

Θεωρία & Εφαρμογές Μεθόδων Αριστοποίησης

ΣΧΟΛΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΙΣΜΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: ΜΑΓΚΟΥΤΑΣ Α., ΚΑΠΝΙΑΣ Γ.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Περιεχόμενα

1. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών
2. Μερική παράγωγος
3. Μερικές παράγωγοι ανωτέρας τάξεως
4. Οικονομικές εφαρμογές της μερικής παραγώγου

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Από την κλασική ανάλυση είναι γνωστές οι συναρτήσεις μιας μεταβλητής, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ οι οποίες απεικονίζουν πραγματικούς αριθμούς σε πραγματικούς αριθμούς. Μπορούμε να επεκτείνουμε αυτή την έννοια ορίζοντας:

- **συναρτήσεις δυο μεταβλητών:** $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$, οι οποίες απεικονίζουν ζεύγη πραγματικών αριθμών σε πραγματικούς αριθμούς,
- **συναρτήσεις τριών μεταβλητών:** $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $s = f(x, y, z)$, οι οποίες απεικονίζουν τριάδες πραγματικών αριθμών σε πραγματικούς αριθμούς, και γενικά
- **συναρτήσεις n -μεταβλητών :**

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

οι οποίες απεικονίζουν n -άδες πραγματικών αριθμών σε πραγματικούς αριθμούς.

Οι μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** μεταβλητές ενώ η w **εξαρτημένη μεταβλητή**. **Πεδίο ορισμού** της f ονομάζεται, το ευρύτερο δυνατό σύνολο τιμών που μπορούμε να δώσουμε στις ανεξάρτητες μεταβλητές ώστε ο υπολογισμός της w να είναι δυνατός. Συνήθως, συμβολίζεται με D_f ή απλά με D . Το ευρύτερο δυνατό σύνολο τιμών, που μπορεί να πάρει η εξαρτημένη μεταβλητή w , ονομάζεται **πεδίο τιμών ή σύνολο τιμών** της f .

Παράδειγμα Οι συναρτήσεις

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \text{ και } z = \sqrt{\frac{x}{y}},$$

είναι συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Οι x, y είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές και η z είναι η εξαρτημένη μεταβλητή. Το πεδίο ορισμού της z είναι το σύνολο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ με } y \neq 0\}$.

Οι συναρτήσεις

$$f(x, y, z) = x + y + z^3 \text{ και } s = \frac{x^2 + y^2}{2z},$$

είναι συναρτήσεις τριών μεταβλητών. Οι x, y, z είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές και η s είναι η εξαρτημένη μεταβλητή. Το πεδίο ορισμού της s είναι το σύνολο $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ με } z \neq 0\}$. Η συνάρτηση

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3,$$

είναι συνάρτηση n -μεταβλητών.

Ορισμός Μια *συνάρτηση* f *n -μεταβλητών*, $x_1, x_2, \dots, x_n$, είναι ένας κανόνας ο οποίος αντιστοιχεί σε κάθε σημείο $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ενός συνόλου D στον n -διάστατο χώρο $\mathbb{R}^n$, ένα μοναδικό πραγματικό αριθμό $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Μερική παράγωγος

Συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Έστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό υποσύνολο και $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών. Η **μερική παράγωγος της f ως προς x** , στο σημείο (x_0, y_0) , συμβολίζεται $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, και είναι ο καθαρός αριθμός που ορίζεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Η **μερική παράγωγος της f ως προς y** , στο σημείο (x_0, y_0) , συμβολίζεται $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, και είναι ο καθαρός αριθμός που ορίζεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Οι συναρτήσεις $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, που ορίζονται από τις σχέσεις: $(x_0, y_0) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ και $(x_0, y_0) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ονομάζονται **συναρτήσεις μερικών παραγώγων** της f ως προς x και y αντίστοιχα.

Για να υπολογίσουμε την $\frac{\partial f}{\partial x}$, παραγωγίζουμε κατά τα γνωστά, θεωρώντας την μεταβλητή y ως σταθερή ποσότητα. Ανάλογα, για να υπολογίσουμε $\frac{\partial f}{\partial y}$ παραγωγίζουμε κατά τα γνωστά, θεωρώντας την μεταβλητή x ως σταθερή ποσότητα.

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε τους εξής εναλλακτικούς συμβολισμούς:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) = \partial_x f(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = f_y(x_0, y_0) = \partial_y f(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0).$$

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Τα παραπάνω μπορούν να γενικευθούν στην περίπτωση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό υποσύνολο και $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση n - μεταβλητών. Η **μερική παράγωγος** της f ως προς x_j , στο σημείο $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, συμβολίζεται $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, και είναι ο καθαρός αριθμός που ορίζεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \lim_{x_j \rightarrow x_j^*} \frac{f(x_1^*, \dots, x_j, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*)}{x_j - x_j^*}$$

Η συνάρτηση $\frac{\partial f}{\partial x_j} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται από την σχέση: $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ για διάφορα $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, ονομάζεται **συνάρτηση μερικής παραγώγου** της f ως προς x_j .

Μερικές παράγωγοι ανωτέρας τάξεως

Οι μερικές παράγωγοι μιας συναρτήσεως f δύο μεταβλητών, είναι και αυτές συναρτήσεις, επομένως μπορούν και αυτές εν γένει, να παραγωγισθούν μερικώς. Οι εν λόγω παραγωγίσεις μπορούν να γίνουν είτε ως προς την ίδια μεταβλητή είτε ως προς άλλες. Αυτές οι παράγωγοι, όταν υπάρχουν, ονομάζονται **μερικές παράγωγοι δευτέρας τάξεως** και η διαδικασία **πολλαπλή παραγωγή**. Τις συμβολίζουμε ως εξής:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

ή ισοδύναμα

$$f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}.$$

Οι παράγωγοι αυτοί είναι συναρτήσεις και ως εκ τούτου μπορούν να παραγωγισθούν εκ νέου. Οι εν λόγω παραγωγίσεις μπορούν και πάλι να γίνουν είτε ως προς την ίδια μεταβλητή είτε ως προς άλλες. Αυτές οι παράγωγοι, όταν υπάρχουν, ονομάζονται **μερικές παράγωγοι τρίτης τάξεως**. Είναι οι εξής:

$$f_{xxx}, f_{xyy}, f_{xyx}, f_{yxx}, f_{yyy}, f_{yyx}.$$

Μπορούμε βέβαια να χρησιμοποιήσουμε και τον άλλο συμβολισμό, παραδείγματος χάριν:

$$f_{yxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right), f_{yyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right).$$

Συνεχίζοντας ανάλογα, μπορούμε να ορίσουμε τις **μερικές παραγώγους n -τάξεως**. Ο συμβολισμός είναι αντίστοιχος, παραδείγματος χάριν:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\cdots \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdots \right) \right) \right).$$

Όλα τα παραπάνω μπορούν να γενικευθούν στην περίπτωση συναρτήσεων n -μεταβλητών. Παραδείγματος χάριν, εάν $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, τότε:

$$f_{x_3 x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right), \quad f_{x_4 x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_4} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_4} \right).$$

Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών. Λέμε ότι η f είναι της **κλάσεως C^1** εάν υπάρχουν όλες οι μερικοί παράγωγοι πρώτης τάξεως και είναι συνεχείς. Λέμε ότι η f είναι της **κλάσεως C^2** εάν υπάρχουν όλες οι μερικοί παράγωγοι πρώτης και δευτέρας τάξεως και είναι συνεχείς. Λέμε ότι η f είναι της **κλάσεως C^3** εάν υπάρχουν όλες οι μερικοί παράγωγοι πρώτης, δευτέρας και τρίτης τάξεως και είναι συνεχείς, κ.ο.κ.

Θεώρημα (Schwartz) Έστωσαν $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό σύνολο, $f(x, y) : D \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών και σταθερό σημείο $(x_0, y_0) \in D$. Εάν οι $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ορίζονται σε μια περιοχή του (x_0, y_0) και η $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ είναι συνεχής, τότε οι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ υπάρχουν και ισχύει:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

Οικονομικές εφαρμογές της μερικής παραγωγού

Οριακές ποσότητες

Όταν ένα οικονομικό μέγεθος εξαρτάται από πολλές παραμέτρους, οι μερικές παράγωγοι του μεγέθους ως προς αυτές τις παραμέτρους, εκφράζουν την οριακή αλλαγή της οικονομικής ποσότητας όταν αλλάζει μία παράμετρος ενώ οι υπόλοιπες θεωρούνται σταθερές. (Υπόθεση *ceteris paribus*). Το πρόσημο της μερικής παραγωγού δείχνει εάν ένα οικονομικό μέγεθος αυξάνει ή φθίνει όταν αλλάζει λίγο μία παράμετρος (ως προς την οποία υπολογίζεται η παράγωγος) ενώ οι άλλες θεωρούνται σταθερές.

Σχέσεις αγαθών

Δυο αγαθά λέγονται:

Υποκατάστατα, όταν η αύξηση της τιμής του ενός αυξάνει την ζήτηση του άλλου.

Συμπληρωματικά, όταν η αύξηση της τιμής του ενός ελαττώνει την ζήτηση του άλλου.

Ουδέτερα, όταν δεν είναι ούτε υποκατάστατα ούτε συμπληρωματικά.

Έστωσαν δύο αγαθά με συναρτήσεις ζήτησης $D_1(p_1)$, $D_2(p_2)$. Τα πρόσημα των μερικών παραγώγων $\frac{\partial D_1}{\partial p_2}$, $\frac{\partial D_2}{\partial p_1}$ καθορίζουν το είδος της σχέσεως των αγαθών.