

Θεωρία & Εφαρμογές Μεθόδων Αριστοποίησης

ΣΧΟΛΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΙΣΜΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: ΜΑΓΚΟΥΤΑΣ Α., ΚΑΠΝΙΑΣ Γ.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Περιεχόμενα

1. Ιακωβιανός Πίνακας
2. Εσσιανός Πίνακας

1. Ιακωβιανός πίνακας

Έστω $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ μια συλλογή ή διάνυσμα m συναρτήσεων, n μεταβλητών η κάθε μία. Δηλαδή, $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Ως **Ιακωβιανό πίνακα** ή **Ιακωβιανή παράγωγο** ή **πίνακα Jacobi**, ορίζουμε τον πίνακα:

$$\mathbf{Jf} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}.$$

Όταν υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους σε ένα συγκεκριμένο σημείο $\mathbf{x}_0$, του πεδίου ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f_i , ο Ιακωβιανός πίνακας μετατρέπεται σε έναν κλασικό πίνακα με αριθμούς σαν στοιχεία.

Συγκεκριμένα :

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}_0) \\ \nabla f_2(\mathbf{x}_0) \\ \dots \\ \nabla f_m(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{R}),$$

όπου $\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με πραγματικούς αριθμούς ως στοιχεία.

Εναλλακτικά, προκειμένου να δηλώσουμε τις συναρτήσεις, τις οποίες παραγωγίζουμε και τις μεταβλητές, ως προς τις οποίες παραγωγίζουμε, χρησιμοποιούμε τον κάτωθι συμβολισμό για τους Ιακωβιανούς πίνακες:

$$\mathbf{Jf} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad \mathbf{Jf}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}_0).$$

Η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα ονομάζεται **Ιακωβιανή**. Συγκεκριμένα, οι Ιακωβιανές είναι οι ποσότητες:

$$\det(\mathbf{Jf}) = |\mathbf{Jf}| = \left| \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right|, \quad \det(\mathbf{Jf}(\mathbf{x}_0)) = |\mathbf{Jf}(\mathbf{x}_0)| = \left| \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}_0) \right|.$$

Ιδιότητες

Ιδιότητα 1. Έστω $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ διάνυσμα C^1 συναρτήσεων, $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, n -μεταβλητών και έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Ισχύει η σχέση: $d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^T = \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)d\mathbf{r}^T$, όπου $d\mathbf{f} = (df_1, df_2, \dots, df_m)$ και $d\mathbf{r}$ το διάνυσμα: $d\mathbf{r} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$.

Ιδιότητα 2. Εάν οι f, g είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις των x, y και τα x, y είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις των s, w , τότε ισχύει η σχέση:

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(s, w)} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, w)}.$$

Ιδιότητα 3. Εάν οι u, v είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις των x, y με μη μηδενική Ιακωβιανή, τότε ισχύει η σχέση:

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 1.$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γενικευτούν και στην περίπτωση n το πλήθος, πλειομεταβλητών συναρτήσεων n μεταβλητών.

Συναρτησιακή εξάρτηση

Έχουμε τις m συναρτήσεις, n μεταβλητών: $f_1, f_2, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι **συναρτησιακά εξαρτημένες** αν υπάρχει συνάρτηση $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε: $F(f_1, f_2, \dots, f_m) = 0$.

Θεώρημα Έστωσαν n, C^1 συναρτήσεις, n μεταβλητών: $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι συναρτησιακά εξαρτημένες αν και μόνον αν :

$$\left| \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right| = 0.$$

2. Εσσιανός πίνακας

Έστω f μία C^2 πλειομεταβλητή συνάρτηση n -μεταβλητών. Ο κάτωθι πίνακας:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix},$$

ονομάζεται **Εσσιανός πίνακας** ή **πίνακας του Hess** της f και τα στοιχεία του πίνακα αυτού είναι συναρτήσεις. Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ένα συγκεκριμένο διάνυσμα, εάν υπολογίσουμε όλες τις συναρτήσεις - στοιχεία του $\mathcal{H}$ στο συγκεκριμένο διάνυσμα, αποκτούμε έναν πίνακα αριθμών που συμβολίζεται $\mathcal{H}(\mathbf{a})$. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται συνήθως **Εσσιανός πίνακας της f στο $\mathbf{a}$** .