

Θεωρία & Εφαρμογές Μεθόδων Αριστοποίησης

ΣΧΟΛΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΙΣΜΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: ΜΑΓΚΟΥΤΑΣ Α., ΚΑΠΝΙΑΣ Γ.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Σημασία και χρησιμότητα Πινάκων

Περιγράφουν οικονομικά συστήματα

Περιγράφουν ισορροπίες

Περιγράφουν παραγωγικές σχέσεις

Περιγράφουν μοντέλα εισροών–εκροών

$$Ax=b$$

- ✓ Αυτή η μορφή εμφανίζεται παντού:

π.χ. ισορροπία αγοράς, παραγωγικά μοντέλα, οικονομετρικά μοντέλα.

- ✓ Δεν αρκεί η διαισθητική/ λογική λήψη απόφασης... Χρειαζόμαστε μαθηματική απόδειξη βελτιστότητας!

Παράδειγμα Εφαρμογής

Παραγωγικό Μοντέλο

Μια επιχείρηση παράγει 2 προϊόντα.

	Εργασία	Πρώτη Ύλη
Προϊόν Α	2	1
Προϊόν Β	1	3
Διαθεσιμότητα πόρων	100 μονάδες	90 μονάδες

Κάθε προϊόν αναλώνει διαφορετικούς πόρους.

Αν παράγω x μονάδες Α και y μονάδες Β, πόσους πόρους θα καταναλώσω;

Παράδειγμα Εφαρμογής

Σύστημα Εξισώσεων

$$2x+y=100$$

$$x+3y=90$$

Αυτό είναι ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων.

Όσο μεγαλώνει η επιχείρηση, τόσο μεγαλώνει το σύστημα.

Μετάπτωση δεδομένων σε Πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Εισαγωγή στους Πίνακες

Τι είναι Πίνακας;

Ορισμός: Ορθογώνια διάταξη αριθμών σε γραμμές και στήλες, υπό τη γενική μορφή:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας απλώς οργανώνει πληροφορία.

1. Κάθε γραμμή μπορεί να είναι ένας πόρος.
2. Κάθε στήλη μπορεί να είναι ένα προϊόν.

Μετατροπή συστήματος σε πίνακα

Το σύστημα του προηγούμενου Παραδείγματος μπορούμε να το γράψουμε σε μορφή πίνακα.

Μητρικός πίνακας συντελεστών

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Διάνυσμα μεταβλητών

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Διάνυσμα αποτελεσμάτων

$$b = \begin{bmatrix} 100 \\ 90 \end{bmatrix}$$

Άρα το σύστημα γράφεται συνοπτικά:

$$Ax = b$$

Η μορφή αυτή εμφανίζεται συχνά σε οικονομικά μοντέλα, ισορροπίες αγοράς και παραγωγικά συστήματα.

Παράδειγμα

Μια μικρή επιχείρηση φτιάχνει 3 προϊόντα:

1. Μπάρες δημητριακών
2. Σακουλάκια ξηρών καρπών
3. Μπισκότα

Έχει 3 περιορισμένους πόρους ανά ημέρα:

Ώρες εργασίας (ώρες)

Πρώτες ύλες (κιλά)

Χρόνος μηχανής (ώρες)

Πόρος \ Προϊόν	Μπάρες	Ξηροί καρποί	Μπισκότα	Διαθέσιμα
Εργασία (ώρες)	2	1	1	100
Πρώτες ύλες (kg)	1	3	1	120
Μηχανή (ώρες)	1	1	2	80

Ερώτηση:

Να βρεθούν οι ποσότητες των προϊόντων που πρέπει να παράγει η επιχείρηση ώστε να χρησιμοποιήσει ακριβώς τους διαθέσιμους πόρους

Λύση

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις μεταβλητές:

- x_1 = ποσότητα από **μπάρες δημητριακών**
- x_2 = ποσότητα από **σακουλάκια ξηρών καρπών**
- x_3 = ποσότητα από **μπισκότα**

έτσι ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι περιορισμοί των πόρων:

- διαθέσιμες ώρες εργασίας
- διαθέσιμες πρώτες ύλες
- διαθέσιμος χρόνος μηχανής

Αυτό γράφεται μαθηματικά ως:

$$Ax = b$$

όπου:

A = πίνακας κατανάλωσης πόρων

x = ποσότητες παραγωγής (αυτό είναι το ζητούμενο)

b = διαθέσιμοι πόροι

Άρα το ζητούμενο είναι:

Να βρούμε το διάνυσμα $x = (x_1, x_2, x_3)$

δηλαδή τις ποσότητες παραγωγής των τριών προϊόντων.

Άρα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 80 \end{bmatrix}$$

και το σύστημα είναι:

$$Ax = b$$

δηλαδή:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 120 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 80 \end{cases}$$

Αλγεβρική επίλυση

Από την 3η:

$$x_1 = 80 - x_2 - 2x_3$$

Βάζω αυτό στην 1η:

$$2(80 - x_2 - 2x_3) + x_2 + x_3 = 100$$

$$160 - 2x_2 - 4x_3 + x_2 + x_3 = 100$$

$$160 - x_2 - 3x_3 = 100 \Rightarrow x_2 + 3x_3 = 60 \text{ (A)}$$

Βάζω το x_1 και στη 2η:

$$(80 - x_2 - 2x_3) + 3x_2 + x_3 = 120$$

$$80 + 2x_2 - x_3 = 120 \Rightarrow 2x_2 - x_3 = 40 \text{ (B)}$$

Λύνω το σύστημα (Α) και (Β):

$$(A): x_2 = 60 - 3x_3$$

Στο (Β):

$$2(60 - 3x_3) - x_3 = 40$$

$$120 - 6x_3 - x_3 = 40$$

$$120 - 7x_3 = 40 \Rightarrow 7x_3 = 80 \Rightarrow x_3 = \frac{80}{7} \approx 11.43$$

Τότε:

$$x_2 = 60 - 3 \cdot \frac{80}{7} = 60 - \frac{240}{7} = \frac{420-240}{7} = \frac{180}{7} \approx 25.71$$

Και:

$$x_1 = 80 - \frac{180}{7} - 2 \cdot \frac{80}{7} = 80 - \frac{180}{7} - \frac{160}{7} = 80 - \frac{340}{7} = \frac{560-340}{7} = \frac{220}{7} \approx 31.43$$

Τελική λύση (ποσότητες παραγωγής)

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{220}{7} \\ \frac{180}{7} \\ \frac{80}{7} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 31.43 \\ 25.71 \\ 11.43 \end{bmatrix}$$

Για να **εξαντλήσει ακριβώς** τους διαθέσιμους πόρους της ημέρας, η επιχείρηση πρέπει να παράγει περίπου:

31.4 μονάδες μπάρες

25.7 μονάδες ξηρούς καρπούς

11.4 μονάδες μπισκότα

Σημασία Γραμμικών Συστημάτων

Στην οικονομική επιστήμη και τη διοίκηση επιχειρήσεων τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση οικονομικών σχέσεων.

Εφαρμογές

- Προγραμματισμός παραγωγής
- Κατανομή πόρων
- Ανάλυση κόστους και παραγωγής
- Υπολογισμός ισορροπίας αγοράς

Παράδειγμα

Μια επιχείρηση θέλει να βρει πόσα προϊόντα πρέπει να παράγει ώστε να χρησιμοποιήσει σωστά τους διαθέσιμους πόρους της. Οι περιορισμοί παραγωγής εκφράζονται ως σύστημα εξισώσεων.

Γραμμικές Εξισώσεις- Συστήματα Γραμμικών εξισώσεων

Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Μια **γραμμική εξίσωση** ως προς τις μεταβλητές (αγνώστους) $x_1, \dots, x_n$ είναι μια εξίσωση που μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b.$$

όπου το b και οι **συντελεστές** είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί.

Ένα **σύστημα γραμμικών εξισώσεων** (ή **ένα γραμμικό σύστημα**), είναι μια συλλογή από γραμμικές εξισώσεις ως προς τις ίδιες μεταβλητές, για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 &= -4.\end{aligned}$$

Λύσεις του Συστήματος Γραμμικών εξισώσεων

Μια **λύση του συστήματος** ονομάζεται μια λίστα αριθμών $\{s_1, \dots, s_n\}$ η οποία επαληθεύει κάθε εξίσωση του συστήματος όταν αντικαταστήσουμε τους αριθμούς $s_1, \dots, s_n$ στη θέση των $x_1, \dots, x_n$, αντίστοιχα. Στο παραπάνω παράδειγμα, η λύση που επαληθεύει και τις δυο εξισώσεις είναι η $\{s_1, s_2\} = \{1, 2\}$. Το σύνολο όλων των δυνατών λύσεων ενός γραμμικού συστήματος ονομάζεται **σύνολο λύσεων** του συστήματος, ενώ συστήματα που έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων ονομάζονται **ισοδύναμα**.

Για το πλήθος των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος ισχύει ότι, ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων μπορεί να έχει:

- α) καμία λύση,
- β) μοναδική λύση,
- γ) άπειρες λύσεις.

Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων ονομάζεται **συμβιβάστο** αν έχει μια λύση ή άπειρες λύσεις, ενώ ονομάζεται **αδύνατο ή μη συμβιβάστο** αν δεν έχει λύση.

Οι συντελεστές των αγνώστων ενός συστήματος, ευθυγραμμισμένοι ως στήλες ενός πίνακα δημιουργούν τον **πίνακα των συντελεστών** του συστήματος. Αν στον πίνακα των συντελεστών προσθέσουμε άλλη μια στήλη η οποία αποτελείται από τους αντίστοιχους σταθερούς όρους του συστήματος τότε δημιουργείται ο **επαυξημένος πίνακας** του γραμμικού συστήματος.

$$A \cdot x = b$$

Στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές

Ονομάζουμε **στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές** ενός πίνακα τις ακόλουθες:

- α) Αντικατάσταση μιας γραμμής από το άθροισμα της με ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής.
 - β) Εναλλαγή δυο γραμμών.
 - γ) Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής με μια μη μηδενική σταθερά.
- **Σημείωση:** Πράξεις μεταξύ των γραμμών μπορούμε να εφαρμόσουμε σε οποιονδήποτε πίνακα είτε είναι επαυξημένος πίνακας κάποιου γραμμικού συστήματος είτε όχι.

Ισοδυναμία Πινάκων

- Θα λέμε ότι δύο πίνακες είναι **ισοδύναμοι ως προς τις γραμμές** ή **γραμμοϊσοδύναμοι** αν υπάρχει μια ακολουθία στοιχειωδών πράξεων που μπορούν να μετατρέψουν τον ένα πίνακα στον άλλο.
- Αν οι επαυξημένοι πίνακες δύο γραμμικών συστημάτων είναι ισοδύναμοι ως προς τις γραμμές τότε τα δύο γραμμικά συστήματα **έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων**.

Κλιμακωτή μορφή πίνακα

Μια **μη μηδενική γραμμή ή στήλη** ενός πίνακα ονομάζεται μια οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη του πίνακα η οποία έχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο. Σε μια μη μηδενική γραμμή, το μη μηδενικό στοιχείο που βρίσκεται αριστερότερα των υπολοίπων στοιχείων της γραμμής ονομάζεται **οδηγό ή ηγετικό στοιχείο** της.

Ένας πίνακας ονομάζεται **κλιμακωτός ή κλιμακωτής μορφής** αν έχει τις παρακάτω τρεις ιδιότητες:

- a. Οι μηδενικές γραμμές, αν υπάρχουν, βρίσκονται στη σειρά μετά τις μη μηδενικές γραμμές
- b. Κάθε οδηγό στοιχείο μιας γραμμής βρίσκεται σε δεξιότερη στήλη αυτής που βρίσκεται το οδηγό στοιχείο της από πάνω γραμμής του.
- c. Όλα τα στοιχεία της στήλης κάτω από ένα οδηγό στοιχείο είναι μηδέν.

Κλιμακωτή μορφή πίνακα

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας είναι κλιμακωτός.

- ❶ Οι μηδενικές γραμμές είναι στο τέλος
- ❷ Κάθε οδηγό στοιχείο είναι πιο δεξιά από της προηγούμενης γραμμής
- ❸ Κάτω από κάθε οδηγό στοιχείο υπάρχουν μόνο μηδενικά

Ανηγμένος κλιμακωτός Πίνακας

Reduced Row Echelon Form - RREF

Ένας πίνακας ονομάζεται **ανηγμένος κλιμακωτός** ή **ανηγμένης κλιμακωτής μορφής** αν έχει τις παρακάτω τρεις ιδιότητες:

- a. Είναι κλιμακωτός.
- b. Το οδηγό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι 1.
- c. Κάθε στήλη που περιέχει το οδηγό στοιχείο (δηλαδή το 1) έχει όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της ίσα με 0.

RREF example

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Αυτός είναι πίνακας σε **RREF**.

Ένας πίνακας είναι **ανηγμένος κλιμακωτός** όταν:

- είναι ήδη κλιμακωτός
- τα οδηγά στοιχεία είναι **1**
- στη στήλη του οδηγού υπάρχουν μόνο μηδενικά εκτός από αυτό

Ανηγμένος κλιμακωτός Πίνακας

Θεώρημα: Κάθε πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με ένα και μόνο ένα ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

Μια **θέση ηγετικού στοιχείου (θέση pivot)** ενός πίνακα είναι η θέση στον πίνακα στην οποία αντιστοιχεί η μονάδα ως οδηγό στοιχείο στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα. Η στήλη που περιέχει μια θέση pivot ονομάζεται **ηγετική στήλη**.

Αλγόριθμος για τη δημιουργία κλιμακωτής ή ανηγμένης κλιμακωτής μορφής σε πίνακα

Βήμα 1: Ξεκινάμε με την αριστερότερη μη μηδενική στήλη. Αυτή είναι *pivot* στήλη και η θέση του *pivot* στοιχείου βρίσκεται στην κορυφή της στήλης.

Βήμα 2: Επιλέγουμε ένα μη μηδενικό στοιχείο στην *pivot* στήλη. Αν είναι αναγκαίο, κάνουμε εναλλαγή των γραμμών ώστε να μετακινήσουμε το στοιχείο αυτό στη θέση *pivot* (δηλαδή στην κορυφή της στήλης).

Βήμα 3: Χρησιμοποιούμε πράξεις στις γραμμές του πίνακα προκειμένου να δημιουργήσουμε μηδενικά σε όλες τις θέσεις κάτω από το *pivot* στοιχείο.

Βήμα 4: Αγνοούμε την γραμμή που περιέχει το *pivot* στοιχείο καθώς και όλες τις γραμμές που βρίσκονται από πάνω. Εφαρμόζουμε τα βήματα 1 – 3 για τον υποπίνακα που προκύπτει.

Αν επιπλέον θέλουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα πρέπει να εφαρμόσουμε και το παρακάτω βήμα (Βήμα 5).

Βήμα 5: Ξεκινάμε με το *pivot* στοιχείο που βρίσκεται στην δεξιότερη θέση και εργαζόμενοι πάνω και αριστερά δημιουργούμε μηδενικά πάνω από κάθε *pivot*. Αν ένα *pivot* στοιχείο δεν είναι ίσο με 1 τότε το μετατρέπουμε σε 1 με την βοήθεια κατάλληλης στοιχειώδους πράξης.

Παρατήρηση: Τα 3 πρώτα βήματα του παραπάνω αλγορίθμου αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως η **μέθοδος απαλοιφής Gauss (με μερική οδήγηση)**. Αν εφαρμόσουμε και τα 5 βήματα του αλγορίθμου ώστε να οδηγηθούμε σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, τότε ονομάζεται ως η **μέθοδος απαλοιφής Gauss-Jordan (με μερική οδήγηση)**.

Παράδειγμα

Μετατροπή του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 6 \end{bmatrix},$$

σε κλιμακωτή και ανηγμένη κλιμακωτή μορφή με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 6 \end{bmatrix} &\xrightarrow[\text{Pivot στήλη}_1]{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -8 \\ -1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Pivot στοιχείο}_{1,1}]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{4} & -8 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\text{Pivot στήλη}_2, \text{ στοιχείο}_{2,2}]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{4} & -8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \quad \text{(η κλιμακωτή μορφή του πίνακα A)} \\ &\xrightarrow[\text{Pivot στοιχείο}_{3,3}]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + 8 \cdot \Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Pivot στοιχείο}_{3,3}]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 3 \cdot \Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\text{Pivot στοιχείο}_{2,2}]{\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα A).} \end{aligned}$$

Α. Κ. Μ.

Σύνολο Λύσεων Γραμμικού Συστήματος

Έστω ότι ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος βρίσκεται σε **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή**. Οι μεταβλητές που αντιστοιχούν στα **pivot** στοιχεία ονομάζονται **βασικές μεταβλητές**, ενώ οι υπόλοιπες **ελεύθερες μεταβλητές**.

Θεώρημα (Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας)

- **(Υπαρξη)** Ένα γραμμικό σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν η δεξιότερη στήλη του αντίστοιχου επαυξημένου πίνακα δεν είναι **pivot** στήλη. Αυτό σημαίνει αν και μόνο αν η κλιμακωτή μορφή του πίνακα δεν περιέχει μια γραμμή της μορφής

$$[0 \ \dots \ 0 \mid b], b \neq 0.$$

- **(Μοναδικότητα)** Αν ένα σύστημα είναι συμβιβαστό, τότε το σύνολο λύσεων περιέχει:

α) **μοναδική λύση**, όταν δεν έχουμε ελεύθερους αγνώστους,

β) **άπειρες λύσεις**, όταν υπάρχει τουλάχιστον ένας ελεύθερος άγνωστος.

Αλγόριθμος για την επίλυση γραμμικού συστήματος με δημιουργία κλιμακωτής μορφής στον επαυξημένο πίνακα

Βήμα 1: Γράφουμε τον επαυξημένο πίνακα του γραμμικού συστήματος.

Βήμα 2: Χρησιμοποιούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου ώστε να προκύψει γραμμοϊσοδύναμος πίνακας σε κλιμακωτή μορφή. Αποφασίζουμε αν το σύστημα είναι συμβιβάσιμο. Αν δεν υπάρχει λύση, σταματάμε την διαδικασία, αλλιώς συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

Βήμα 3: Συνεχίζουμε τις στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές μέχρι να δημιουργήσουμε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Βήμα 4: Γράφουμε τις εξισώσεις του συστήματος που αντιστοιχούν στον επαυξημένο πίνακα του βήματος 3.

Βήμα 5: Ξαναγράφουμε κάθε μη μηδενική εξίσωση από το βήμα 4 έτσι ώστε να εκφράζεται κάθε βασική μεταβλητή σαν συνάρτηση των ελεύθερων μεταβλητών που εμφανίζονται στην εξίσωση .

Παράδειγμα

Δίνεται το Σύστημα:

$$x+y+z=6$$

$$2x+y+3z=14$$

$$x+2y+z=9$$

1) Φτιάχνω τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid b]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 14 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

2) Δημιουργία κλιμακωτής μορφής (μηδενίζω κάτω από τον πρώτο οδηγό)

Στόχος: κάτω από το 1 της 1ης στήλης να γίνουν μηδενικά.

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3) Μηδενίζω κάτω από τον οδηγό της 2ης στήλης

Εδώ είναι βολικό να κάνω πρώτα ανταλλαγή για να έχω “καθαρό” οδηγό:

Ανταλλαγή: $R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Τώρα μηδενίζω το -1 κάτω από το 1:

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$



Αυτός ο πίνακας είναι **κλιμακωτής μορφής** (έχουμε “σκαλοπάτια” και μηδενικά κάτω από τους οδηγούς).

4) Οπισθοαντικατάσταση (βρίσκω τις μεταβλητές)

Η 3η γραμμή λέει:

$$z = 5$$

Η 2η γραμμή λέει:

$$y = 3$$

Η 1η γραμμή:

$$x + y + z = 6 \Rightarrow x + 3 + 5 = 6 \Rightarrow x = -2$$

Τελική λύση

$$(x, y, z) = (-2, 3, 5)$$

Η εξίσωση $Ax = b$

Η εξίσωση $Ax = b$

Ορισμός: Έστω A πίνακας διάστασης $m \times n$, με στήλες $a_1, a_2, \dots, a_n$, και $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε το γινόμενο του πίνακα A με το διάνυσμα x , που συμβολίζεται με Ax , είναι ο **γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A** έχοντας ως βάρη τα αντίστοιχα στοιχεία του x . Δηλαδή

$$Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n.$$

- Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός πίνακα–διανύσματος μπορεί να ιδωθεί ως άθροισμα των στηλών του πίνακα πολλαπλασιασμένων με τους συντελεστές του διανύσματος x

Η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n.$$

Σημαντική παρατήρηση: Το γινόμενο $A\mathbf{x}$ ορίζεται μόνο στην περίπτωση που ο αριθμός των στηλών του πίνακα A ισούται με τον αριθμό των στοιχείων του διανύσματος $\mathbf{x}$. Επίσης, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- α) $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$,
- β) $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα: Έστω A πίνακας διάστασης $m \times n$, με στήλες $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, τότε η εξίσωση πινάκων

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

έχει το ίδιο σύνολο λύσεων με τη διανυσματική εξίσωση

$$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \dots + \mathbf{a}_nx_n = \mathbf{b}$$

η οποία με την σειρά της έχει το ίδιο σύνολο λύσεων με το σύστημα που έχει για επανζημένο πίνακα του

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b} \end{array} \right].$$

Ομογενή γραμμικά συστήματα

Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων ονομάζεται **ομογενές** αν μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$Ax = 0 \in \mathbb{R}^m$$

όπου A πίνακας διάστασης $m \times n$ και $x \in \mathbb{R}^n$. Η εξίσωση $Ax = 0$ ονομάζεται **ομογενής εξίσωση**.

Παρατηρήστε ότι ένα **ομογενές γραμμικό σύστημα είναι πάντα συμβιβαστό**, αφού το διάνυσμα $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ είναι πάντα λύση του συστήματος. Τη λύση $x = 0$ την ονομάζουμε **τετριμμένη λύση** του συστήματος, ενώ το βασικό ερώτημα στα ομογενή γραμμικά συστήματα είναι αν υπάρχουν **μη τετριμμένες λύσεις**.

Πρόταση (Υπαρξη μη τετριμμένων λύσεων σε ομογενές γραμμικό σύστημα)
Η ομογενής εξίσωση $Ax = 0$ έχει μη τετριμμένη λύση, αν και μόνο αν, έχει τουλάχιστον έναν **ελεύθερο άγνωστο**.

Μη ομογενή γραμμικά συστήματα

Θεώρημα: Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $Ax = b$ είναι συμβιβαστή για κάποιο b και έστω p η λύση της.

Το σύνολο λύσεων της $Ax = b$ είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων της μορφής

$$w = p + v_h,$$

όπου με v_h συμβολίζουμε μια (τυχαία) λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$.

Αλγόριθμος για τον υπολογισμό του συνόλου λύσεων συμβιβαστού συστήματος σε παραμετρική διανυσματική μορφή

Βήμα 1: Γράφουμε τον επαυξημένο πίνακα του γραμμικού συστήματος και τον μετατρέπουμε, με στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές, σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Βήμα 2: Εκφράζουμε κάθε βασική μεταβλητή σαν συνάρτηση των ελεύθερων μεταβλητών που εμφανίζονται.

Βήμα 3: Γράφουμε μια λύση x του συστήματος σαν διάνυσμα του οποίου τα στοιχεία εξαρτώνται από τις ελεύθερες μεταβλητές (αν υπάρχουν).

Βήμα 4: Κάνουμε διάσπαση του x σε γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων με αριθμητικές τιμές χρησιμοποιώντας τις ελεύθερες μεταβλητές ως παραμέτρους.
