Θεωρία & Εφαρμογές Μεθόδων Αριστοποίησης

ΣΧΟΛΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΙΣΜΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: ΜΑΓΚΟΥΤΑΣ Α., ΚΑΠΝΙΑΣ Γ.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Περιεχόμενα

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Συμβολίζουμε με A_{ij} τον υποπίνακα του A ο οποίος προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i-γραμμή του και την j-στήλη του. Σε επόμενο κεφάλαιο, τον πίνακα A_{ij} θα τον ονομάσουμε κύριο υποπίνακα. Για να γίνει πιο κατανοητή η κατασκευή του υποπίνακα A_{ij}, θεωρήστε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

τότε, για παράδειγμα, οι υποπίνακες A_{11}, A_{12} προκύπτουν ως εξής,

$$A_{11} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Διαγραφή} & & \\ \Downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{7} \\ \cancel{0} & 1 & 4 \\ \cancel{5} & 8 & 9 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow[\text{και της 1ης στήλης}]{\text{Διαγραφή της 1ης γραμμής}} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \text{Διαγραφή} & \\ & \Downarrow & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{7} \\ 0 & \cancel{1} & 4 \\ 5 & \cancel{8} & 9 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow[\text{και της 2ης στήλης}]{\text{Διαγραφή της 1ης γραμμής}} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε δει σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι η ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ορίζεται ως ο αριθμός $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ και συμβολίζουμε:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{ή} \quad |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ορισμός *Έστω* $A = [a_{ij}]$ *ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε η* ***ελάσσονα ορίζουσα του στοιχείου*** a_{ij} *συμβολίζεται με* $\det(A_{ij})$ *και ορίζεται ως η ορίζουσα του υποπίνακα* A_{ij} *(ο οποίος, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, προκύπτει από τον αρχικό πίνακα με διαγραφή της* i*-γραμμής και της* j*-στήλης). Ο αριθμός* $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ *συμβολίζεται με* C_{ij} *και ονομάζεται* (i, j)***-αλγεβρικό συμπλήρωμα ή συμπαράγοντας*** *του στοιχείου* a_{ij}*, δηλαδή*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij}).$$

Αναδρομικός ορισμός της ορίζουσας

Ορισμός 1×1 **ορίζουσας:**
Η ορίζουσα ενός πίνακα $A = [a_{11}]$, διάστασης 1×1, είναι ο αριθμός:

$$\boxed{\det(A) = a_{11}.}$$

Ορισμός 2×2 **ορίζουσας:**

Η ορίζουσα ενός πίνακα $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, διάστασης 2×2, είναι ο αριθμός:

$$\boxed{\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.}$$

Η παραπάνω έκφραση προκύπτει αναλυτικά ως εξής,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} =$$

$$(-1)^{1+1}a_{11}\det(A_{11}) + (-1)^{1+2}a_{12}\det(A_{12}) \Rightarrow$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ορισμός 3×3 ορίζουσας:

Η ορίζουσα ενός πίνακα $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, διάστασης 3×3, είναι ο αριθμός:

$$\boxed{\begin{aligned} \det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned}}$$

Η παραπάνω έκφραση προκύπτει αναλυτικά ως εξής,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} =$$

$$(-1)^{1+1}a_{11}\det(A_{11}) + (-1)^{1+2}a_{12}\det(A_{12}) + (-1)^{1+3}a_{13}\det(A_{13}) \Rightarrow$$

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε την ορίζουσα 4×4 κ.ο.κ.

Ορισμός *Για* $n \geq 2$, *η* ***ορίζουσα*** *ενός πίνακα* A, *διάστασης* $n \times n$, *δίνεται από τον τύπο :*

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}),$$

όπου οι C_{1j} *και* $\det(A_{1j})$, $j = 1, \ldots n$, *είναι οι συμπαράγοντες και οι ελάσσονες ορίζουσες διάστασης* $(n-1) \times (n-1)$, *αντίστοιχα.*

Παράδειγμα *Η ορίζουσα του* 3×3 *πίνακα :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

είναι

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) + (-1)^{1+3} a_{13} \det(A_{13}) =$$

$$a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) + a_{13} \det(A_{13}) =$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1(0-2) - 5(0-0) + 0(-4-0) = -2.$$

Θεώρημα *Η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα A, διάστασης $n \times n$, ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του. Δηλαδή,*

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Παράδειγμα *Θεωρούμε τον* 3×3 *άνω τριγωνικό πίνακα :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Αναπτύσσουμε την ορίζουσα του πίνακα A *ως προς τα στοιχεία της 1ης στήλης και έχουμε:*

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{2+1} 0 \cdot \det(A_{21}) + (-1)^{3+1} 0 \cdot \det(A_{31}) =$$

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(4 \cdot 2 - 0) = 1 \cdot 4 \cdot 2 = 8.$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα της ορίζουσας του τριγωνικού πίνακα A ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

Ιδιότητες οριζουσών

Θεώρημα *Έστω A πίνακας διάστασης $n \times n$, τότε ισχύουν τα παρακάτω :*

α) *Αν προσθέσουμε ένα μη μηδενικό πολλαπλάσιο μιας γραμμής σε μια άλλη γραμμή με σκοπό να προκύψει ένας νέος πίνακας B, τότε ισχύει $\det(A) = \det(B)$.*

β) *Αν εναλλάξουμε δυο γραμμές μεταξύ τους με σκοπό να προκύψει ένας νέος πίνακας B, τότε ισχύει $\det(A) = -\det(B)$.*

γ) *Αν πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή με έναν αριθμό k με σκοπό να προκύψει ένας νέος πίνακας B, τότε ισχύει $\det(B) = k \cdot \det(A)$.*

Παράδειγμα

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα A, όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Είναι:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[]{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1}} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3}$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -1 \cdot 3 \cdot (-5) = 15.$$

Γενική μέθοδος υπολογισμού ορίζουσας: Έστω A πίνακας διάστασης $n \times n$. Με βάση τον αλγόριθμο δημιουργίας κλιμακωτής μορφής που συναντήσαμε στην παράγραφο 2.2, ύστερα από έναν πεπερασμένο αριθμό εφαρμογής των α) και β) του Θεωρήματος 4.3, μπορούμε να φέρουμε τον A σε κλιμακωτή μορφή την οποία συμβολίζουμε με R. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο R έχει προκύψει ύστερα από r εναλλαγές γραμμών, τότε θα ισχύει

$$\det(A) = (-1)^r \det(R).$$

Ο πίνακας R θα είναι τριγωνικός οπότε η ορίζουσα του θα είναι το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου, δηλαδή το γινόμενο των pivots στην περίπτωση όπου ο A είναι αντιστρέψιμος, ή το γινόμενο των pivots και τουλάχιστον ενός μηδενικού στην περίπτωση που δεν είναι αντιστρέψιμος.
Για παράδειγμα ο πίνακας R θα μπορούσε να έχει μια από τις παρακάτω μορφές

$$R = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad R = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Στην 1η περίπτωση είναι $\det(R) \neq 0$ ενώ στη 2η είναι $\det(R) = 0$.
Καταλήγουμε στον επόμενο γενικό τύπο:

$$\boxed{\det(A) = \begin{cases} (-1)^r \times \Big(\text{γινόμενο pivots του } R\Big), & \text{αν } A \text{ αντιστρέψιμος} \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad , & \text{αν } A \text{ μη αντιστρέψιμος} \end{cases}}$$

Θεώρημα *Έστω A πίνακας διάστασης $n \times n$. Ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det(A) \neq 0$.*

Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τον κανόνα του Cramer

Θεώρημα ***(Κανόνας του Cramer)*** *Αν* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *είναι ένα* $n \times n$ *γραμμικό σύστημα (δηλ. σύστημα* n *γραμμικών εξισώσεων με* n *αγνώστους) τέτοιο ώστε* $\det(A) \neq 0$, *τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. Η λύση αυτή δίνεται από τους τύπους :*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)},$$

όπου A_j *είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον* A *αν αντικαταστήσουμε την* j*-στήλη με το διάνυσμα* $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

Υπολογισμός αντιστρόφου πίνακα μέσω κλειστού τύπου

Έστω A πίνακας διάστασης $n \times n$ και με C_{ij} συμβολίζουμε το (i, j)-αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij}.

Ορισμός ***(Προσαρτημένος ή Adjoint)*** *Ο πίνακας :*

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix},$$

ονομάζεται ***πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων ή των συμπαραγόντων του*** A . *Ο ανάστροφος του, δηλαδή ο πίνακας:*

$$C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix},$$

ονομάζεται ***προσαρτημένος (adjugate ή adjoint) πίνακας του*** A *και συμβολίζεται με* $adj(A)$.

Κλειστός τύπος για τον υπολογισμό του αντιστρόφου πίνακα: Αν A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, τότε:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A) = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$