

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Γραμμικές εξισώσεις – Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Άσκηση 1:

Δίνεται το γραμμικό σύστημα :

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9.\end{aligned}$$

Να γράψετε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος σε τριγωνική μορφή. Να βρείτε το σύνολο λύσεων του γραμμικού συστήματος. Είναι το γραμμικό σύστημα συμβαστό;

Άσκηση 2:

Να σχεδιάσετε τις γραμμές $\varepsilon_1: x_1 - 4x_2 = 1$, $\varepsilon_3: 2x_1 - x_2 = -3$ και $\varepsilon_2: -x_1 - 3x_2 = 4$. Έχουν κοινό σημείο τομής; Αιτιολογήστε.

Άσκηση 3:

Να εξετάσετε αν τα επίπεδα $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$, $x_2 - x_3 = 1$ και $x_1 + 3x_2 = 0$ έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο τομής.

Άσκηση 4:

Να εξετάσετε αν είναι συμβαστό το παρακάτω γραμμικό σύστημα :

$$\begin{aligned}x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 &= 1.\end{aligned}$$

Άσκηση 5:

Να βρείτε μια σχέση μεταξύ των g , h και k ώστε ο παρακάτω επαυξημένος πίνακας να αντι-στοιχεί σε συμβαστό γραμμικό σύστημα :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{array} \right].$$

Άσκηση 6:

Υποθέτουμε ότι το παρακάτω γραμμικό σύστημα είναι συμβαστό για όλες τις πιθανές τιμές των f , g :

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 &= f \\ cx_1 + dx_2 &= g\end{aligned}$$

Τι μπορείτε να πείτε για τους συντελεστές c , d ; Αιτιολογήστε.

Άσκηση 7:

Για τους παρακάτω πίνακες, να βρείτε τις στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές που μετατρέπουν τον πρώτο πίνακα στον δεύτερο :

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & 6 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -13 & 27 \end{array} \right].$$

Άσκηση 8:

Να γράψετε τον παρακάτω πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, και να εντοπιστούν τα ηγετικά στοιχεία (pivots) και οι ηγετικές στήλες,

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 9:

Ο παρακάτω πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος, σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Να γράψετε τις εξισώσεις του αντίστοιχου γραμμικού συστήματος καθώς και τη γενική λύση του συστήματος.

Άσκηση 10:

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

α) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι συμβιβάσιμη για όλες τις τιμές των b_1, b_2, b_3 .

β) Να βρείτε μια συνθήκη μεταξύ των b_1, b_2, b_3 ώστε η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ να είναι συμβιβάσιμη.

Άσκηση 11:

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Να γράψετε τον επαυξημένο πίνακα που αντιστοιχεί στην εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Στη συνέχεια να λύσετε το σύστημα και να γράψετε τη λύση σαν διάνυσμα.

Άσκηση 12:

Να εξετάσετε αν το παρακάτω ομογενές γραμμικό σύστημα έχει μη τετριμμένες λύσεις,

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Στην συνέχεια να περιγράψετε αναλυτικά και γεωμετρικά το σύνολο λύσεων του συστήματος.

Άσκηση 13:

Να γράψετε σε παραμετρική διανυσματική μορφή το σύνολο λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος $A\mathbf{x} = 0$, όπου ο A είναι ισοδύναμος ως προς τις γραμμές με τον πίνακα :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 14:

Να περιγράψετε αναλυτικά και γεωμετρικά το σύνολο λύσεων του μη ομογενούς γραμμικού συστήματος $Ax = b$, με

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$