

Θεωρία & Εφαρμογές Μεθόδων Αριστοποίησης

ΣΧΟΛΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΙΣΜΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: ΜΑΓΚΟΥΤΑΣ Α., ΚΑΠΝΙΑΣ Γ.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Περιεχόμενα

Αντιστροφή πινάκων (A^{-1})

1. Ορισμός αντιστρέψιμου πίνακα
2. Υπολογισμός A^{-1} με Gauss-Jordan
3. Εφαρμογή αντιστρόφου στην επίλυση συστημάτων

Αντιστροφή πινάκων

Ορισμός

Έστω A ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας και υπάρχει πίνακας X τέτοιος ώστε

$$AX = XA = I_n$$

Τότε λέμε ότι ο πίνακας A **είναι αντιστρέψιμος** και ο πίνακας X είναι ο **αντίστροφος** του πίνακα A .

Στην περίπτωση αυτή συμβολίζουμε:

$$X = A^{-1}$$

Ένας πίνακας που **δεν έχει αντίστροφο** ονομάζεται **μη αντιστρέψιμος** ή **ιδιάζων (singular)**.

Θεώρημα Αντιστροφής Πίνακα 2×2

Θεώρημα

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

με

$$ad - bc \neq 0$$

Τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση

Αν $ad - bc = 0$, τότε ο πίνακας A **δεν είναι αντιστρέψιμος**.

Παράδειγμα Αντιστροφής Πινάκων

Παράδειγμα Ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Πράγματι, είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι $AB = BA = I_2$.

Ιδιότητες Αντιστρέψιμων Πινάκων

Θεώρημα Έστω A, B αντιστρέψιμοι $n \times n$ τετραγωνικοί πίνακες τότε,

α) ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος πίνακας με

$$(A^{-1})^{-1} = A,$$

β) το γινόμενο AB είναι αντιστρέψιμος πίνακας με

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

γ) ο A^T είναι αντιστρέψιμος πίνακας με

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T,$$

δ) ο A^n είναι αντιστρέψιμος και

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \text{ για } n = 0, 1, 2, \dots,$$

ε) για κάθε $k \in \mathbb{R}^*$ ο πίνακας $k \cdot A$ είναι αντιστρέψιμος και $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

Κριτήριο Αντιστρεψιμότητας μέσω Ισοδυναμίας με τον Μοναδιαίο Πίνακα

Θεώρημα Έστω A $n \times n$ πίνακας. Ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο A είναι ισοδύναμος ως προς τις γραμμές με τον μοναδιαίο πίνακα I_n . Σε αυτή την περίπτωση κάθε ακολουθία από στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές που μετατρέπει τον A στον I_n ταυτόχρονα μετατρέπει τον I_n στον A^{-1} .

Μέθοδος Gauss–Jordan για τον Αντίστροφο Πίνακα

✓ Δηλαδή:

Όταν εφαρμόζουμε **στοιχειώδεις πράξεις γραμμών** για να κάνουμε

$$A \rightarrow I$$

οι ίδιες πράξεις μετατρέπουν

$$I \rightarrow A^{-1}.$$

Για αυτό χρησιμοποιούμε τον επαυξημένο πίνακα:

$$[A \mid I] \rightarrow [I \mid A^{-1}]$$

(μέθοδος **Gauss–Jordan**).

Αλγόριθμος για τον υπολογισμό του A^{-1} A (αλγόριθμος των Gauss–Jordan)

Βήμα 1:

Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο για την **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή** στον πίνακα

$$[A \mid I]$$

Βήμα 2:

Αν ο A είναι **ισοδύναμος ως προς τις γραμμές** με τον I , τότε ο

$$[A \mid I]$$

είναι **ισοδύναμος ως προς τις γραμμές** με τον

$$[I \mid A^{-1}].$$

Σε διαφορετική περίπτωση ο πίνακας A **δεν αντιστρέφεται**.

Θεώρημα (Το θεώρημα του αντίστροφου πίνακα)

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι **ισοδύναμες**, με την έννοια ότι για δεδομένο πίνακα A είτε ισχύουν όλες είτε δεν ισχύει καμία.

α) Ο A είναι **αντιστρέψιμος** πίνακας.

β) Ο A είναι **ισοδύναμος** ως προς τις γραμμές με τον μοναδιαίο πίνακα διάστασης $n \times n$.

γ) Ο A έχει n **θέσεις pivot**.

δ) Η εξίσωση

$$Ax = 0$$

έχει **μοναδική λύση** την **τετριμμένη λύση**.

Το Θεώρημα του αντίστροφου πίνακα

ε) Οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

στ) Η εξίσωση

$$Ax = b$$

έχει μία λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^n$.

ζ) Οι στήλες του A παράγουν τον $\mathbb{R}^n$.

η) Υπάρχει πίνακας C τέτοιος ώστε

$$CA = I$$

θ) Υπάρχει πίνακας D τέτοιος ώστε

$$AD = I$$

ι) Ο πίνακας A^T είναι αντιστρέψιμος.

Θεώρημα Έστω A, B τετραγωνικοί πίνακες (ίδιας διάστασης). Αν ισχύει $AB = I$, τότε οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι με $A = B^{-1}$ και $B = A^{-1}$.

Θεώρημα

Έστω A, B τετραγωνικοί πίνακες **ίδιας διάστασης**.
Αν ισχύει

$$AB = I,$$

τότε οι πίνακες A και B είναι **αντιστρέψιμοι** και ισχύει

$$A = B^{-1} \text{ και } B = A^{-1}.$$

✓ Δηλαδή:

Αν δύο τετραγωνικοί πίνακες πολλαπλασιαστούν και δώσουν τον **μοναδιαίο πίνακα**, τότε είναι **αντίστροφοι μεταξύ τους**.

Εφαρμογή της αντιστροφής πίνακα στην επίλυση γραμμικού συστήματος

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή του πολλαπλασιασμού πινάκων έχουμε στα γραμμικά συστήματα. Όπως θα δούμε κάθε γραμμικό σύστημα μπορεί να γραφτεί ως μια εξίσωση πινάκων. Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα, m γραμμικών εξισώσεων και n αγνώστων:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}.$$

Τότε, με βάση τον ορισμό της ισότητας πινάκων, το παραπάνω γραμμικό σύστημα γράφεται στην μορφή:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Η αριστερή πλευρά της παραπάνω ισότητας θα μπορούσε να γραφτεί και ως γινόμενο δυο πινάκων, του $m \times n$

πίνακα, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ με τον $n \times 1$ πίνακα, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Επομένως, αν θεωρήσουμε ότι $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$,

τότε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

γράφεται στη μορφή $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ο αναγνώστης καλείται να επαληθεύσει το γεγονός ότι:

$$A \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας A ονομάζεται **πίνακας των συντελεστών** του συστήματος ή απλά **πίνακας του συστήματος**. Ο πίνακας x ονομάζεται **πίνακας των αγνώστων** και ο πίνακας b **πίνακας των σταθερών όρων**. Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα, m γραμμικών εξισώσεων και n αγνώστων,

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}.$$

Με βάση τον ορισμό του επαυξημένου πίνακα που συναντήσαμε στο κεφάλαιο 2, ο επαυξημένος πίνακας του παραπάνω γραμμικού συστήματος είναι ένας πίνακας ο οποίος προκύπτει εάν στον πίνακα του συστήματος επισυνάψουμε ως τελευταία στήλη τον πίνακα των σταθερών όρων. Άρα ο επαυξημένος πίνακας του παραπάνω συστήματος θα έχει τη μορφή

$$\left[A \mid b \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Λύση Γραμμικού Συστήματος με Αντίστροφο Πίνακα

Θεώρημα

Αν ο A είναι **αντιστρέψιμος** $n \times n$ **πίνακας**, τότε η εξίσωση

$$Ax = b$$

έχει **μοναδική λύση**

$$x = A^{-1}b.$$

Απόδειξη

Ξεκινάμε από την εξίσωση

$$Ax = b$$

Πολλαπλασιάζουμε **αριστερά** με A^{-1} :

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

Επειδή

$$A^{-1}A = I$$

παίρνουμε

$$Ix = A^{-1}b$$

και αφού $Ix = x$, προκύπτει

$$x = A^{-1}b.$$

✓ Δηλαδή:

Αν ο πίνακας A έχει αντίστροφο, τότε το σύστημα $Ax = b$ **λύνεται απλά πολλαπλασιάζοντας με τον αντίστροφο πίνακα.**