ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΌΣ ΛΟΓΙΣΜΌΣ ΣΕ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΆ ΠΡΟΒΛΉΜΑΤΑ

Διάλεξη 4 Κωνσταντίνος Χαλλουμής 2026

Η παράγωγος: κανόνες, πεπλεγμένη παραγώγιση, εφαπτομένη

Μαθησιακοί στόχοι

- Να κατανοείτε την παράγωγο ως ρυθμό μεταβολής και ως κλίση εφαπτομένης.
- Να παραγωγίζετε με ασφάλεια (γινόμενο, πηλίκο, σύνθετη συνάρτηση, λογαριθμική παραγώγιση).
- Να εφαρμόζετε πεπλεγμένη παραγώγιση για να βρίσκετε την κλίση καμπύλης σε σημείο.
- Να επαληθεύετε ότι μια συνάρτηση ικανοποιεί δοσμένη διαφορική εξίσωση.

Δομή: Θεωρία (σύνοψη) · 6 λυμένα παραδείγματα · 13 ασκήσεις για εξάσκηση · απαντήσεις

1. Θεωρία σε σύνοψη

4.1 Ορισμός και ερμηνεία

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} [f(x + h) - f(x)] / h$$

Η $f'(a)$ είναι η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $(a, f(a))$ και ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της f. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - f(a) = f'(a)\cdot(x - a)$$

4.2 Πίνακας παραγώγων και κανόνες

f(x)	f'(x)	f(x)	f'(x)
c (σταθερά)	0	e^x	e^x
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	a^x	$a^x\cdot \ln a$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$\ln x$	$1/x$
$1/x$	$-1/x^2$	$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\ln\lvert x\rvert$	$1/x$

Κανόνες παραγώγισης

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \qquad (c\cdot f)' = c\cdot f'$$

$$(f\cdot g)' = f'g + fg' \qquad (f/g)' = (f'g - fg')/g^2$$

Αλυσίδα: $[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Παραδείγματα αλυσίδας: $(e^u)' = e^u\cdot u'$, $(\ln u)' = u'/u$, $(u^n)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$.

4.3 Πεπλεγμένη παραγώγιση

Όταν η καμπύλη δίνεται σε μορφή $F(x, y) = 0$ και δεν λύνεται εύκολα ως προς y, παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη ως προς x, θεωρώντας το y συνάρτηση του x. Κάθε όρος που περιέχει y παράγει έναν παράγοντα y' (κανόνας αλυσίδας), π.χ. $(y^3)' = 3y^2y'$ και $(xy^2)' = y^2 + 2xy\cdot y'$. Στο τέλος λύνουμε ως προς y'.

Βήματα για την κλίση σε σημείο

1. Αν δίνεται μόνο το x, αντικαθιστούμε στην εξίσωση της καμπύλης και βρίσκουμε το y (συχνά με παραγοντοποίηση).

2. Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα και συγκεντρώνουμε τους όρους με y'.

3. Αντικαθιστούμε (x, y) και λύνουμε ως προς y'.

4.4 Λογαριθμική παραγώγιση και ανώτερες παράγωγοι

Για συναρτήσεις της μορφής $f(x)^{g(x)}$ (π.χ. x^x) λογαριθμίζουμε: $\ln y = g(x)\cdot \ln f(x)$ και παραγωγίζουμε. Η δεύτερη παράγωγος $f'' = (f')'$ μετρά τον ρυθμό μεταβολής της κλίσης και θα χρησιμοποιηθεί στη μελέτη κυρτότητας.

4.5 Επαλήθευση διαφορικής εξίσωσης

Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση $y(x)$ επαληθεύει μια διαφορική εξίσωση, υπολογίζουμε τις παραγώγους που εμφανίζονται (y', y''), τις αντικαθιστούμε στο πρώτο μέλος και δείχνουμε με πράξεις ότι προκύπτει το δεύτερο μέλος, για κάθε τιμή των σταθερών.

2. Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1. Παράγωγος από τον ορισμό

Με τον ορισμό, να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = x^2 + 3x$.

Λύση

$$[f(x+h) - f(x)]/h = [(x+h)^2 + 3(x+h) - x^2 - 3x]/h = (2xh + h^2 + 3h)/h = 2x + h + 3$$

Καθώς $h \to 0$ παίρνουμε $f'(x) = 2x + 3$.

Παράδειγμα 2. Γινόμενο και αλυσίδα

Να παραγωγιστεί η $y = (3x^2 + 1)\cdot e^{2x}$.

Λύση

$$y' = 6x\cdot e^{2x} + (3x^2 + 1)\cdot 2e^{2x} = (6x^2 + 6x + 2)\cdot e^{2x}$$

Παράδειγμα 3. Εφαπτομένη ευθεία

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $y = x^3 - 2x + 1$ στο $x = 1$.

Λύση

$y(1) = 0$, $y' = 3x^2 - 2$, $y'(1) = 1$.

$$y - 0 = 1\cdot(x - 1) \;\Rightarrow\; y = x - 1$$

Παράδειγμα 4. Πεπλεγμένη παραγώγιση

Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $x^3 + xy + y^2 = 7$ στο σημείο $(1, 2)$.

Λύση

Έλεγχος σημείου: $1 + 2 + 4 = 7$ ✓. Παραγωγίζουμε ως προς x:

$$3x^2 + (y + x\cdot y') + 2y\cdot y' = 0 \;\Rightarrow\; (x + 2y)\cdot y' = -3x^2 - y$$

$$\text{Στο } (1, 2):\; 5\cdot y' = -5 \;\Rightarrow\; y' = -1$$

Παράδειγμα 5. Πεπλεγμένη με εύρεση του y

Να υπολογιστεί η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $xy^3 + x^2y = 2$ στο $x = 1$.

Λύση

Για $x = 1$: $y^3 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y^2 + y + 2) = 0$. Το τριώνυμο έχει $\Delta = -7 < 0$, άρα $y = 1$.

$$y^3 + 3xy^2\cdot y' + 2xy + x^2\cdot y' = 0 \;\Rightarrow\; (3xy^2 + x^2)\cdot y' = -y^3 - 2xy$$

$$\text{Στο } (1, 1):\; 4\cdot y' = -3 \;\Rightarrow\; y' = -3/4$$

Παράδειγμα 6. Επαλήθευση διαφορικής εξίσωσης

Να δειχθεί ότι η $y = C\cdot e^{-2x} + x - 1/2$, $C \in \mathbb{R}$, επαληθεύει την εξίσωση $y' + 2y = 2x$.

Λύση

$$y' = -2C\cdot e^{-2x} + 1$$

$$y' + 2y = -2C\cdot e^{-2x} + 1 + 2C\cdot e^{-2x} + 2x - 1 = 2x \;\checkmark$$

3. Ασκήσεις για εξάσκηση

Οι ασκήσεις είναι ταξινομημένες από τις πιο απλές προς τις πιο σύνθετες. Οι απαντήσεις δίνονται στο τέλος του φυλλαδίου.

Άσκηση 1. Να παραγωγιστούν: (α) $y = 4x^5 - 3x^2 + 7/x - \sqrt{x}$, (β) $y = (2x - 1)^4(x + 3)$, (γ) $y = (x^2 + 1)/(x - 1)$.

Άσκηση 2. Να παραγωγιστούν: (α) $y = x \cdot e^{-3x}$, (β) $y = \ln(x^2 + 5x)$, (γ) $y = \sqrt{(1 + x^3)}$, (δ) $y = \sin^2(3x)$.

Άσκηση 3. Να παραγωγιστεί η $y = \ln(x^2 + 4)/x$.

Άσκηση 4. Με λογαριθμική παραγώγιση να βρεθεί η παράγωγος της $y = x^x$, $x > 0$.

Άσκηση 5. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $y = e^x(x + 1)$ στο $x = 0$.

Άσκηση 6. Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $x^2 + y^2 - xy = 7$ στο σημείο $(3, 1)$.

Άσκηση 7. Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $y^3 + x^2y + 2x = 0$ στο $x = 1$. Τι παρατηρείτε για την εφαπτομένη;

Άσκηση 8. Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $y^3 + x \cdot y - x^2 = 1$ στο $x = 0$.

Άσκηση 9. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της $f(x) = x^3 \cdot \ln x$.

Άσκηση 10. Να δειχθεί ότι η $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$ επαληθεύει την εξίσωση $y'' - y' - 2y = 0$.

Άσκηση 11. Να δειχθεί ότι η $y = C/x + x^2/3$ επαληθεύει την εξίσωση $x \cdot y' + y = x^2$.

Άσκηση 12. Να δειχθεί ότι η $y = C \cdot e^{-x\hat{}\{2\}} + 1/2$ επαληθεύει την εξίσωση $y' + 2xy = x$.

Άσκηση 13. Το συνολικό κόστος μιας επιχείρησης είναι $TC(q) = 0{,}02q^3 - 1{,}5q^2 + 60q + 400$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του κόστους όταν $q = 30$ και να ερμηνευτεί.

4. Απαντήσεις ασκήσεων

1. (α) $20x^4 - 6x - 7/x^2 - 1/(2\sqrt{x})$. (β) $8(2x-1)^3(x+3) + (2x-1)^4 = (2x-1)^3(10x+23)$. (γ) $(x^2 - 2x - 1)/(x-1)^2$.

2. (α) $(1-3x)e^{-3x}$. (β) $(2x+5)/(x^2+5x)$. (γ) $3x^2/(2\sqrt{(1+x^3)})$. (δ) $6 \sin 3x \cdot \cos 3x = 3 \sin 6x$.

3. $y' = [2x^2/(x^2+4) - \ln(x^2+4)] / x^2$.

4. $\ln y = x \cdot \ln x \Rightarrow y'/y = \ln x + 1 \Rightarrow y' = x^x(\ln x + 1)$.

5. $y(0) = 1$, $y' = e^x(x+2)$, $y'(0) = 2$. Εφαπτομένη: $y = 2x + 1$.

6. $2x + 2yy' - y - xy' = 0 \Rightarrow y' = (y - 2x)/(2y - x) = (1-6)/(2-3) = 5$.

7. Για $x = 1$: $y^3 + y + 2 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y^2 - y + 2) = 0 \Rightarrow y = -1$. $3y^2y' + 2xy + x^2y' + 2 = 0 \Rightarrow (3y^2 + x^2)y' = -2xy - 2 \Rightarrow 4y' = 0 \Rightarrow y' = 0$: η εφαπτομένη είναι οριζόντια ($y = -1$).

8. Για $x = 0$: $y^3 = 1 \Rightarrow y = 1$. $3y^2y' + y + xy' - 2x = 0 \Rightarrow$ στο $(0, 1)$: $3y' + 1 = 0 \Rightarrow y' = -1/3$.

9. $f' = 3x^2 \ln x + x^2$, $f'' = 6x \cdot \ln x + 5x$.

10. $y' = 2C_1e^{2x} - C_2e^{-x}$, $y'' = 4C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$. $y'' - y' - 2y = (4 - 2 - 2)C_1e^{2x} + (1 + 1 - 2)C_2e^{-x} = 0$.

11. $y' = -C/x^2 + 2x/3$. $x \cdot y' + y = -C/x + 2x^2/3 + C/x + x^2/3 = x^2$.

12. $y' = -2xC \cdot e^{-x^{2}}$. $y' + 2xy = -2xCe^{-x^{2}} + 2xCe^{-x^{2}} + x = x$.

13. $TC'(q) = 0{,}06q^2 - 3q + 60$, $TC'(30) = 54 - 90 + 60 = 24$ €. Η παραγωγή μιας επιπλέον μονάδας (31η) κοστίζει περίπου 24 € (οριακό κόστος — βλ. Διάλεξη 5).