

# Θεωρία & Εφαρμογές Μεθόδων Αριστοποίησης

ΣΧΟΛΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΙΣΜΩΝ

---

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: ΜΑΓΚΟΥΤΑΣ Α., ΚΑΠΝΙΑΣ Γ.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

# Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

---

Γενικά, όταν πολλαπλασιάζουμε ένα διάνυσμα με έναν πίνακα το διάνυσμα που προκύπτει έχει διαφορετική κατεύθυνση από το αρχικό. Παρά ταύτα, υπάρχουν συγκεκριμένα διανύσματα, τα οποία ονομάζουμε ιδιοδιανύσματα του πίνακα, που η κατεύθυνση τους παραμένει αναλλοίωτη ύστερα από πολλαπλασιασμό με τον πίνακα. Έτσι, ένα διάνυσμα  $x$  είναι ιδιοδιάνυσμα ενός πίνακα  $A$  αν ισχύει  $Ax = \lambda x$  για κάποιον αριθμό  $\lambda$ . Τον αριθμό  $\lambda$  θα τον ονομάσουμε ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα  $x$ . Οι ιδιοτιμές μπορεί να είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί.

---

**Ορισμός** **Ιδιοδιάνυσμα** ενός  $n \times n$  πίνακα  $A$ , ονομάζεται κάθε μη μηδενικό διάνυσμα  $x$  τέτοιο ώστε να ισχύει  $Ax = \lambda x$ , για κάποιο βαθμωτό  $\lambda$ . Ένα βαθμωτό  $\lambda$  ονομάζεται **ιδιοτιμή** του  $A$  αν υπάρχει μια μη τετριμμένη λύση  $x$  του συστήματος  $Ax = \lambda x$ , ένα τέτοιο  $x$  ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$ .

Παρατηρούμε ότι ο  $\lambda$  είναι ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  αν και μόνο αν η εξίσωση:

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0,$$

έχει μη τετριμμένη λύση.

Επίσης, αφού τα ιδιοδιανύσματα ορίζονται ως οι μη τετριμμένες λύσεις ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος, για κάθε ιδιοδιάνυσμα  $x$  θα ισχύει  $x \neq 0$ .

Για παράδειγμα, έστω:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας  $A - \lambda I$  είναι:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια, θα δούμε έναν πολύ απλό τρόπο για να υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές ενός πίνακα  $A$ , προς το παρόν δεχόμαστε ότι ο  $A$  έχει για ιδιοτιμές τους αριθμούς  $\lambda_1 = -1$  και  $\lambda_2 = 5$ .

Για να βρούμε το ιδιοδιάνυσμα, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_1 = -1$ , κατασκευάζουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow (A - (-1)I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 - (-1) & 2 \\ 4 & 3 - (-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

είναι ισοδύναμο με μια μόνο εξίσωση,

$$2x_1 + 2x_2 = 0 \text{ ή } x_1 = -x_2.$$

---

Οι άπειρες λύσεις του συστήματος είναι της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

# Χαρακτηριστική εξίσωση πίνακα

---

**Ορισμός** Η εξίσωση :

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του πίνακα  $A$ .

Είναι σαφές ότι, ο αριθμός  $\lambda$  είναι ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  αν και μόνο αν επαληθεύει τη χαρακτηριστική εξίσωση  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

**Θεώρημα** Εστω  $A$  ένας  $n \times n$  πίνακας. Ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο αριθμός  $0$  δεν είναι ιδιοτιμή του.

---

**Ορισμός** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πίνακας, τότε η ορίζουσα  $\det(A - \lambda I)$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $n$ , το οποίο ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του  $A$ , και συμβολίζουμε

$$\phi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

**Ορισμός** **Αλγεβρική πολλαπλότητα** ή απλά **πολλαπλότητα** μιας ιδιοτιμής  $\lambda$ , ονομάζεται η πολλαπλότητα της ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα  $A$ .

---

**Δύναμη πίνακα και ιδιοτιμές-ιδιοδιανύσματα :**

Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πίνακας και  $x$  ένα ιδιοδιάνυσμα του  $A$  το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$ . Τότε, με βάση όσα έχουμε πει, θα ισχύει:

$$Ax = \lambda x.$$

Θεωρούμε μια τυχαία δύναμη  $A^k$  του πίνακα  $A$ , τότε παρατηρούμε ότι,

$$A^k x = A^{k-1} Ax = A^{k-1} \lambda x = \lambda A^{k-1} x = \lambda A^{k-2} Ax = \lambda A^{k-2} \lambda x = \lambda^2 A^{k-2} x = \dots = \lambda^k x.$$

Επομένως, ο πίνακας  $A$  έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον πίνακα  $A^k$  με αντίστοιχες ιδιοτιμές την  $k$ -οστή δύναμη των ιδιοτιμών του  $A$ . Έτσι, αν το  $x$  είναι ιδιοδιάνυσμα του  $A$  με αντίστοιχη ιδιοτιμή  $\lambda$  τότε το  $x$  είναι ιδιοδιάνυσμα του  $A^k$ , με αντίστοιχη ιδιοτιμή το  $\lambda^k$ .