Συναρτήσεις και οικονομικά μοντέλα

Διάλεξη 1 *Μέρος Α · Συναρτήσεις, ακολουθίες, όρια*

Τι θα μάθουμε

1. Πεδίο ορισμού και βασικές οικογένειες συναρτήσεων
2. Ζήτηση, προσφορά, κόστος, έσοδα, κέρδος
3. Ισορροπία αγοράς και νεκρά σημεία (break-even)
4. Εκθετικές συναρτήσεις και ανατοκισμός

5 ενότητες θεωρίας **5** λυμένα παραδείγματα **13** ασκήσεις

Βασικά εργαλεία

$$q_d = q_s \ \ (ισορροπία)$$

$$Π(q) = TR(q) - TC(q)$$

$$K_n = K_0(1 + i/m)^{mn}$$

$$K(t) = K_0 \cdot e^{rt}, \ \ t = \ln 2 / r$$

Εφαρμογές: Ισορροπία, φόρος ανά μονάδα, ανατοκισμός

Κωνσταντίνος Χαλλουμής ©® All Rights Reserved 2026

Ακολουθίες, σειρές και οικονομικές εφαρμογές

Διάλεξη 2 *Μέρος Α · Συναρτήσεις, ακολουθίες, όρια*

Τι θα μάθουμε

1. Όρια ακολουθιών (ρητές μορφές, ρίζες, όριο του e)
2. Αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος, αθροίσματα
3. Σύγκλιση σειρών: αναγκαία συνθήκη, κριτήριο λόγου, p-σειρές
4. Αποσβέσεις, ράντες, πολλαπλασιαστής δαπανών

4 ενότητες θεωρίας **5** λυμένα παραδείγματα **13** ασκήσεις

Βασικά εργαλεία

$$\lim (1 + a/n)^n = e^a$$

$$\Sigma\, a \cdot r^n = a/(1 - r),\ |r| < 1$$

$$PV = R \cdot [1 - (1 + i)^{-n}]/i$$

$$\Delta Y = \Delta G/(1 - c)$$

Εφαρμογές: Παρούσα αξία ράντας, φθίνουσα απόσβεση, πολλαπλασιαστής

Κωνσταντίνος Χαλλουμής ©® All Rights Reserved 2026

Όρια, συνέχεια και κανόνας L'Hôpital

Διάλεξη 3 *Μέρος Α · Συναρτήσεις, ακολουθίες, όρια*

Τι θα μάθουμε

1. Όρια συναρτήσεων και άρση απροσδιοριστιών
2. Βασικά όρια και όρια στο άπειρο
3. Κανόνας L'Hôpital στις μορφές 0/0 και ∞/∞
4. Συνέχεια κλαδωτών συναρτήσεων

5 ενότητες θεωρίας **6** λυμένα παραδείγματα **13** ασκήσεις

Βασικά εργαλεία

$$\lim_{x\to 0} (e^x - 1)/x = 1$$

$$\lim_{x\to \infty} (1 + a/x)^x = e^a$$

$$\lim f/g = \lim f'/g' \quad (0/0,\ \infty/\infty)$$

$$\ln x \ll x^a \ll e^x$$

Εφαρμογές: Κλιμακωτά τιμολόγια, μέσο κόστος σε μεγάλη κλίμακα

Κωνσταντίνος Χαλλουμής ©® All Rights Reserved 2026

Η παράγωγος: κανόνες, πεπλεγμένη παραγώγιση, εφαπτομένη

Διάλεξη 4 *Μέρος Β · Παράγωγοι και εφαρμογές*

Τι θα μάθουμε

1. Παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής και κλίση εφαπτομένης
2. Κανόνες γινομένου, πηλίκου, αλυσίδας· λογαριθμική παραγώγιση
3. Πεπλεγμένη παραγώγιση και κλίση σε σημείο
4. Επαλήθευση διαφορικής εξίσωσης

5 ενότητες θεωρίας **6** λυμένα παραδείγματα **13** ασκήσεις

Βασικά εργαλεία

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} [f(x+h) - f(x)]/h$$

$$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Εφαρμογές: Ρυθμοί μεταβολής οικονομικών μεγεθών

Κωνσταντίνος Χαλλουμής ©® All Rights Reserved 2026

Οριακές έννοιες και ελαστικότητα

Διάλεξη 5 *Μέρος Β · Παράγωγοι και εφαρμογές*

Τι θα μάθουμε

1. Οριακό κόστος, οριακά έσοδα, οριακό κέρδος
2. Προσεγγίσεις με το διαφορικό: ΔΤC ≈ MC·Δq
3. Ελαστικότητα ζήτησης (και από πεπλεγμένη σχέση)
4. Ποσοστιαίες μεταβολές τιμής και ζήτησης

4 ενότητες θεωρίας **5** λυμένα παραδείγματα **12** ασκήσεις

Βασικά εργαλεία

$$MC = TC',\ MR = TR'$$

$$\varepsilon_d = (dq/dp)\cdot(p/q)$$

$$MR = p\cdot(1 + 1/\varepsilon_d)$$

$$|\varepsilon_d| = 1 \Rightarrow \text{μέγιστα έσοδα}$$

Εφαρμογές: Τιμολογιακή πολιτική και έσοδα

Κωνσταντίνος Χαλλουμής ©® All Rights Reserved 2026

Μελέτη συνάρτησης: μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα

Διάλεξη 6 *Μέρος Β · Παράγωγοι και εφαρμογές*

Τι θα μάθουμε

1. Μονοτονία και τοπικά ακρότατα με πίνακα προσήμων της f′
2. Κριτήριο 2ης παραγώγου
3. Κυρτότητα και σημεία καμπής (f″, f‴)
4. Ολικά ακρότατα σε κλειστό διάστημα και ασύμπτωτες

4 ενότητες θεωρίας **5** λυμένα παραδείγματα **13** ασκήσεις

Βασικά εργαλεία

$f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ *μέγιστο*

$f'' > 0$ *κυρτή* $(\cup)$, $f'' < 0$ *κοίλη* $(\cap)$

Καμπή κυβικής: $x = -b/(3a)$

Πλάγια: $\lambda = \lim f(x)/x$

Εφαρμογές: Πρότυπο πλήρους μελέτης για την εξέταση

Κωνσταντίνος Χαλλουμής ©® All Rights Reserved 2026

Βελτιστοποίηση σε επιχειρηματικά προβλήματα

Διάλεξη 7 *Μέρος Β · Παράγωγοι και εφαρμογές*

Τι θα μάθουμε

1. Από λεκτικό πρόβλημα σε συνάρτηση μιας μεταβλητής
2. Μέγιστο κέρδος / έσοδα, ελάχιστο μέσο κόστος
3. Μοντέλο αποθεμάτων (EOQ) και τιμολόγηση
4. Σχέσεις AR, MR και ελαστικότητα στο βέλτιστο

4 ενότητες θεωρίας **6** λυμένα παραδείγματα **14** ασκήσεις

Βασικά εργαλεία

Μέγιστο κέρδος: $MR = MC,\ \Pi'' < 0$

Ελάχιστο AC: $MC = AC$

$x^* = \sqrt{(2KD/h)}$ *(EOQ)*

Μέγιστα έσοδα: $MR = 0$

Εφαρμογές: Κέρδος, αποθέματα, τιμολόγηση εισιτηρίων, φορολογία

Κωνσταντίνος Χαλλουμής ©® All Rights Reserved 2026

Αόριστο ολοκλήρωμα: τεχνικές και οικονομικές εφαρμογές

Διάλεξη 8 *Μέρος Γ · Ολοκληρώματα*

Τι θα μάθουμε

1. Πίνακας βασικών ολοκληρωμάτων
2. Μέθοδος αντικατάστασης
3. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες
4. Από οριακές σε συνολικές συναρτήσεις (σταθερά από τα δεδομένα)

4 ενότητες θεωρίας **7** λυμένα παραδείγματα **12** ασκήσεις

Βασικά εργαλεία

$$\int x^n\,dx = x^{n+1}/(n+1) + C$$

$$\int g'/g\,dx = \ln|g| + C$$

$$\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$$

$$TC = \int MC\,dq,\ \ TC(0) = FC$$

Εφαρμογές: Συνολικό κόστος/έσοδα, σχηματισμός κεφαλαίου

Κωνσταντίνος Χαλλουμής ©® All Rights Reserved 2026

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων — απλά κλάσματα

Διάλεξη 9 *Μέρος Γ · Ολοκληρώματα*

Τι θα μάθουμε

1. Γνήσιες και μη γνήσιες ρητές· διαίρεση πολυωνύμων
2. Απλά κλάσματα: απλοί, διπλοί, αμείωτοι τετραγωνικοί
3. Υπολογισμός σταθερών (ρίζες, συντελεστές)
4. Αντικατάσταση $u = e^x$

4 ενότητες θεωρίας **6** λυμένα παραδείγματα **14** ασκήσεις

Βασικά εργαλεία

$$A/(x - a) + B/(x - a)^2$$

$$\int A/(x - a)\,dx = A \cdot \ln|x - a| + C$$

$$\int dx/(x^2 + a^2) = (1/a) \cdot \arctan(x/a)$$

$$u = e^x,\ dx = du/u$$

Εφαρμογές: Τεχνική βάση για τα ορισμένα ολοκληρώματα

Κωνσταντίνος Χαλλουμής ©® All Rights Reserved 2026

Ορισμένο και γενικευμένο ολοκλήρωμα — εφαρμογές

Διάλεξη 10 *Μέρος Γ · Ολοκληρώματα*

Τι θα μάθουμε

1. Θεμελιώδες θεώρημα και αλλαγή ορίων
2. Εμβαδά κάτω από καμπύλη και μεταξύ καμπυλών
3. Γενικευμένα ολοκληρώματα, συναρτήσεις πυκνότητας
4. Πλεονάσματα, παρούσα αξία ροών, διαφορικές εξισώσεις

5 ενότητες θεωρίας **7** λυμένα παραδείγματα **15** ασκήσεις

Βασικά εργαλεία

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$$

$$CS = \int_0^{q^*} D(q)\,dq - p^*q^*$$

$$PV = \int_0^T R(t)e^{-rt}\,dt$$

$$E = \int_a^b |f - g|\,dx$$

Εφαρμογές: Πλεόνασμα καταναλωτή/παραγωγού, συνεχείς ροές

Κωνσταντίνος Χαλλουμής ©® All Rights Reserved 2026