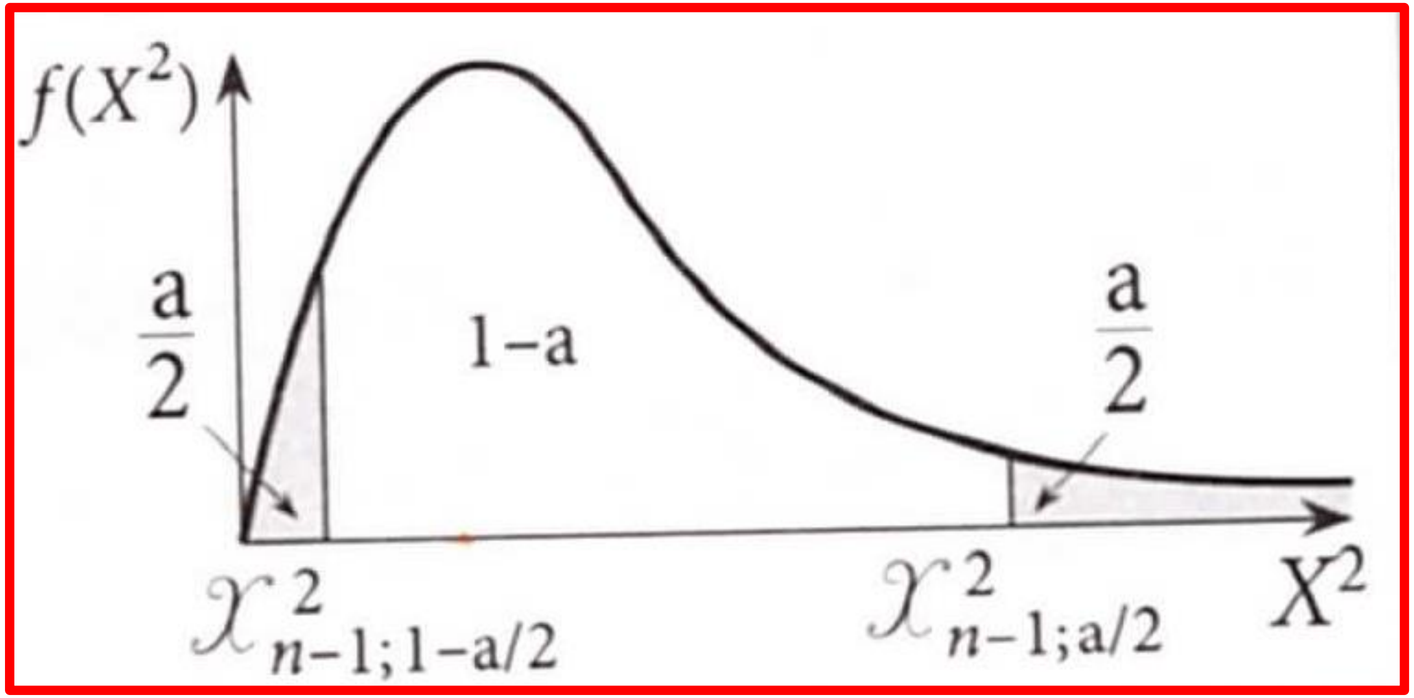


Δ.Ε. για τη διασπορά ενός πληθυσμού

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

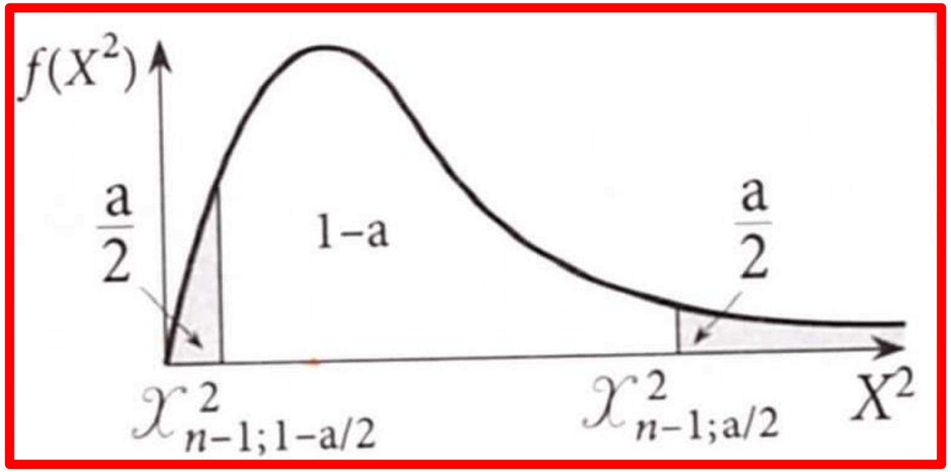
$$P\left(\chi_1 < X^2 < \chi_2\right) = 1 - a$$

$$\chi_1 = \chi^2_{n-1,1-a/2}, \quad \chi_2 = \chi^2_{n-1,a/2}$$



Δ.Ε. για τη διασπορά ενός πληθυσμού

$$\boxed{X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}}$$

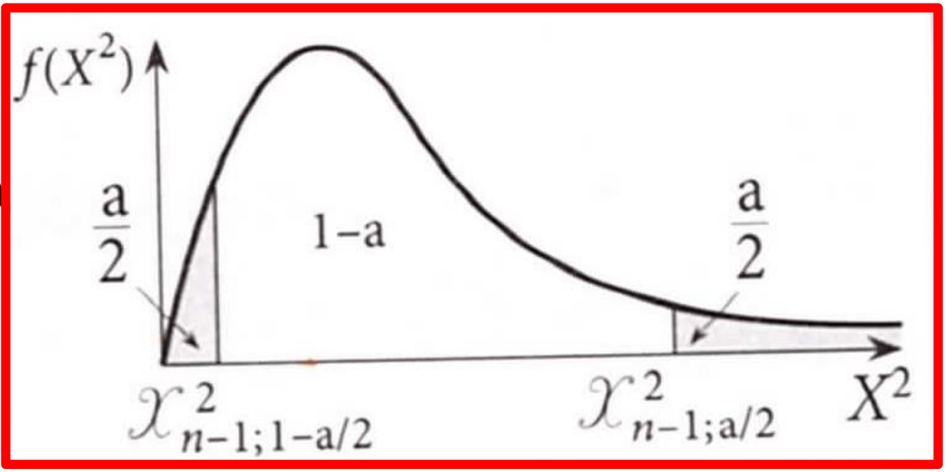


$$P\left(\chi_1 < X^2 < \chi_2\right) = 1 - a$$

$$\chi_1 = \chi^2_{n-1,1-a/2}, \quad \chi_2 = \chi^2_{n-1,a/2}$$

$$\boxed{1 - a = P\left(\chi_1 < X^2 < \chi_2\right) = P\left(\chi^2_{n-1,1-a/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,a/2}\right)}$$

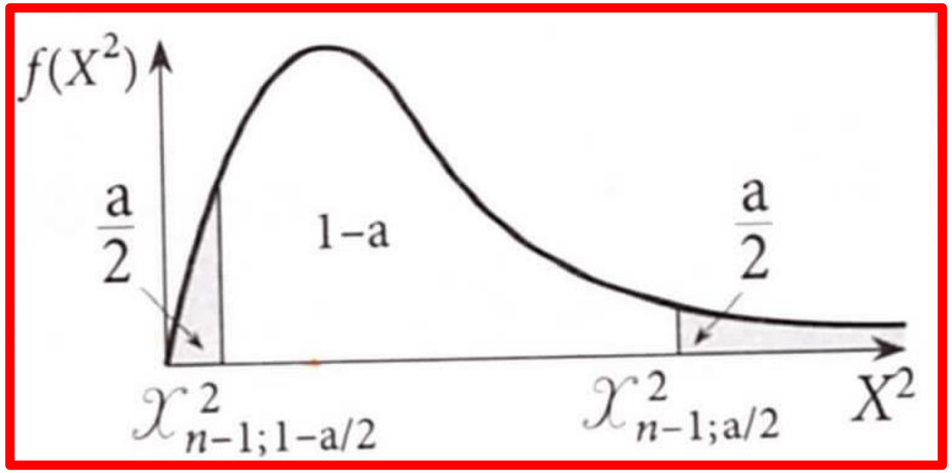
Δ.Ε. για τη διασπορά ενός πλ



$$1-a = P\left(\chi_1 < X^2 < \chi_2\right) = P\left(\chi^2_{n-1,1-a/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,a/2}\right)$$

$$\boxed{= P\left(\frac{\chi^2_{n-1,1-a/2}}{(n-1)S^2} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{\chi^2_{n-1,a/2}}{(n-1)S^2}\right) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,a/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-a/2}}\right)}$$

Δ.Ε. για τη διασπορά ενός πληθυσμού
(1-α)%Δ.Ε. για τη διασπορά/τυπική απόκλιση



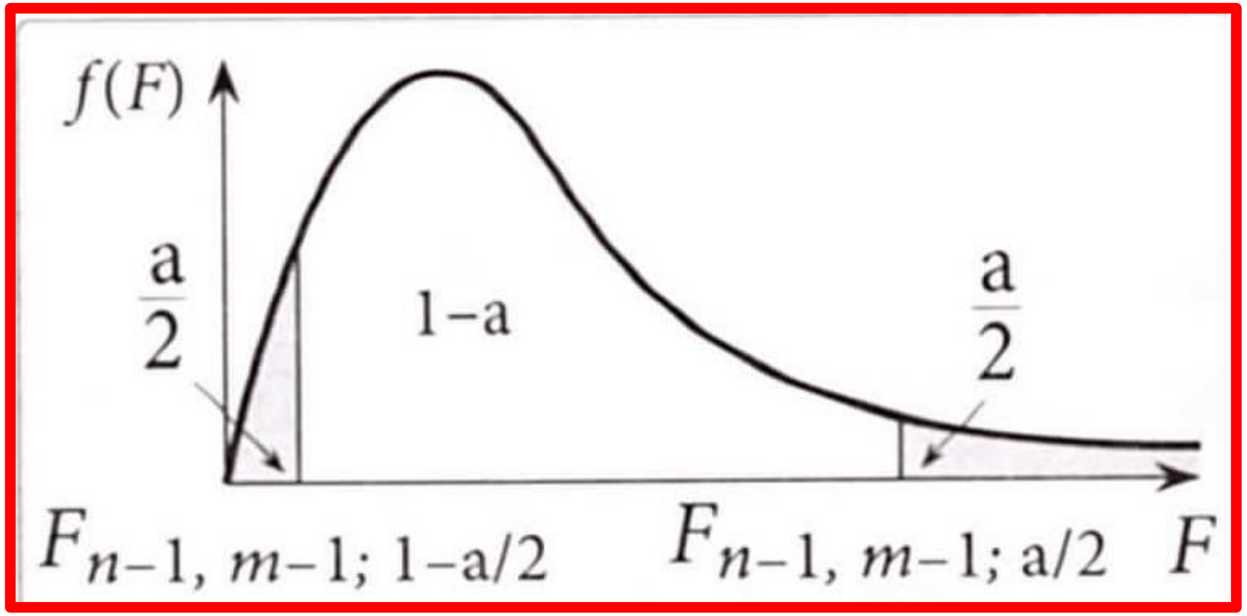
$$\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,a/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-a/2}}}$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,a/2}}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-a/2}}}}$$

ΔΕ για το λόγο $\boxed{\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$ των διασπορών δύο πληθυσμών

- .

$$\boxed{F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F_{n-1,m-1}}$$

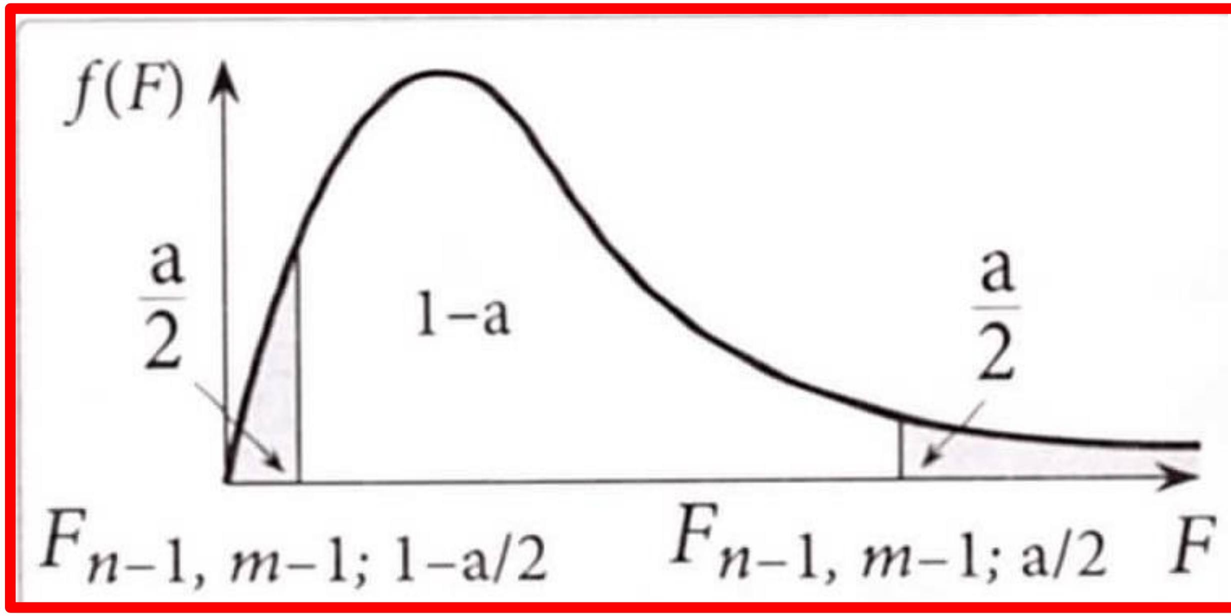


ΔΕ για το λόγο $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ των διασπορών δύο πληθυσμών

- .

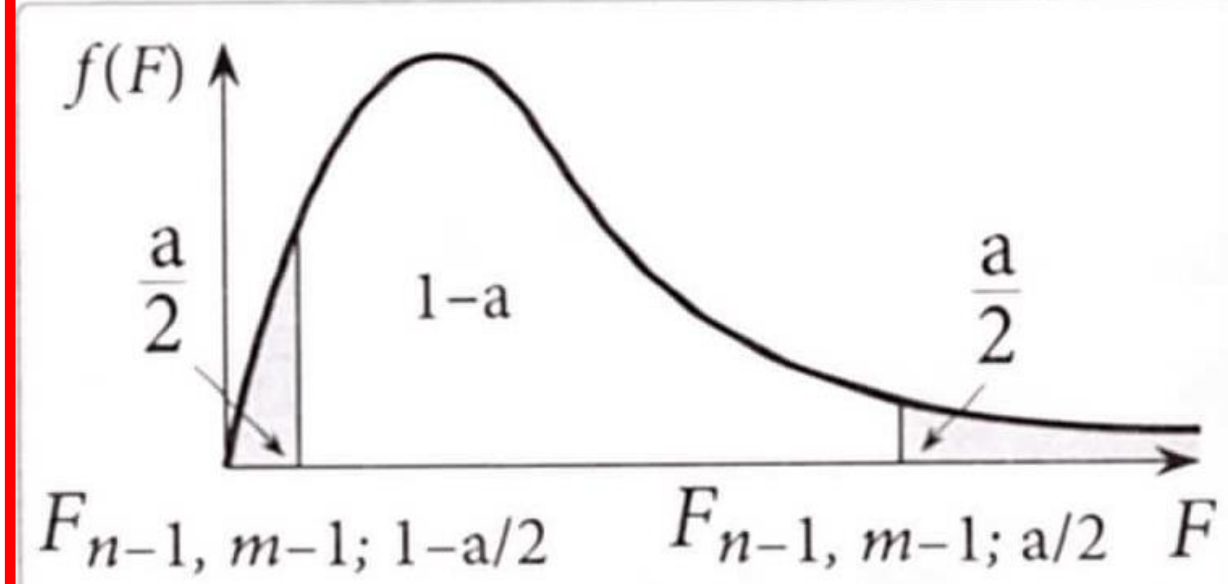
$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F_{n-1,m-1}$$

$$\boxed{P\left(F_1 < F < F_2\right) = 1 - a}$$



ΔΕ για το λόγο $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ των διασπορών δύο πληθυσμών

- .
$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F_{n-1,m-1}$$



$$P\left(F_1 < F < F_2\right) = 1 - a$$

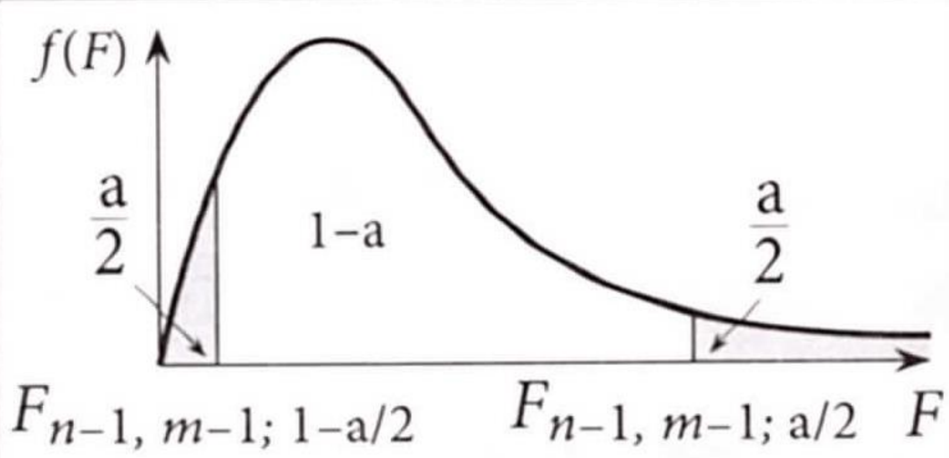
$$P\left(F_{n-1,m-1;1-a/2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_{n-1,m-1;a/2}\right) = 1 - a$$

$$F_{n-1,m-1;1-a/2} = \frac{1}{F_{m-1,n-1;a/2}}$$

ΔΕ για το λόγο $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ των διασπορών δύο πληθυσμών

- .

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F_{n-1,m-1}$$



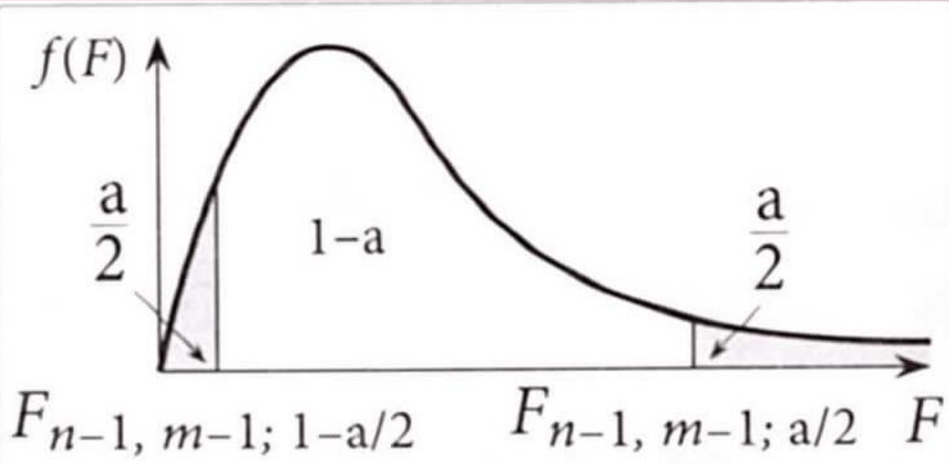
$$P\left(F_{n-1,m-1;1-a/2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_{n-1,m-1;a/2} \right) = 1 - a$$

$$F_{n-1,m-1;1-a/2} = \frac{1}{F_{m-1,n-1;a/2}}$$

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{n-1,m-1;a/2}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot F_{m-1,n-1;a/2}$$

ΔΕ για το λόγο $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ των διασπορών δύο πληθυσμών

- **Πληθυσμοί από κανονική κατανομή και**
- **Δείγματα ανεξάρτητα**



$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{n-1,m-1;a/2}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F_{m-1,n-1;a/2}$$

$$F_{n-1,m-1;1-a/2} = \frac{1}{F_{m-1,n-1;a/2}}$$

Παράδειγμα. Απόδοση του δίσκου της μνήμης του συστήματος. Ένα μέτρο της απόδοσης είναι ο μέσος χρόνος μεταξύ αδυναμιών εκτέλεσης μίας λειτουργίας του δίσκου της μνήμης

- Το κέντρο ανέγραψε το χρόνο των αποτυχιών για ένα τυχαίο δείγμα 45 αποτυχιών του δίσκου

$$\boxed{\bar{x} = 1762, \quad s = 215}$$

- Εκτιμήστε την πραγματική μέση τιμή με ένα 90% Δ.Ε.
- Αν ο δίσκος μνήμης λειτουργεί σωστά η πραγματική τιμή ξεπερνά τις 1700 ώρες. Τι μπορείτε να πείτε για το δίσκο μνήμης?
- Αν στα παραπάνω στατιστικά έχουμε 25 αποτυχίες του δίσκου μνήμης τι έχετε να πείτε για τα i) , ii)?

- **σ άγνωστο, n=45 μεγάλο,** αρα ο πληθυσμος κανονικός
- 1-α=0.9, α=0.1

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$1 - a = P\left(z_1 < Z < z_2\right) = P\left(-z_{a/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} < z_{a/2}\right)$$

$$P\left(\bar{X} - z_{a/2} s/\sqrt{n} < \mu < \bar{X} + z_{a/2} s/\sqrt{n}\right)$$

Αντικατάσταση

- .

$$\bar{X} - z_{a/2} s / \sqrt{n}, \quad \bar{X} + z_{a/2} s / \sqrt{n}$$

$$(1709.3, \quad 1814{,}7 \quad)$$

n=25, σ άγνωστο $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

- Ισχυει ότι

$$t_{25-1,0.1/2} = 1.711$$

$$\bar{X} - t_{n-1,a/2} s/\sqrt{n}, \quad \bar{X} + t_{n-1,a/2} s/\sqrt{n}$$

$$(1668.43, \quad 1835.57)$$

Παράδειγμα Μία μελέτη έκανε σύγκριση των παρασίτων που βρέθηκαν στα διάφορα είδη ψαριών στη Μεσόγειο και στον Ατλαντικό. Στη μεσόγειο από τα 588 ψάρια που πιάστηκαν και εξετάστηκαν βρέθηκαν μολυσμένα τα 211.

- Στον ατλαντικό από τα 123 που εξετάστηκαν βρέθηκαν μολυσμένα τα 26.Συγκρίνετε την αναλογία των παρασίτων στις 2 θάλασσες χρησιμοποιώντας ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης

Δ.Ε. για την διαφορά των αναλογιών p1-p2 2 πληθυσμών

- .

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{211}{588} = 0.36$$

$$\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{26}{123} = 0.211$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{0.1/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{n_2}},\quad \hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}, \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$$