ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

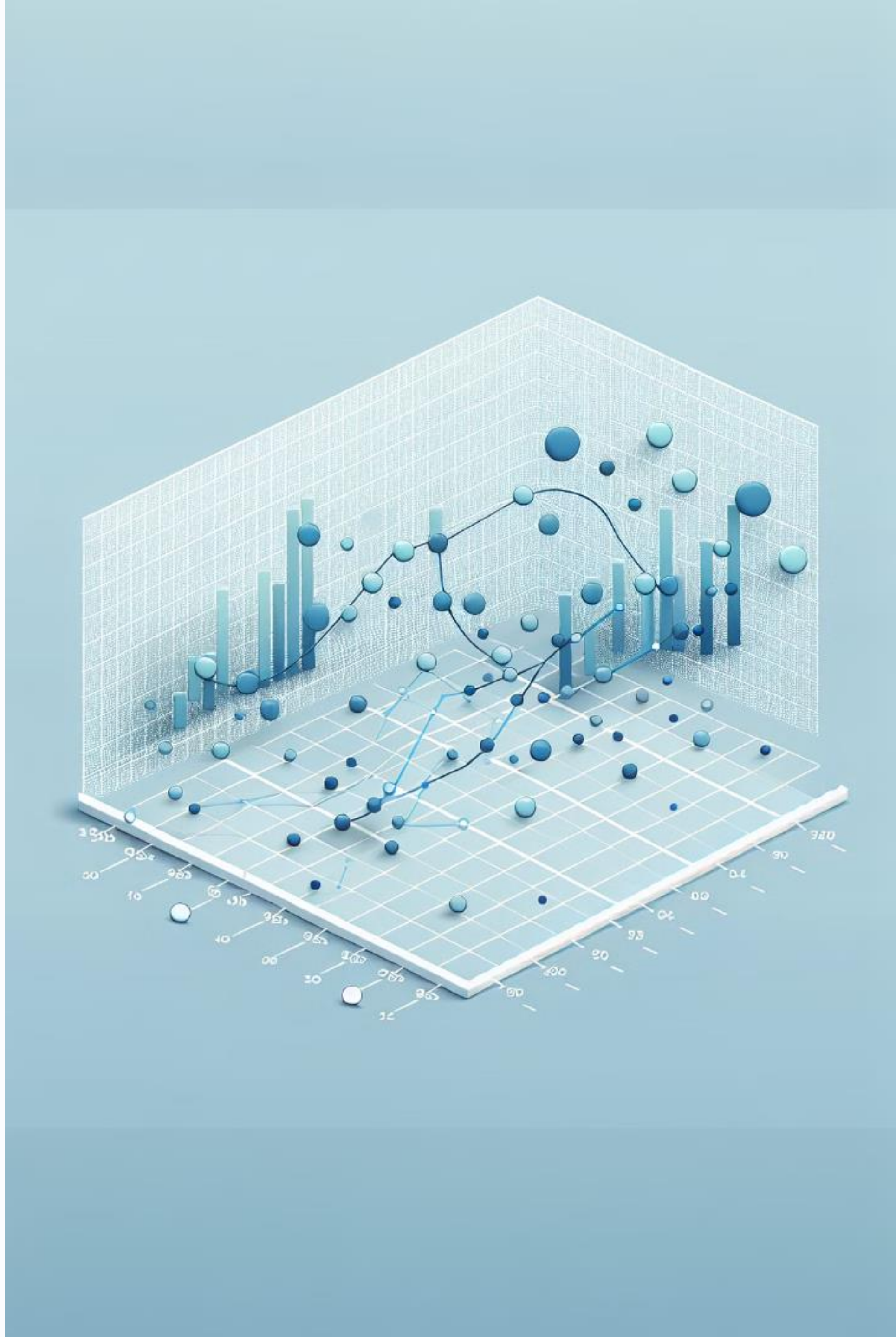
ΔΠΜΣ «ΤΕΧΝΟ-ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ»

Μάθημα: Ποσοτικές Μέθοδοι

Διδάσκων: Δρ. Ευάγγελος Δημ. Μακρυβέλιος

3η Εκπαιδευτική Συνάντηση:
Διαστήματα Εμπιστοσύνης
Έλεγχοι Υποθέσεων

Αθήνα, 2024



Επαγωγική Στατιστική (ή Στατιστική Συμπερασματολογία)

Περιλαμβάνει τις μεθόδους που μας βοηθούν **να εκτιμήσουμε** τα χαρακτηριστικά ενός πληθυσμού με βάση τις πληροφορίες που προκύπτουν από τις **παρατηρήσεις ενός δείγματος**

Ένα **τυχαίο δείγμα** από έναν άπειρο πληθυσμό είναι ένα δείγμα που επιλέγεται έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

- Κάθε στοιχείο που επιλέγεται προέρχεται από τον **πληθυσμό**

- Κάθε στοιχείο επιλέγεται **τυχαία και ανεξάρτητα** από τα άλλα στοιχεία του πληθυσμού

Τυχαία δειγματοληψία

Τα αποτελέσματα του δείγματος παρέχουν **μόνο εκτιμήσεις των τιμών των χαρακτηριστικών** του πληθυσμού. Με τις κατάλληλες μεθόδους τα αποτελέσματα του δείγματος μπορούν να παρέχουν **«καλές» εκτιμήσεις** των χαρακτηριστικών του πληθυσμού

Ορίζουμε ως **τυχαίο δείγμα** από έναν πληθυσμό n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ που ακολουθούν την ίδια κατανομή με τον πληθυσμού

Μετά την πραγματοποίηση μιας δειγματοληψίας έχουμε διαθέσιμες n συγκεκριμένες τιμές των n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_n$ και τις συμβολίζουμε με $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Οι συγκεκριμένες αυτές τιμές ονομάζονται **δεδομένα** (data)

Στατιστικές συναρτήσεις

Παράμετρο ονομάζουμε **μία συνάρτηση όλων των δεδομένων** του πληθυσμού

Παραδείγματα παραμέτρων είναι ο μέσος **μ**, η διακύμανση $\boldsymbol{\sigma^2}$ και η τυπική απόκλιση $\boldsymbol{\sigma}$

Στατιστική συνάρτηση ή **εκτιμήτρια συνάρτηση** ονομάζουμε μία συνάρτηση $\boldsymbol{\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$ των μεταβλητών ενός δείγματος που χρησιμοποιείται **για την εκτίμηση** μιας παραμέτρου του πληθυσμού

Παραδείγματα στατιστικών συναρτήσεων είναι ο δειγματικός μέσος, η δειγματική διακύμανση και η δειγματική τυπική απόκλιση

Εκτίμηση παραμέτρων

- Ένας **τρόπος εκτίμησης** μιας άγνωστης παραμέτρου ενός πληθυσμού είναι μέσω της τιμής μιας εκτιμήτριας για συγκεκριμένη πραγματοποίηση ενός τυχαίου δείγματος. Αυτό ονομάζεται **σημειακή εκτίμηση παραμέτρου** και το αποτέλεσμα είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός

- Ο τρόπος αυτός είναι **προσεγγιστικός**, καθώς είναι απίθανο η εκτίμηση που θα προκύψει **να συμπέσει με την πραγματική τιμή** της παραμέτρου στον πληθυσμό

- Ο δεύτερος τρόπος είναι να προσδιοριστεί, με βάση το τυχαίο δείγμα, ένα **διάστημα εμπιστοσύνης** εντός του οποίου αναμένεται ότι θα βρίσκεται **η πραγματική τιμή της παραμέτρου στον πληθυσμό με ορισμένη πιθανότητα**. Ο τρόπος αυτός είναι πιο αξιόπιστος

Συχνά χρησιμοποιούμενες εκτιμήτριες συναρτήσεις

Δειγματικός μέσος:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Δειγματική διακύμανση:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Από ένα συγκεκριμένο δείγμα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ λαμβάνουμε τις ***σημειακές εκτιμήσεις:***

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Κάθε εκτιμήτρια συνάρτηση **ακολουθεί μια κατανομή** που ονομάζεται **κατανομή δειγματοληψίας**. Πρόκειται για μια κατανομή των τιμών της συνάρτησης για ένα συγκεκριμένο μέγεθος δείγματος

Ιδιότητες Εκτιμητών

Αμεροληψία

Μια εκτιμήτρια $\hat{\Theta}$ μια παραμέτρου θ ονομάζεται **αμερόληπτη** αν η αναμενόμενη τιμής της κατανομής δειγματοληψίας του $\hat{\Theta}$ **είναι είσαι με την πραγματική** τιμή θ_0 της παραμέτρου στον πληθυσμό δηλαδή ισχύει: $\boldsymbol{E(\theta\hat{}) = \theta_0}$

Αυτό σημαίνει ότι **σε επαναλαμβανόμενες δειγματοληψίες** η **εκτιμήτρια κατά μέσο όρο εκτιμά σωστά την άγνωστη παράμετρο** (ούτε την υπερεκτιμά ούτε την υποεκτιμά)

Αποτελεσματικότητα

Μεταξύ των αμερόληπτων εκτιμητριών **πιο αποτελεσματική** είναι αυτή που έχει **μικρότερη διακύμανση**

Συνέπεια

Μια εκτιμήτρια ονομάζεται συνεπής όταν **συγκλίνει προς την πραγματική τιμή της παραμέτρου** του πληθυσμού, **καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος**

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Πολύ σημαντικό θεώρημα των πιθανοτήτων σχετικά με τη **συμπεριφορά αθροισμάτων τυχαίων μεταβλητών.**

Έστω ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από ένα πληθυσμό με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2.
Τότε, αν το **μέγεθος** του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο (συνήθως ένα δείγμα μεγαλύτερο από 30 θεωρείται ως επαρκές), ο **δειγματικός μέσος** $\bar{X}$ ακολουθεί κατά προσέγγιση **την κανονική κατανομή** με **μέση τιμή** μ **και διακύμανση** $\frac{\sigma^2}{n}$. Επομένως:

- $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$,
- $E(\bar{X}) = \mu, \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ και $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(το $\sigma_{\bar{X}}$ καλείται τυπικό σφάλμα του μέσου με σύμβολο SE)

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

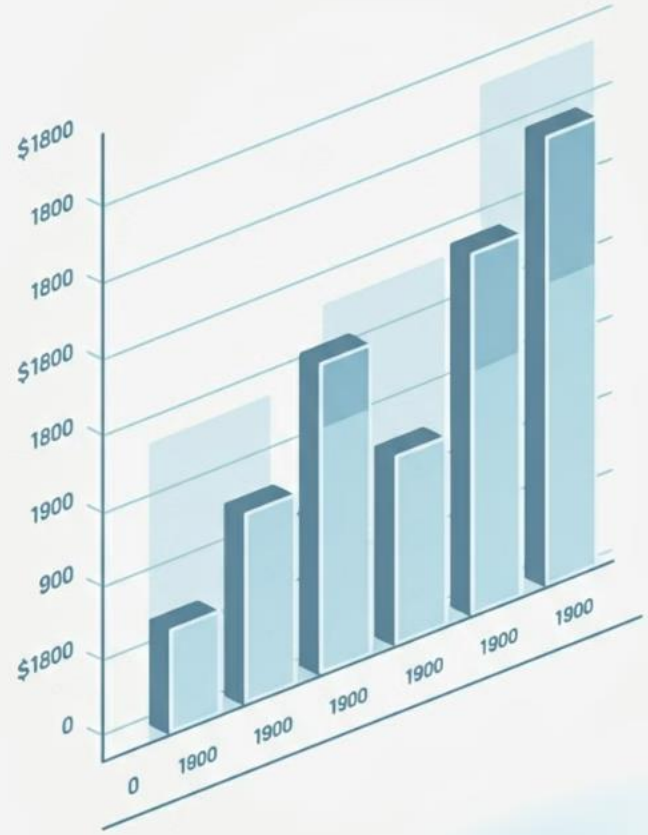
$$\text{Αφού } \overline{X} \sim N\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right), \text{ προκύπτει ότι } \quad Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Συμπεράσματα

- Εάν **ο πληθυσμός** της υπό μελέτη τυχαίας μεταβλητής **δεν ακολουθεί** την κανονική κατανομή, τότε ο **δειγματικός μέσος $\overline{X}$ ακολουθεί** την κανονική κατανομή, όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο **($n > 30$)**

- Όσο **αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος τόσο καλύτερη η προσέγγιση του μέσου του πληθυσμού** (γιατί;)

- Διότι το **τυπικό σφάλμα $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ μειώνεται όσο το *n* αυξάνεται**



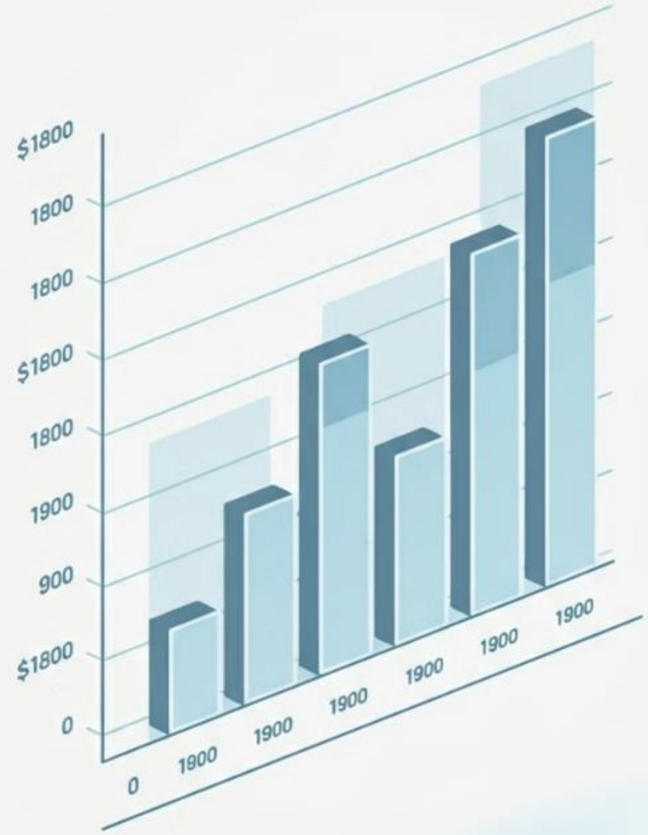
Παράδειγμα

Το Υπουργείο Εργασίας επιθυμεί να έχει μια εκτίμηση του μέσου μηνιαίου μισθού που λαμβάνουν οι δημόσιοι υπάλληλοι κατά το έτος που προηγείται της συνταξιοδότησης για τα έτη 2015 – 2020.

Το υπουργείο γνωρίζει από προηγούμενη έρευνα για την περίοδο 2010 – 2015 ότι ο **μέσος μηνιαίος** ενός υπαλλήλου κατά το έτος που προηγείται της συνταξιοδότησης ήταν **1850** με τυπική απόκλιση **150** ευρώ.

Για την εκτίμηση επιλέγεται ένα τυχαίο δείγμα **100** υπαλλήλων κατά το έτος που προηγείται της συνταξιοδότησής τους.

Να βρεθεί **η πιθανότητα** ο μέσος μηνιαίος μισθός των επιλεγμένων υπαλλήλων να είναι μεταξύ **1800** και **1900** ευρώ.



Λύση

Αφού το μέγεθος του δείγματός μας είναι μεγαλύτερο από 30 μπορούμε να εφαρμόσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, οπότε βρίσκουμε:

$$\bar{X} \sim N(1850, \frac{150^2}{100}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - 1850}{150/\sqrt{100}} \sim N(0,1)$$

Η ζητούμενη πιθανότητα υπολογίζεται ως εξής:

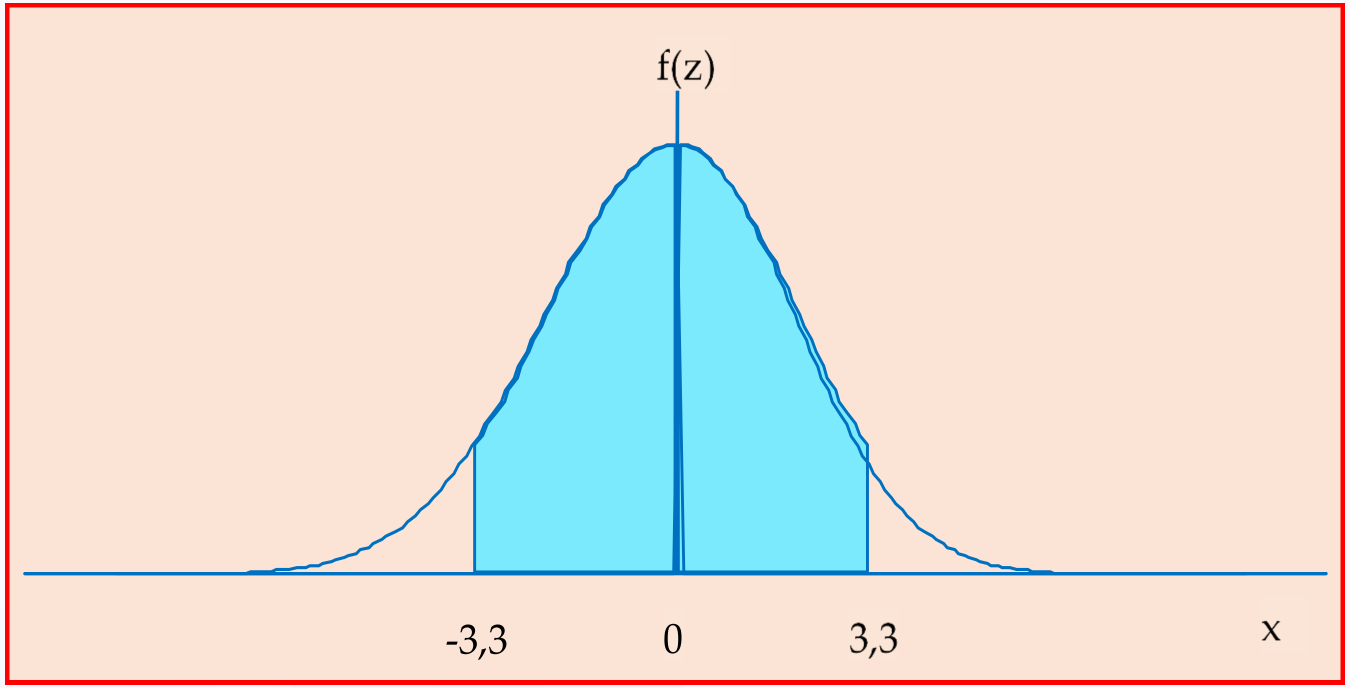
$$P(1800 < \bar{X} < 1900) = P\left(\frac{1800-1850}{150/\sqrt{100}} < Z < \frac{1900-1850}{150/\sqrt{100}}\right) =$$

$$= P(-3,33 < Z < 3,3) = P(Z < 3,33) - P(Z < -3,33) =$$

$$= \Phi(3,33) - (1 - \Phi(3,33)) = 2\Phi(3,33) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0,9995 - 1 = \mathbf{0,999}$$

Λύση



Επομένως ο μέσος μηνιαίος μισθός των υπό εξέταση δημοσίων υπαλλήλων κυμαίνεται μεταξύ **1800 και 1900 ευρώ** με πιθανότητα **99,9%**.

Ερώτηση

Ένα **τυχαίο δείγμα** αποτελείται από τυχαίες μεταβλητές

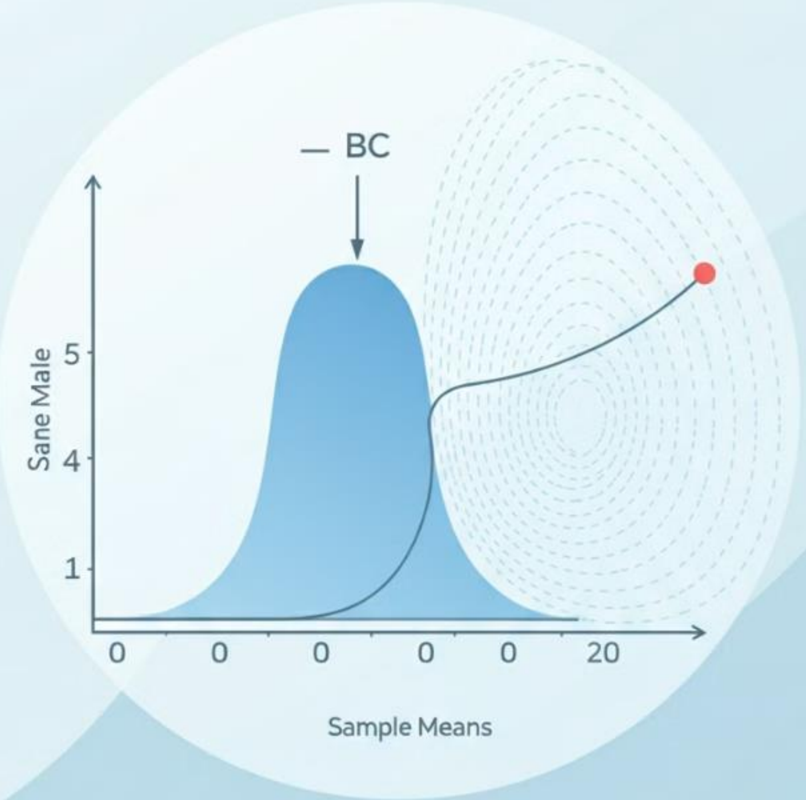
(α) Σωστό

(β) Λάθος

Η σωστή απάντηση είναι η **(α)**

Ορίζουμε ως **τυχαίο δείγμα** από έναν πληθυσμό $\boldsymbol{n}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $\mathbf{X_1, X_2, \ldots, X_n}$ που

ακολουθούν την **ίδια κατανομή** με τον πληθυσμό



Ερώτηση

Το τυπικό σφάλμα ενός εκτιμητή δίνεται από την τετραγωνική ρίζα της εκτίμησης της διακύμανσής του:

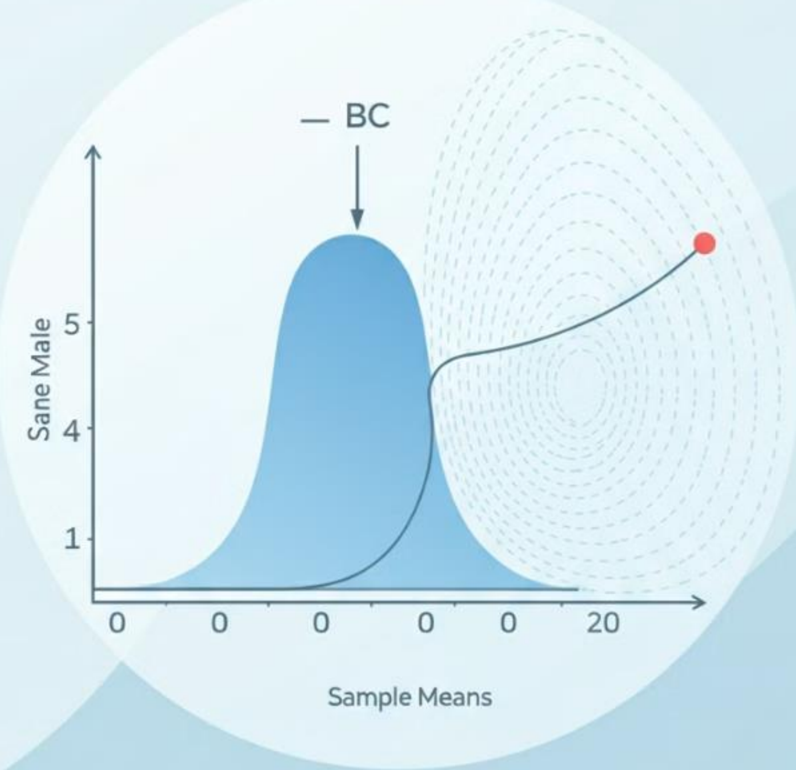
(α) Σωστό

(β) Λάθος

Η σωστή απάντηση είναι η (β)

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Το $\sigma_{\overline{X}}$ καλείται τυπικό σφάλμα του μέσου με σύμβολο SE.



Κατανομή δειγματοληψίας του δειγματικού μέσου όταν η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με **γνωστή** διακύμανση

Προϋποθέσεις

(α) Η **διακύμανση** του πληθυσμού σ^2 είναι **γνωστή**

(β) Η τ. μ. Χ ακολουθεί την **κανονική κατανομή** $(X \sim N(\mu, \sigma^2))$

(γ) Η τ. μ. Χ **δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή**, αλλά **το μέγεθος του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο**

Τότε ισχύουν τα εξής:

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = \mu$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Επιπλέον ισχύει ότι:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \ or \ \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

Κατανομή δειγματοληψίας του δειγματικού μέσου όταν η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με **άγνωστη** διακύμανση

Προϋποθέσεις

(α) Η **διακύμανση** του πληθυσμού σ^2 δεν είναι **γνωστή**

(β) Η τ. μ. Χ **ακολουθεί την κανονική κατανομή**

(γ) Η τ. μ. Χ **δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή** αλλά το μέγεθος του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο

Τότε ισχύουν τα εξής:

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = \mu$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Επιπλέον ισχύει ότι:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Όπου $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ είναι η δειγματική διακύμανση

Κατανομή δειγματοληψίας της διαφοράς **δύο μέσων** από **κανονικούς** πληθυσμούς με **γνωστές διακυμάνσεις** και **ανεξάρτητα δείγματα**

Τότε η κατανομή δειγματοληψίας της διαφοράς των μέσων δύο ανεξάρτητων τυχαίων δειγμάτων ακολουθεί την κανονική κατανομή με **μέση τιμή** $\mu = \mu_X - \mu_Y$ και **διακύμανση** $\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}$:

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}\right)$$

Κατά συνέπεια ισχύει και:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{(\sigma_X^2/n_X) + (\sigma_Y^2/n_Y)}} \sim N(0,1)$$

Τα ανωτέρω ισχύουν και για μη κανονικούς πληθυσμούς όταν τα μεγέθη των δειγμάτων είναι μεγάλα (Κ.Ο.Θ.)

Παράδειγμα

Η βαθμολογία των φοιτητών του τμήματος ΔΕΟ ακολουθεί την **κανονική κατανομή** με μέσο **μ = 6** και τυπική απόκλιση **σ = 2**

Επιλέγουμε ένα **τυχαίο δείγμα** <u>**16**</u> φοιτητών

Να βρεθεί η **πιθανότητα** ο μέσος βαθμός των φοιτητών του δείγματος να βρίσκεται στο διάστημα **5 έως 7**

Λύση

Όταν μια τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή ο **δειγματικός μέσος** ακολουθεί την κατανομή:

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Στην περίπτωσή μας **μ = 6** και **σ = 2** ευρώ. Η ζητούμενη πιθανότητα υπολογίζεται ως εξής:

$$P(5 < \bar{X} < 7) = P\left(\frac{5-6}{2/\sqrt{16}} < Z < \frac{7-6}{2/\sqrt{16}}\right) =$$

$$= P(-2 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -2) =$$

$$= \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = \mathbf{0{,}9544}$$

Διαστήματα εμπιστοσύνης

Η σημασία της εμπιστοσύνης

Όταν εκτιμούμε σημειακά τον μέσο ***μ*** μιας τ.μ. **X**, λαμβάνουμε ένα δείγμα n μετρήσεων $x_1, x_2, \ldots x_n$ και υπολογίζουμε τη μέση τιμή του δείγματος $\bar{X}$.

Όμως ΠΟΣΟ ΑΚΡΙΒΗΣ είναι η εκτίμηση που παίρνουμε για το ***μ***, με τον τρόπο αυτό;

Η σημειακή εκτίμηση εμπεριέχει **σημαντικό βαθμό αβεβαιότητας**, ιδιαίτερα όταν το δείγμα είναι μικρού μεγέθους ή/και η **διακύμανση του εκτιμητή είναι μεγάλη.**

Παράδειγμα

- Μετρώντας το βάρος **200** γυναικών, βρήκαμε **μέση τιμή 65** κιλά. Αν όμως όλες οι συμμετέχουσες προέρχονται από μια συγκεκριμένη πόλη (π.χ. Αθήνα) τότε, πόσο σίγουροι είμαστε ότι αν μετρούσαμε το βάρος ΟΛΩΝ των γυναικών στη χώρα θα βγάζαμε ακριβώς **μέση τιμή 65 κιλά**;

- **Δεν μπορούμε να είμαστε 100% σίγουροι**

Εναλλακτικός τρόπος εκτίμησης

- Αντί να λέμε ***«εκτιμώ ότι το μέσο βάρος των γυναικών της χώρας αυτής είναι 65 κιλά»*** μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα διάστημα, π.χ. από 62 κιλά μέχρι 68 κιλά

(62, 68)

- Και να λέμε πως **«έχουμε μεγάλη εμπιστοσύνη πως το μέσο βάρος των γυναικών της χώρας βρίσκεται μεταξύ 62 και 68 κιλών»**

Εκτίμηση παραμέτρων μέσω Δ.Ε.

- Ας υποθέσουμε ότι επιθυμούμε να εκτιμήσουμε μια **άγνωστη παράμετρο *θ*** από κάποιο πληθυσμό

- Ονομάζουμε **L** και **U** δύο κατάλληλες συναρτήσεις των οποίων οι τιμές ℓ και u ικανοποιούν την σχέση $P(\ell < \theta < u) = 1 - a$

- Το διάστημα (ℓ, u) ονομάζεται **100(1 – *a*)% διάστημα εμπιστοσύνης** της παραμέτρου **θ** σε **επίπεδο εμπιστοσύνης (1 – *a*)**, το οποίο μας δίνει την πιθανότητα το διάστημα **(ℓ,*u*) να περιέχει το *θ***

- Το **(1 – *a*)** ονομάζεται **επίπεδο εμπιστοσύνης**, το ***a*** ονομάζεται **επίπεδο σημαντικότητας** και τα ℓ και u ονομάζονται **κατώτερο** και **ανώτερο όριο εμπιστοσύνης** αντίστοιχα

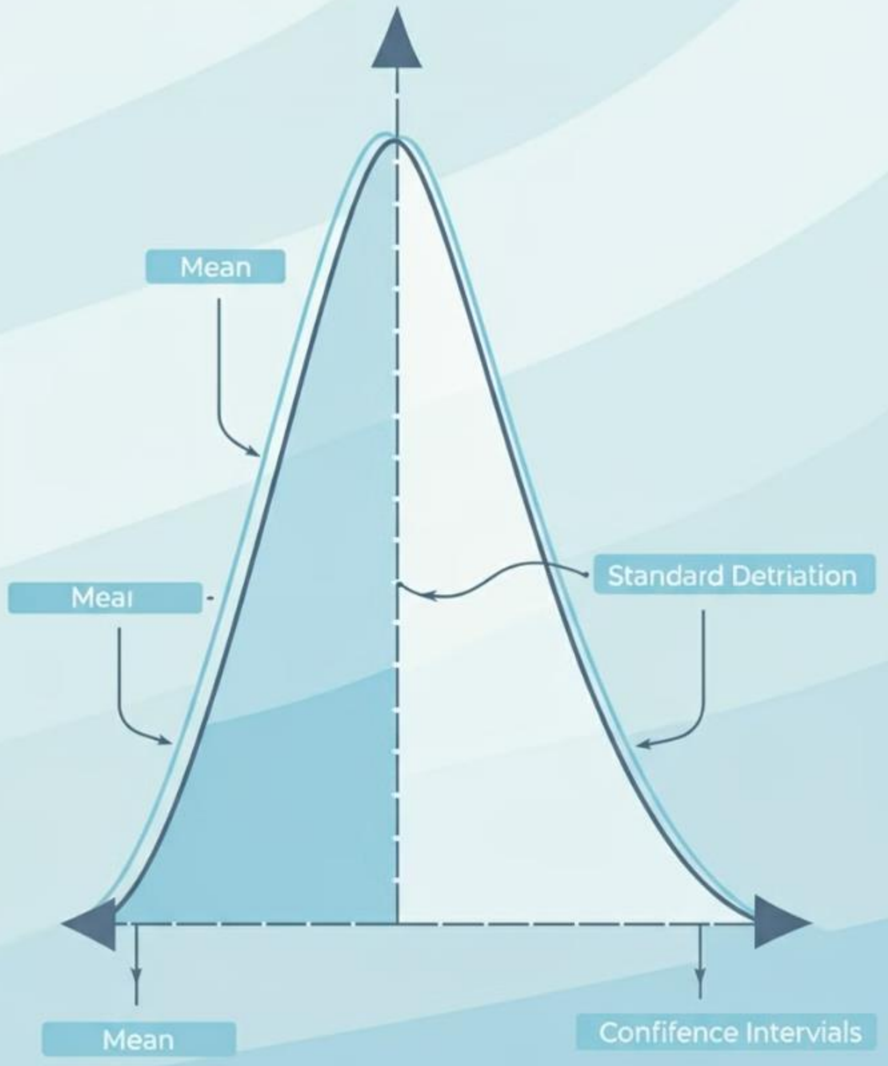
Διαστήματα εμπιστοσύνης: ερμηνεία

Αν π.χ. θέσουμε επίπεδο σημαντικότητας **α = 0,05** τότε το επίπεδο εμπιστοσύνης είναι **0,95** και θα δημιουργήσουμε ένα **95% διάστημα εμπιστοσύνης**, δηλαδή το ***διάστημα αυτό θα περιέχει την παράμετρο που μας ενδιαφέρει με πιθανότητα 95%***.

Εναλλακτική διατύπωση: το 95% των δειγμάτων **περιέχουν την πραγματική τιμή** της παραμέτρου και αυτό **δείχνει τον βαθμό εμπιστοσύνης** που έχουμε ότι ένα συγκεκριμένο Δ.Ε. **περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου.**

Ο γενικός τύπος για όλα τα Δ.Ε. είναι:

Σημ. εκτίμηση ± (θεωρητική τιμή κατανομής)*(τυπ. σφάλμα)



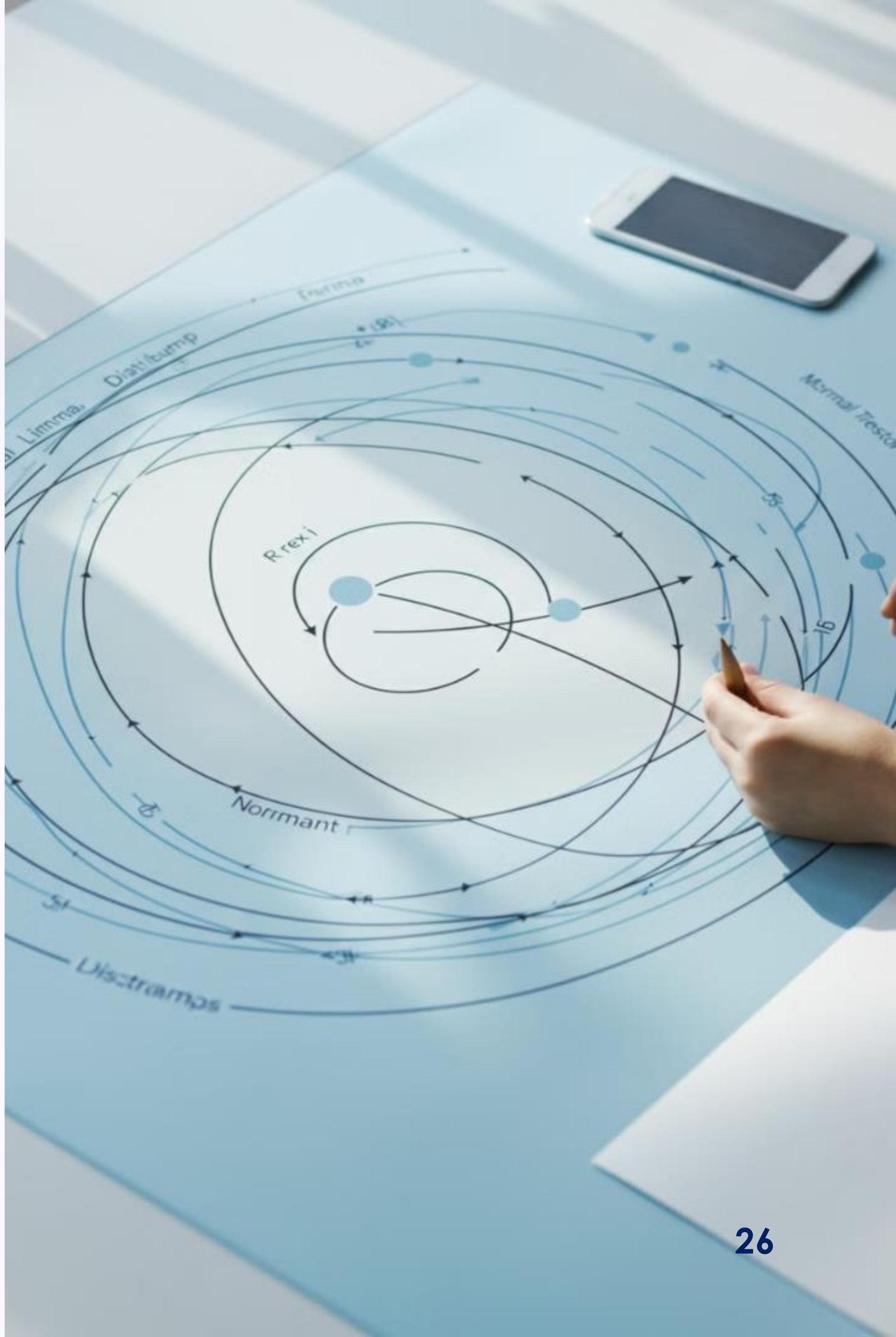
Συχνά χρησιμοποιούμενες θεωρητικές (ή κριτικές) τιμές

Αν η τυπική απόκλιση είναι **γνωστή** τότε χρησιμοποιούμε την **τυποποιημένη κανονική κατανομή**:

99%	2,58
98%	2,32
95%	1,96
90%	1,64

Παράγοντες που επηρεάζουν το μέγεθος του Δ.Ε. για μια παράμετρο

1. **<u>Το μέγεθος δείγματος n</u>**. Όσο πιο μεγάλο είναι το n, τόσο πιο μικρό είναι το Δ.Ε., άρα η εκτίμηση της μέσης τιμής είναι καλύτερη
2. **<u>Η τυπική απόκλιση σ</u>**. Όσο πιο μικρή είναι η τυπική απόκλιση, τόσο πιο μικρό είναι το Δ.Ε., άρα η εκτίμηση της μέσης τιμής είναι καλύτερη
3. **<u>Το επίπεδο σημαντικότητας α.</u>** Όσο πιο μεγάλο είναι το α, τόσο πιο μικρό είναι το Δ.Ε., άρα η εκτίμηση της μέσης τιμής είναι καλύτερη



Διάστημα εμπιστοσύνης για τον μέσο όταν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με γνωστή διακύμανση

Θυμίζουμε ότι: $$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Τότε το διάστημα εμπιστοσύνης για τον μέσο *μ* με βαθμό εμπιστοσύνης 100(1 - α)% είναι το:

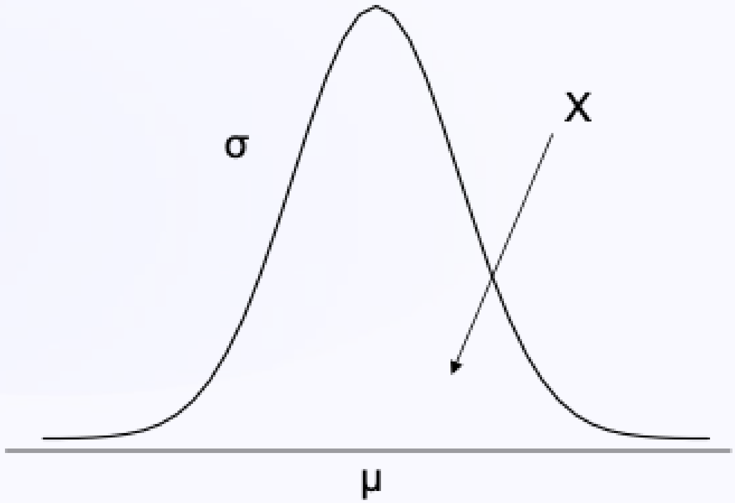
$$\left(\bar{x} - z_{\frac{a}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\frac{a}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Ειδικά αν $(1-\alpha)\% = 95\%$ το Δ.Ε. είναι:

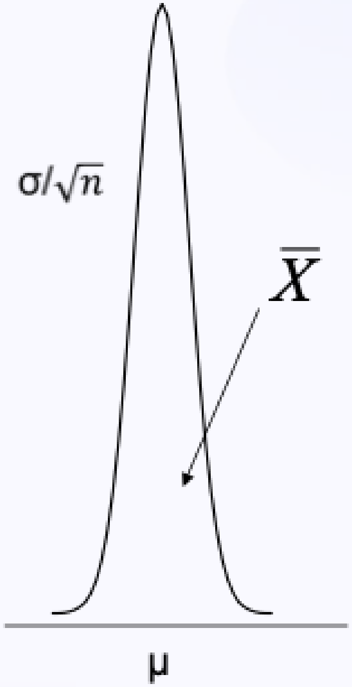
$$\left(\bar{x} - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Τα ανωτέρω ισχύουν και για μη κανονικούς πληθυσμούς όταν τα μεγέθη των δειγμάτων είναι μεγάλα (Κ.Ο.Θ.)

Τυπικό Σφάλμα (SE = standard error)

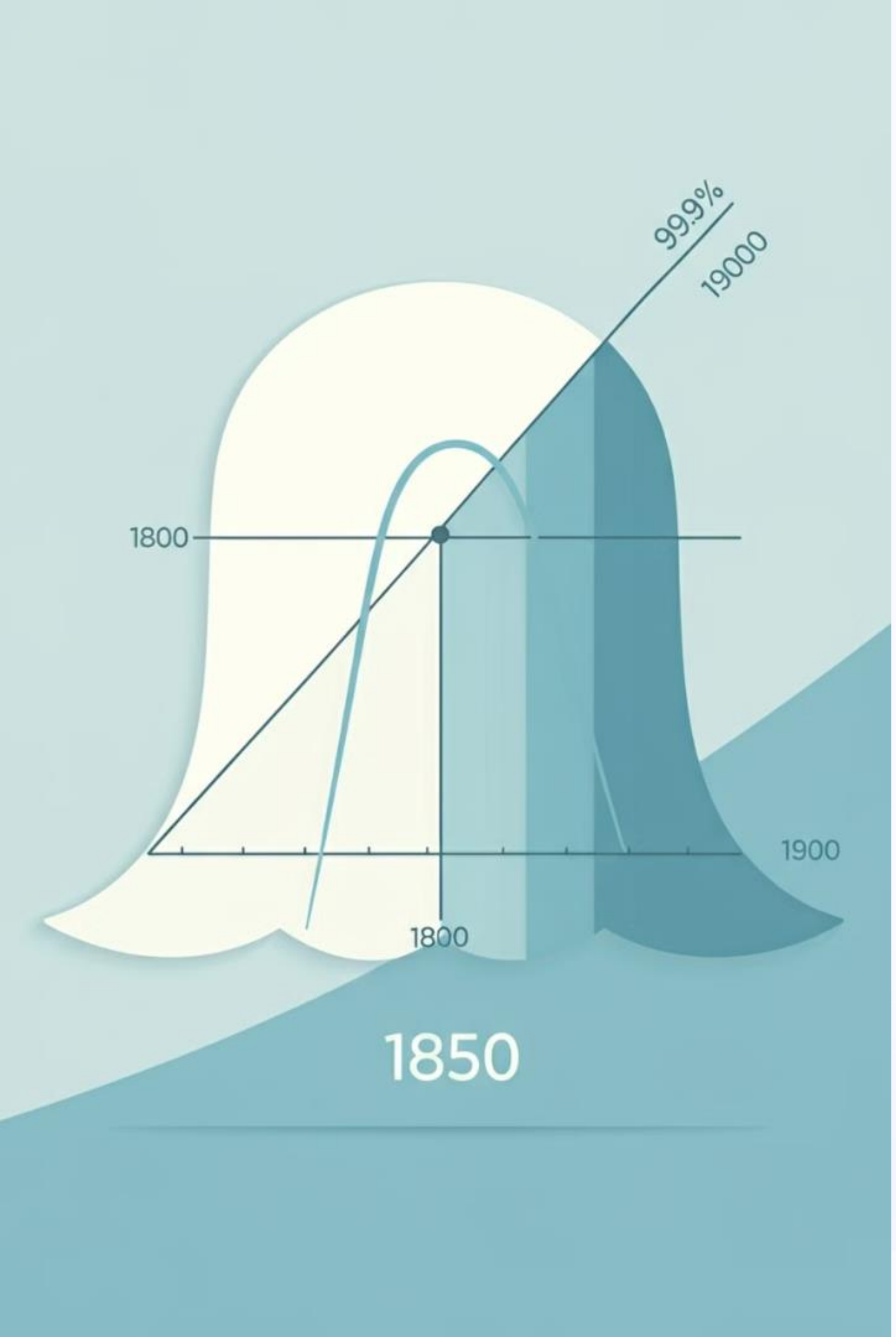


Κατανομή της τ.μ. X



Το τυπικό σφάλμα της τ.μ. X είναι η τυπική απόκλιση του δειγματικού μέσου ($\sigma/\sqrt{n}$)

Κατανομή του δειγματικού μέσου της X, για συγκεκριμένο μέγεθος δείγματος n



Παράδειγμα

Αν ο μέσος ενός δείγματος με 100 παρατηρήσεις βρέθηκε $\bar{x}$ = 9,4 και η τυπική απόκλιση βρέθηκε 2,5, τότε το τυπικό σφάλμα του μέσου είναι:

$$\boxed{SE(\bar{X}) = \frac{2,5}{\sqrt{100}} = \frac{2,5}{10} = 0,25}$$

Οπότε το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο γίνεται:

$$9,4 \pm 1,96 \cdot 0,25 = 9,4 \pm 0,49$$

Δηλ. έχουμε 95% εμπιστοσύνη ότι ο πραγματικός μέσος της τ.μ. Χ στον πληθυσμό είναι μεταξύ:

9,89 και 8,91

Πίνακας θεωρητικών τιμών της κατανομής Student t

Αν η τυπική απόκλιση είναι άγνωστη τότε χρησιμοποιούμε την κατανομή t του Student. Αυτή η τιμή εξαρτάται από το επίπεδο σημαντικότητας **α** και τους βαθμούς ελευθερίας

Βαθμοί ελευθερίας
$\nu = n - 1$

ν	**α = 0,10**	**α = 0,05**	**α = 0,025**	**α = 0,01**	**α = 0,005**
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Διάστημα εμπιστοσύνης για τον μέσο όταν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με άγνωστη διακύμανση

Θυμίζουμε ότι:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Τότε το διάστημα εμπιστοσύνης για τον **μέσο *μ*** με βαθμό εμπιστοσύνης **100(1 - α)%** είναι το:

$$(\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,\frac{a}{2}} < \mu < \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,\frac{a}{2}})$$

Τα ανωτέρω ισχύουν και για μη κανονικούς πληθυσμούς όταν τα μεγέθη των δειγμάτων είναι μεγάλα (Κ.Ο.Θ.)

Παράδειγμα

Αν ο **μέσος** ενός δείγματος με **25 παρατηρήσεις** βρέθηκε $\bar{x}$ **= 50** και η δειγματική τυπική απόκλιση βρέθηκε **s = 8,** τότε το τυπικό σφάλμα του μέσου είναι:

$$\boxed{SE(\bar{X}) = \frac{8}{\sqrt{25}} = \frac{8}{5} = 1,6}$$

Οπότε το 95% **Δ.Ε.** για το μέσο γίνεται:

$$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,\frac{a}{2}} = 50 \pm 1,6 \cdot 2,064 = 50 \pm 3,3$$

δηλ. έχουμε **95% εμπιστοσύνη** ότι ο πραγματικός μέσος της **τ.μ. Χ** στον πληθυσμό είναι μεταξύ:

46,70 και 53,30

ν	α = 0,10	α = 0,05	α = 0,025	α = 0,01	α = 0,005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	**2,064**	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά δύο μέσων από κανονικούς πληθυσμούς με γνωστές διακυμάνσεις και ανεξάρτητα δείγματα

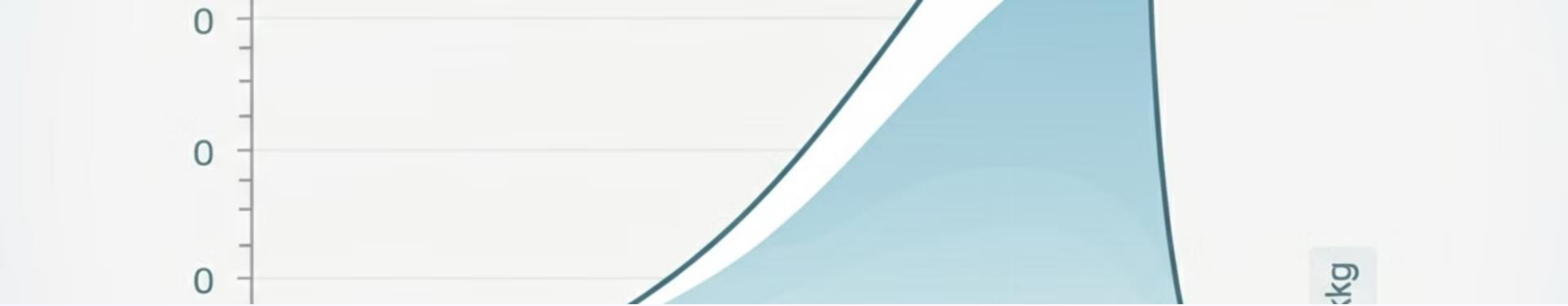
Θυμίζουμε ότι:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{(\sigma_X^2/n_X) + (\sigma_Y^2/n_Y)}} \sim N(0,1)$$

Τότε το διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά $(\mu_X - \mu_Y)$ των δύο μέσων με βαθμό εμπιστοσύνης 100(1 - α)% είναι:

$$(\bar{x} - \bar{y}) - z_{\frac{a}{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_X^2/n_X) + (\sigma_Y^2/n_Y)},\ (\bar{x} - \bar{y}) + z_{\frac{a}{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_X^2/n_X) + (\sigma_Y^2/n_Y)})$$

Τα ανωτέρω ισχύουν και για μη κανονικούς πληθυσμούς όταν τα μεγέθη των δειγμάτων είναι μεγάλα (Κ.Ο.Θ.)



Ερώτηση

Το εύρος ενός διαστήματος εμπιστοσύνης αυξάνεται πάντοτε όσο αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος:

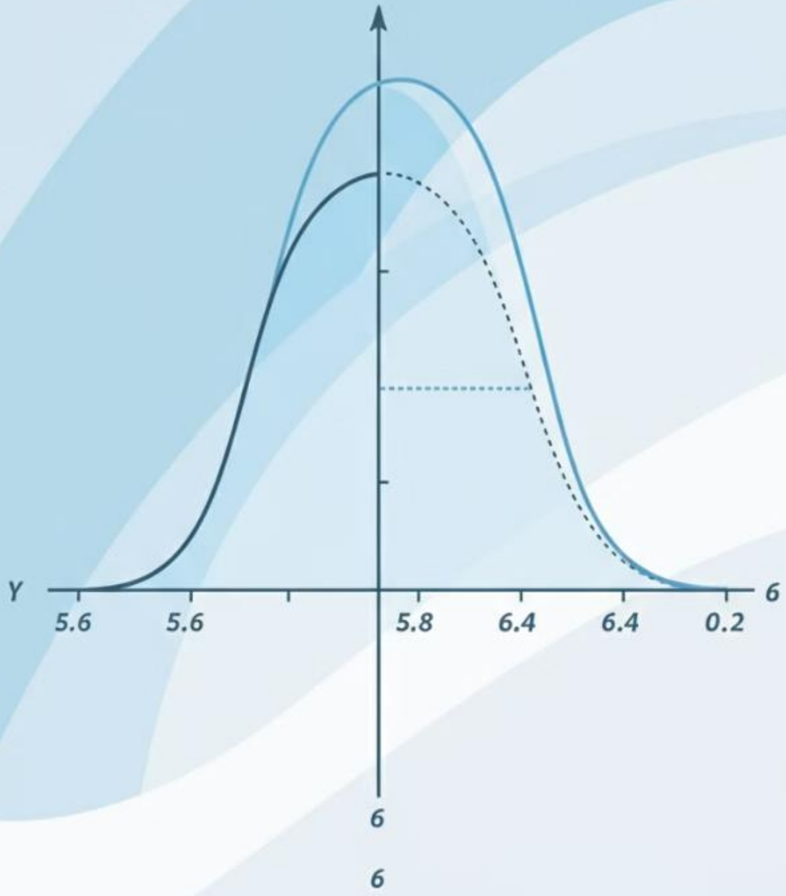
(α) Σωστό

(β) Λάθος

Η σωστή απάντηση είναι η **(β)**

Όσο πιο **μεγάλο** είναι το **n**, τόσο πιο **μικρό** είναι το Δ.Ε. (διότι μειώνεται το SE), άρα η εκτίμηση της **μέσης τιμής είναι καλύτερη**.

$$\hat{\theta} \pm \mathrm{c} \cdot \mathrm{SE}(\hat{\theta})$$



Ερώτηση

Αν θέλουμε να έχουμε **μικρότερη πιθανότητα κάλυψης** σε ένα διάστημα εμπιστοσύνης τότε πρέπει να **μειώσουμε** το επίπεδο σημαντικότητας:

(α) Σωστό

(β) Λάθος

Η σωστή απάντηση είναι η (β)

Η πιθανότητα κάλυψης είναι το επίπεδο εμπιστοσύνης **1 – α**

Έλεγχοι υποθέσεων

❖ Πολύ σημαντικό εργαλείο της επαγωγικής στατιστικής

❖ Πλαίσιο για την **εξαγωγή συμπερασμάτων** σχετικά με τις τιμές των παραμέτρων **ενός πληθυσμού με βάση τις παρατηρήσεις ενός τυχαίου δείγματος**

❖ Χρησιμοποιείται για να προσδιορίσουμε εάν **μια υπόθεση σχετικά με την τιμή μιας παραμέτρου είναι αβάσιμη και πρέπει να απορριφθεί ή είναι βάσιμη και δεν πρέπει να απορριφθεί**

Στατιστικές υποθέσεις

Μια στατιστική υπόθεση είναι ένας **ισχυρισμός** σχετικά με την τιμή μιας παραμέτρου ενός ερευνώμενου πληθυσμού

Οι στατιστικές υποθέσεις διατυπώνονται **πάντα σε ζεύγη**

Η πρώτη από τις δυο υποθέσεις **H_0** ονομάζεται **μηδενική υπόθεση** και η δεύτερη υπόθεση **H_1** ονομάζεται **εναλλακτική υπόθεση**

Μηδενική υπόθεση: Η διαφορά μεταξύ της εκτίμησης μιας παραμέτρου που υπολογίσαμε και μιας υποθετικής τιμής της παραμέτρου του πληθυσμού είναι **στατιστικά ασήμαντη**

Στατιστικές υποθέσεις

Για να ελέγξουμε αν η **H_0** είναι **αληθής ή μη αληθής** εφαρμόζουμε το κατάλληλο στατιστικό κριτήριο με τη βοήθεια του οποίου **είτε θα την απορρίψουμε είτε δεν θα την απορρίψουμε**

Αν ο έλεγχος **υποδεικνύει την απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης** τότε **αποδεχόμαστε** την εναλλακτική υπόθεση **H_1**, ενώ αν γίνει **δεκτή η H_0** τότε η **H_1 απορρίπτεται**

Αν η διαφορά είναι **στατιστικά σημαντική** αυτό σημαίνει ότι η **διαφορά αυτή είναι πραγματική** και δεν **οφείλεται στο στοιχείο της τυχαιότητας της** δειγματοληψίας

Διαδικασία ελέγχου υποθέσεων

Εξειδίκευση των στατιστικών υποθέσεων

Ως μηδενική υπόθεση H_0 θέτουμε την σχέση ανάμεσα στην **τιμή της στατιστικής συνάρτησης** του δείγματος και **μιας υποθετικής τιμής παραμέτρου του πληθυσμού**

Η μηδενική υπόθεση μπορεί να είναι απλή, της μορφής **H_0: $\theta = \theta_0$** (για παράδειγμα: η ελαστικότητα ζήτησης για βιβλία είναι ίση με -1), είτε σύνθετη, της μορφής **H_0: $\theta \leq \theta_0$ ή H_0: $\theta \geq \theta_0$**

Στην συνέχεια ορίζουμε την **εναλλακτική υπόθεση H_1** η οποία είναι **πάντοτε η αντίθετη της μηδενικής** υπόθεσης (για παράδειγμα: η ελαστικότητα ζήτησης για βιβλία είναι διαφορετική του -1)

Εξειδίκευση των στατιστικών υποθέσεων (συν.)

Οι πιθανές εναλλακτικές διατυπώσεις της **μηδενικής** και της **εναλλακτικής υπόθεσης** ενός στατιστικού ελέγχου είναι οι εξής:

Μονόπλευρος (αριστερόπλευρος) έλεγχος	Μονόπλευρος (δεξιόπλευρος) έλεγχος	Δίπλευρος (αμφίπλευρος) έλεγχος
$H_0: \theta \geq \theta_0$ $H_1: \theta < \theta_0$	$H_0: \theta \leq \theta_0$ $H_1: \theta > \theta_0$	$H_0: \theta = \theta_0$ $H_1: \theta \neq \theta_0$

Καθορισμός του επιπέδου σημαντικότητας

Το επιλεγόμενο **επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας** είναι μια **μικρή πιθανότητα** που συμβολίζεται με ***α*** και εκφράζει την **μέγιστη αποδεκτή πιθανότητα** να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση παρόλο που αυτή είναι αληθής

Τα συνηθέστερα χρησιμοποιούμενα επίπεδα στατιστικής σημαντικότητας είναι **0,01 (1%)**, **0,05 (5%)**, **ή 0,10 (10%).**

Εξειδίκευση της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου

Είναι μία κατάλληλη συνάρτηση, οι τιμές της οποίας προκύπτουν από τα δεδομένα του δείγματός μας για το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας ***α*** και χρησιμοποιούνται για την **απόρριψη ή την μη απόρριψη της H_0.**

Οι τιμές της συνάρτησης αυτής στο επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας ***α*** προσδιορίζουν την **περιοχή απόρριψης** της **μηδενικής υπόθεσης H_0.**

Η στατιστική συνάρτηση ελέγχου έχει την εξής μορφή:

$$\boxed{\text{Συνάρτηση Ελέγχου} = \frac{\text{δειγματική εκτίμηση της παραμέτρου} - \text{υποθετική τιμή}}{\text{τυπικό σφάλμα της εκτίμησης}}}$$

Εξαγωγή συμπεράσματος

- Εάν η τιμή της συνάρτησης ελέγχου βρίσκεται **εντός της περιοχής απόρριψης**, **απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση H_0** **και** **αποδεχόμαστε την εναλλακτική υπόθεση H_1.**

- Εάν η τιμή της συνάρτησης ελέγχου βρίσκεται **εκτός της περιοχής απόρριψης**, **δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση H_0.**

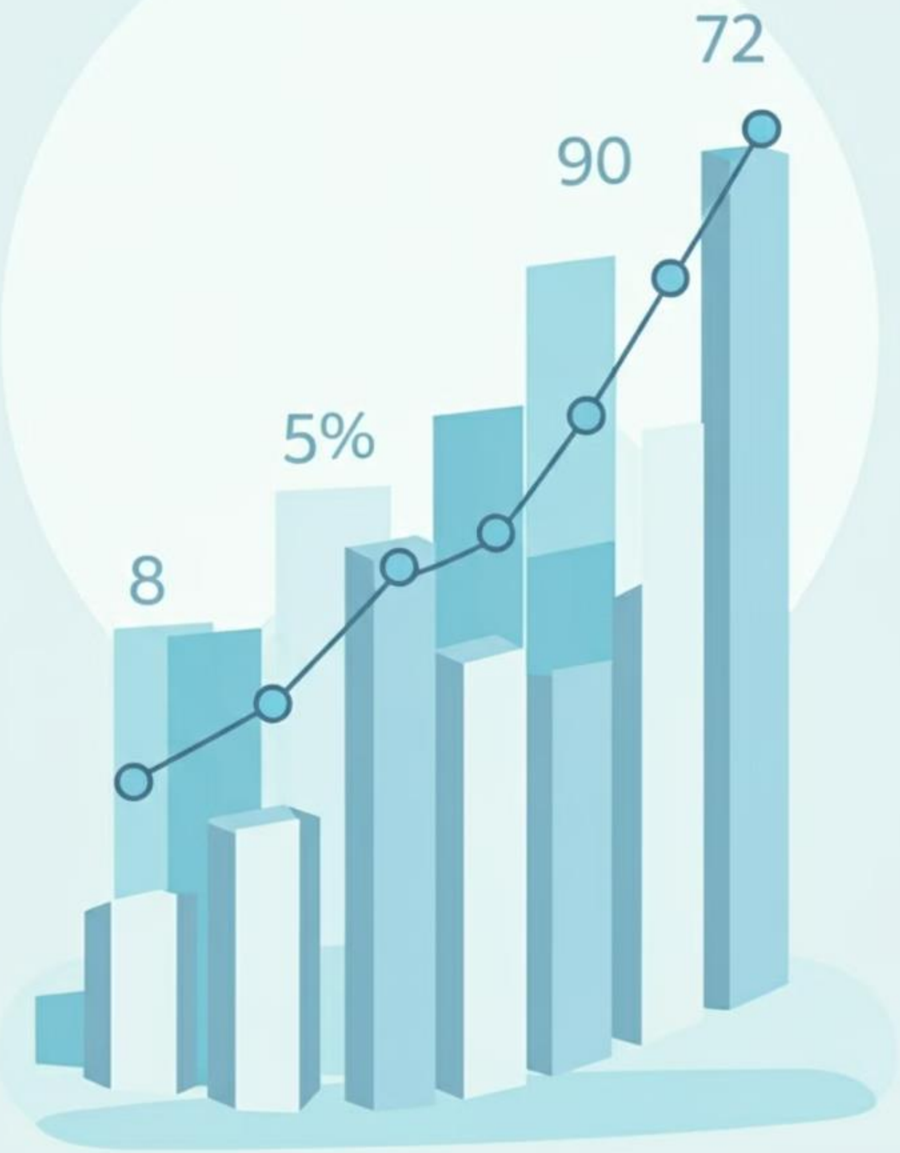
Πραγματικό επίπεδο σημαντικότητας

Ένα άλλο σημαντικό μέγεθος κατά την διενέργεια ελέγχων στατιστικών υποθέσεων ονομάζεται **πραγματικό επίπεδο σημαντικότητας**

Ορίζεται ως **η πιθανότητα η στατιστική συνάρτηση ελέγχου** να λάβει, υπό την μηδενική υπόθεση $\mathbf{H_0}$, μια τιμή **τόσο ή περισσότερο ακραία** από αυτή που είχε για το συγκεκριμένο δείγμα.

Το πραγματικό επίπεδο σημαντικότητας συμβολίζεται ως ***p-value***.

Με βάση το ***p-value* απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση $\mathbf{H_0}$** αν **το *p-value* είναι μικρότερο από το επίπεδο σημαντικότητας α** που έχουμε θέσει.



Ερώτηση

Στους ελέγχους υποθέσεων πότε μία μηδενική υπόθεση είναι αληθής;
(α) Πάντα
(β) Ποτέ
(γ) Ορισμένες φορές
(δ) εξαρτάται από την κατανομή του πληθυσμού

Η σωστή απάντηση είναι η **(β)**

Ο όρος *«αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση H_0»* δεν είναι δόκιμος και αποφεύγεται στην Στατιστική. Χρησιμοποιούμε τους όρους **«απορρίπτουμε»** και **«δεν απορρίπτουμε»**

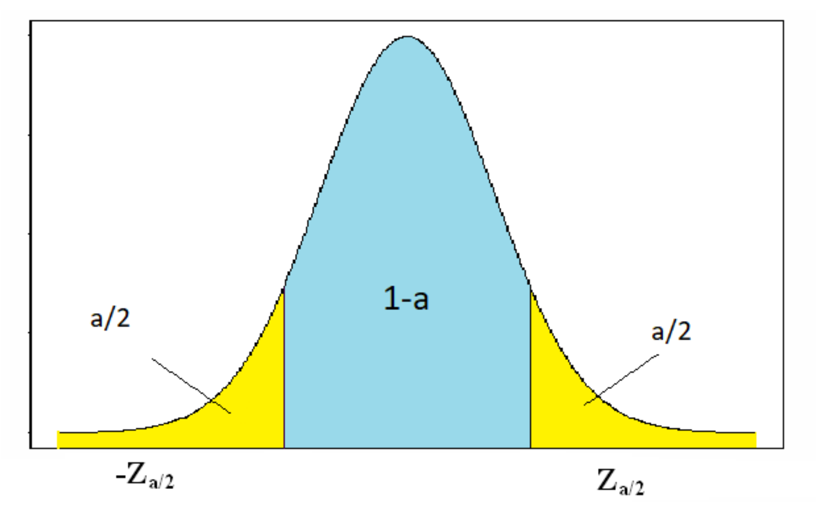
Ερώτηση

Η περιοχή **απόρριψης** μιας μηδενικής υπόθεσης, σε σχέση με **μία αμφίπλευρη εναλλακτική υπόθεση**, είναι **ταυτόσημη** με όλες τις τιμές που βρίσκονται **εντός του αντίστοιχου διαστήματος εμπιστοσύνης** που μπορούμε να υπολογίσουμε για την παράμετρο που εξετάζουμε:

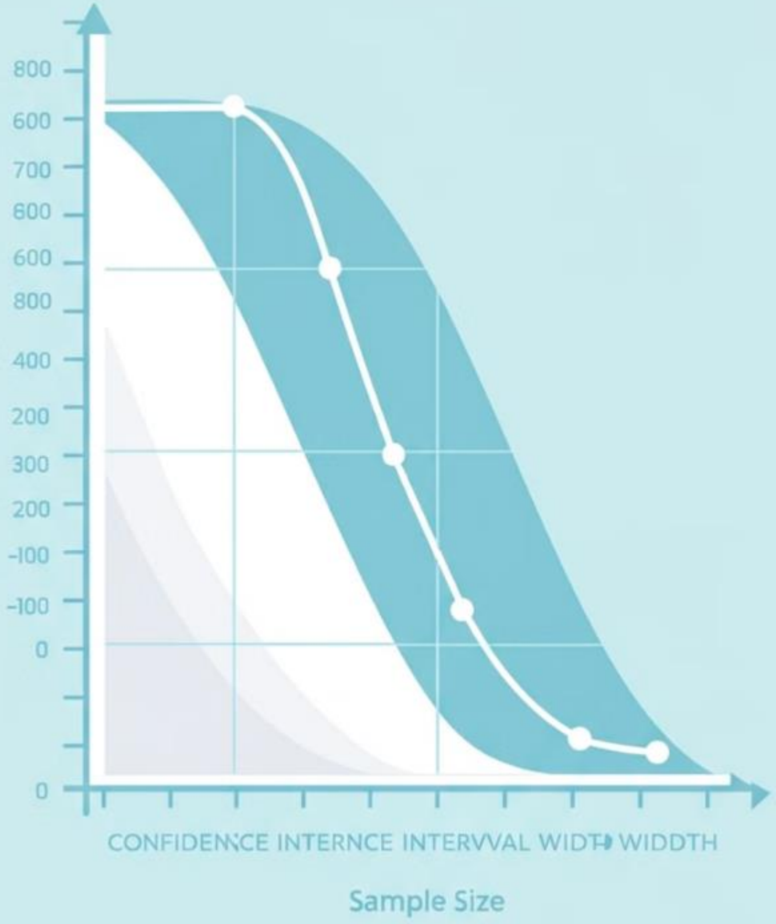
(α) Σωστό

(β) Λάθος

Η σωστή απάντηση είναι η (β)



Με κίτρινο χρώμα η περιοχή απόρριψης, με μπλε χρώμα το Δ.Ε.



Ερώτηση

Για να κάνουμε ελέγχους υποθέσεων δεν χρειαζόμαστε την κριτική τιμή του ελέγχου αν έχουμε στην διάθεσή μας το αντίστοιχο **p-value**:

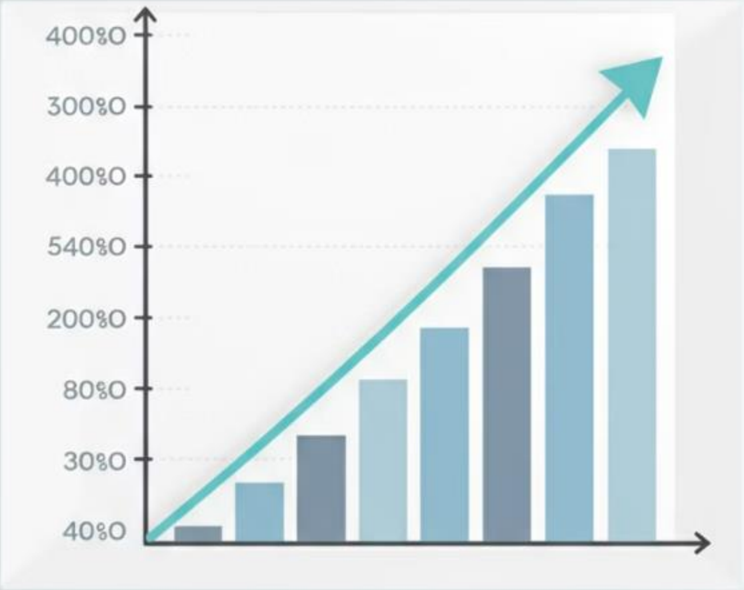
(α) Λάθος, πάντα χρειαζόμαστε την κριτική τιμή του ελέγχου
(β) Σωστό, καθώς η απόρριψη ή η αποδοχή μιας μηδενικής υπόθεσης σε έναν έλεγχο υποθέσεων μπορεί να γίνει είτε με την κριτική τιμή είτε με το αντίστοιχο p-value καθώς μας δίνουν ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα
(γ) Σωστό, υπό την προϋπόθεση ότι ο πληθυσμός ακολουθεί κανονική κατανομή
(δ) τίποτε από τα παραπάνω

Η σωστή απάντηση είναι η (β)

Με βάση το *p-value* απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση $\mathbf{H_0}$ αν το ***p-value*** είναι **μικρότερο** από το **επίπεδο**

σημαντικότητας α που έχουμε θέσει

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού με άγνωστη διακύμανση



Θέλουμε να ελέγξουμε αν ο μέσος του πληθυσμού είναι ίσος με μία συγκεκριμένη τιμή της κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης του δείγματος σε επίπεδο σημαντικότητας α, θέλουμε δηλαδή να ελέγξουμε την εξής υπόθεση:

$$\boxed{\begin{aligned} &H_0: \mu = \mu_0 \\ &H_1: \mu \neq \mu_0 \end{aligned}}$$

Χρησιμοποιούμε τη στατιστική συνάρτηση ελέγχου:

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}$$

που ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή N(0,1).

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού με γνωστή διακύμανση (συν.)

Από τα δεδομένα του δείγματος <u>υπολογίζουμε την τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου:</u>

$$\boxed{Z^* = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}$$

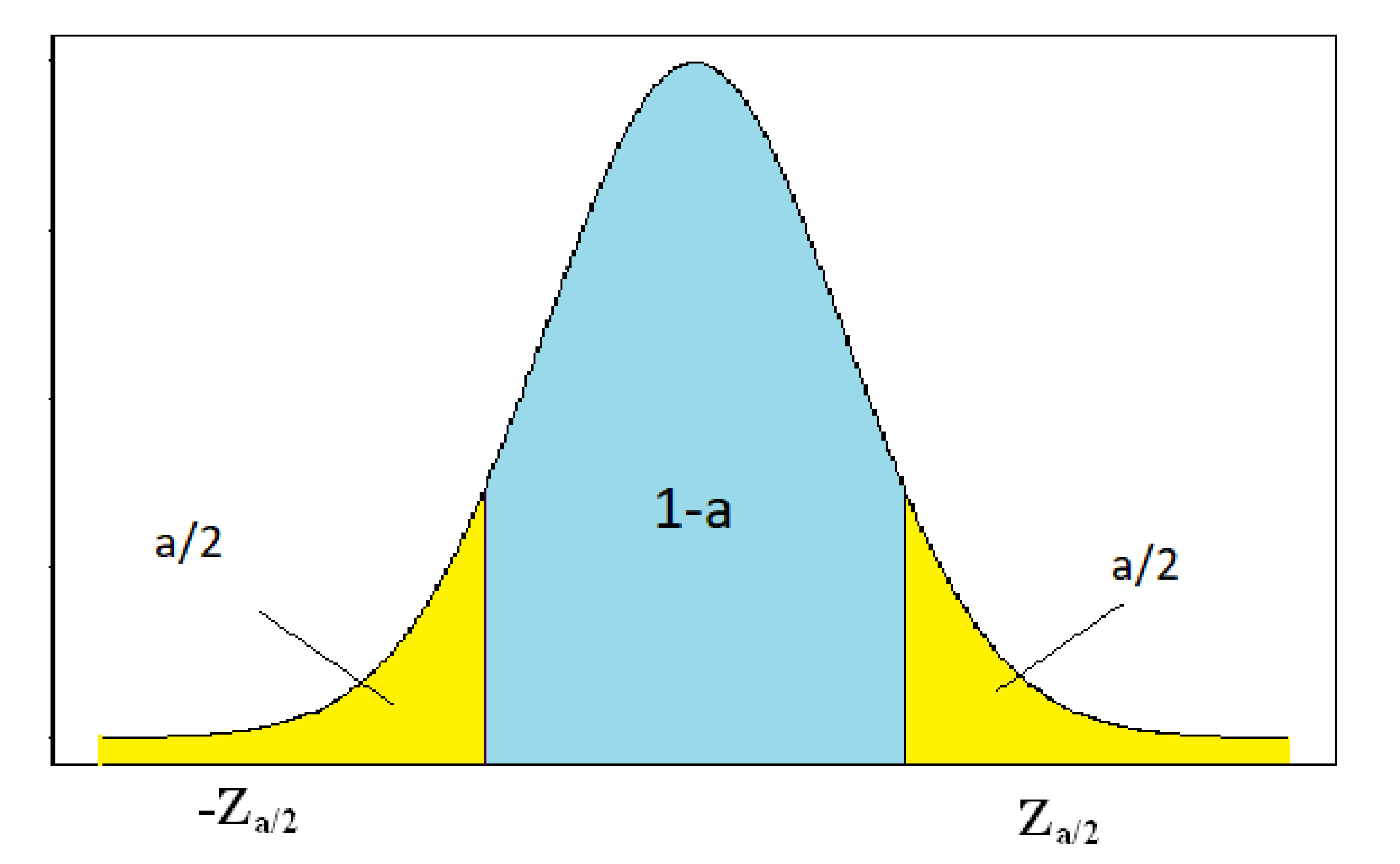
Μετά εφαρμόζουμε το **κριτήριο απόρριψης** ή **μη απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης**, δηλαδή συγκρίνουμε την ανωτέρω τιμή της συνάρτησης ελέγχου με την θεωρητική τιμή της Ζ σε επίπεδο σημαντικότητας α. Αν:

$$Z^* > Z_{a/2} \text{ ή } Z^* < -Z_{a/2} \text{ ή, ισοδύναμα, } |Z^*| > Z_{a/2}$$

τότε **απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α ή 100α%.**

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού (γνωστή σ^2)

Αμφίπλευρος Έλεγχος

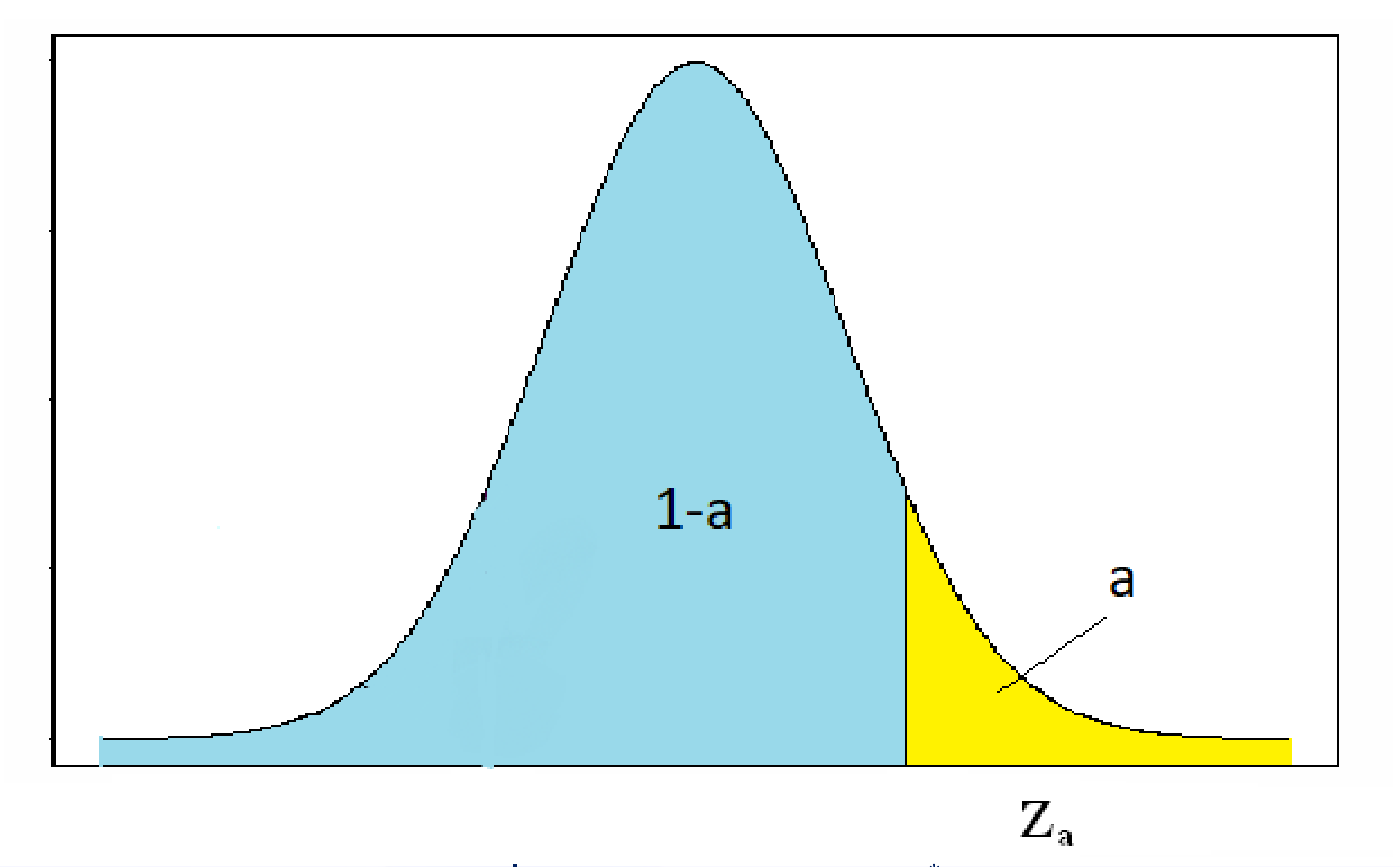


Με κίτρινο χρώμα η περιοχή απόρριψης

Απορρίπτουμε την H_0 αν $Z^{*}>Z_{\alpha/2}$ ή αν $Z^{*}<-Z_{\alpha/2}$

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού (γνωστή σ^2)

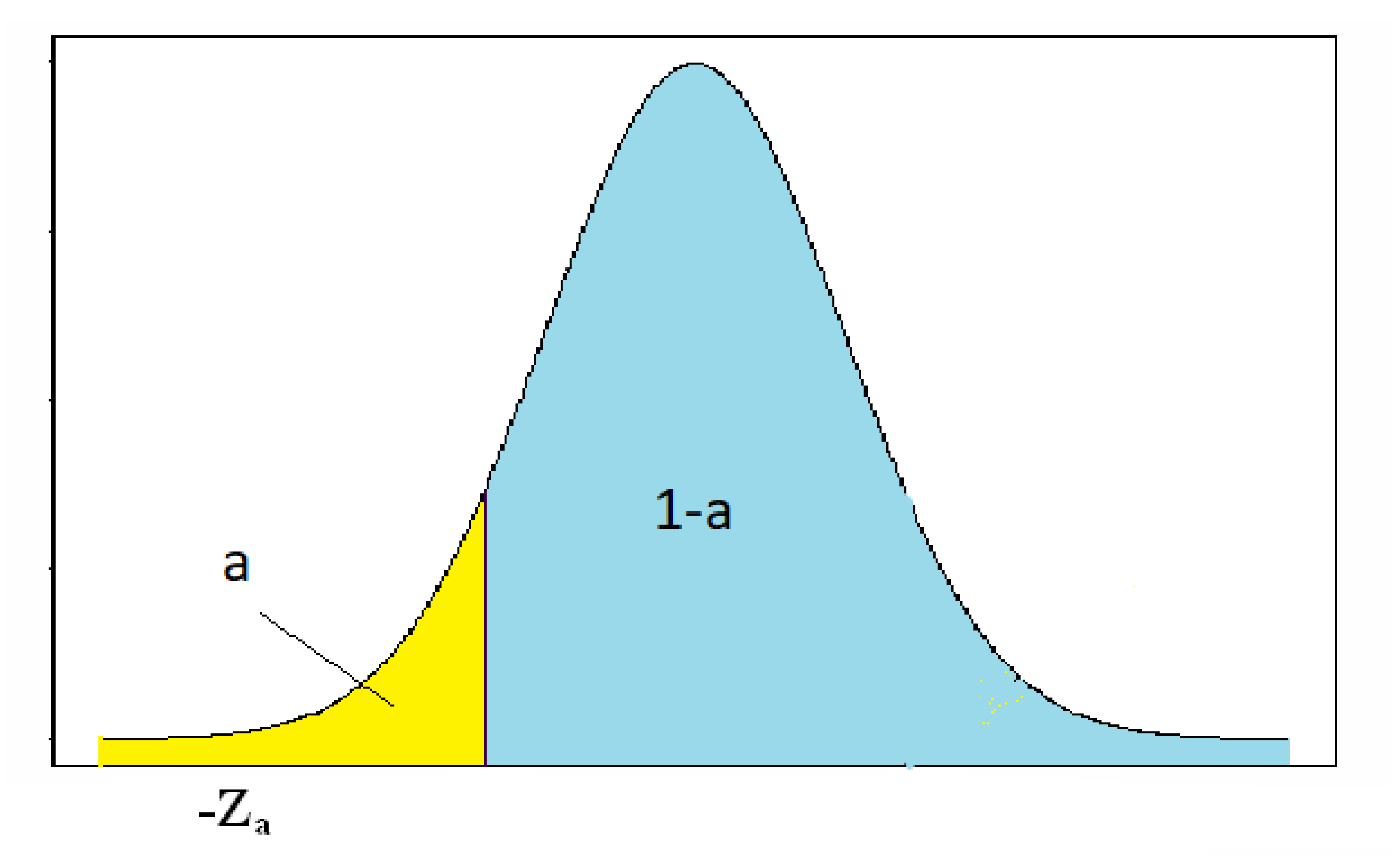
Δεξιόπλευρος Έλεγχος



Απορρίπτουμε την H_0 αν $Z^*>Z_\alpha$

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού (γνωστή σ^2)

Αριστερόπλευρος Έλεγχος



Απορρίπτουμε την H_0 αν $Z^* < -Z_a$

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού με άγνωστη διακύμανση

Θέλουμε να ελέγξουμε αν **ο μέσος του πληθυσμού είναι ίσος με μία συγκεκριμένη τιμή της κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης** του δείγματος **σε επίπεδο σημαντικότητας *α***, θέλουμε δηλαδή να ελέγξουμε την εξής υπόθεση:

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{array}}$$

Χρησιμοποιούμε τη στατιστική συνάρτηση ελέγχου:

$$\boxed{t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}}$$

που ακολουθεί την κατανομή ***t* με *n* - *1* βαθμούς ελευθερίας** (όπου *S* είναι η δειγματική τυπική απόκλιση, την οποία υπολογίζουμε από την δειγματική διακύμανση)

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού με άγνωστη διακύμανση (συν.)

Από τα δεδομένα του δείγματος υπολογίζουμε την τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου:

$$\boxed{t^{*}_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}}$$

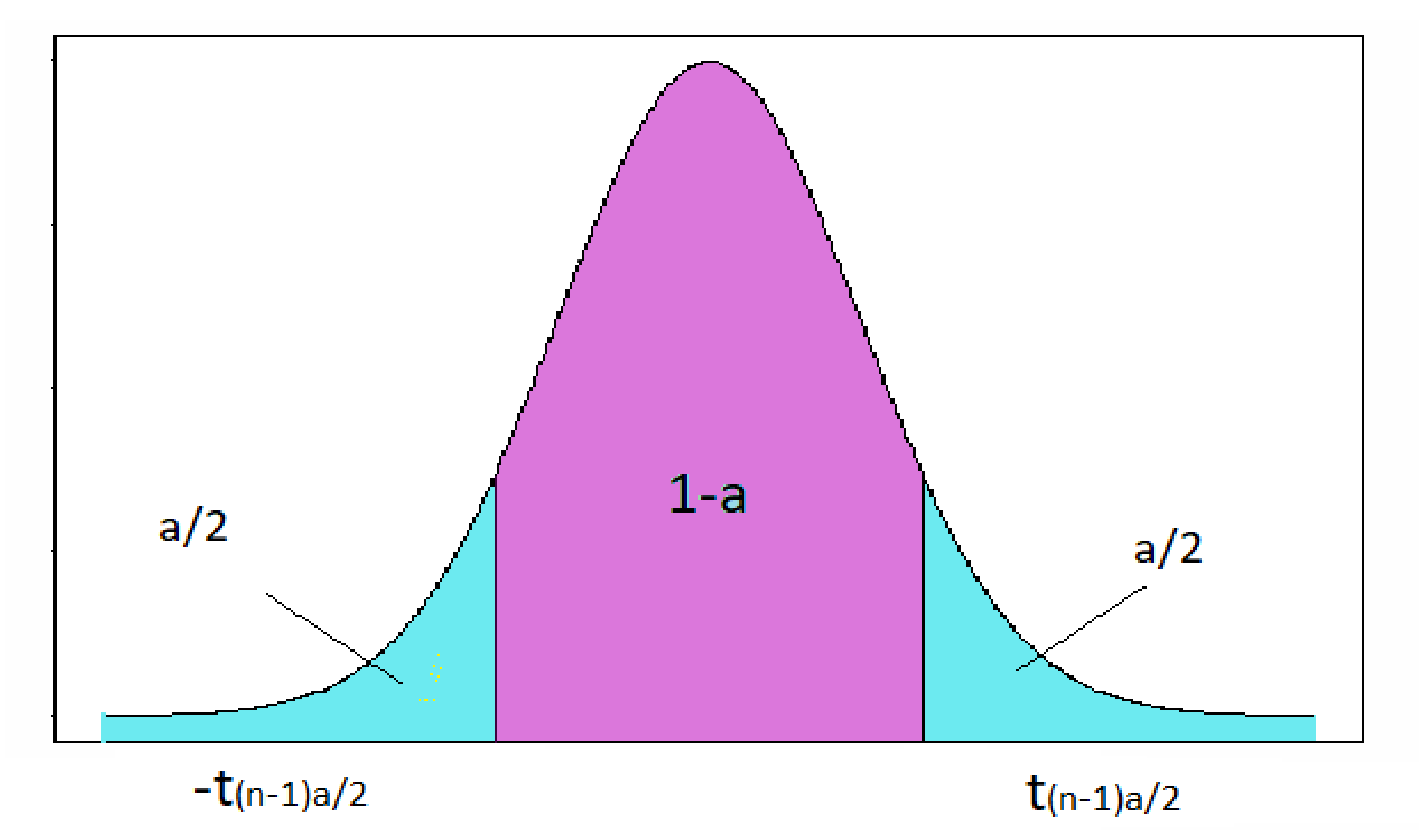
Μετά εφαρμόζουμε το **κριτήριο απόρριψης ή μη απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης**, δηλαδή συγκρίνουμε την **ανωτέρω τιμή της συνάρτησης ελέγχου με την θεωρητική τιμή της *t* σε επίπεδο σημαντικότητας *α***. Αν:

$$t^{*} > t_{(n-1),\, a/2} \text{ ή } t^{*} < -t_{(n-1),\, a/2} \text{ ή, ισοδύναμα, } \quad |t^{*}| > t_{(n-1),a/2}$$

τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α ή 100α%.

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού (άγνωστη $σ^2$)

Αμφίπλευρος Έλεγχος

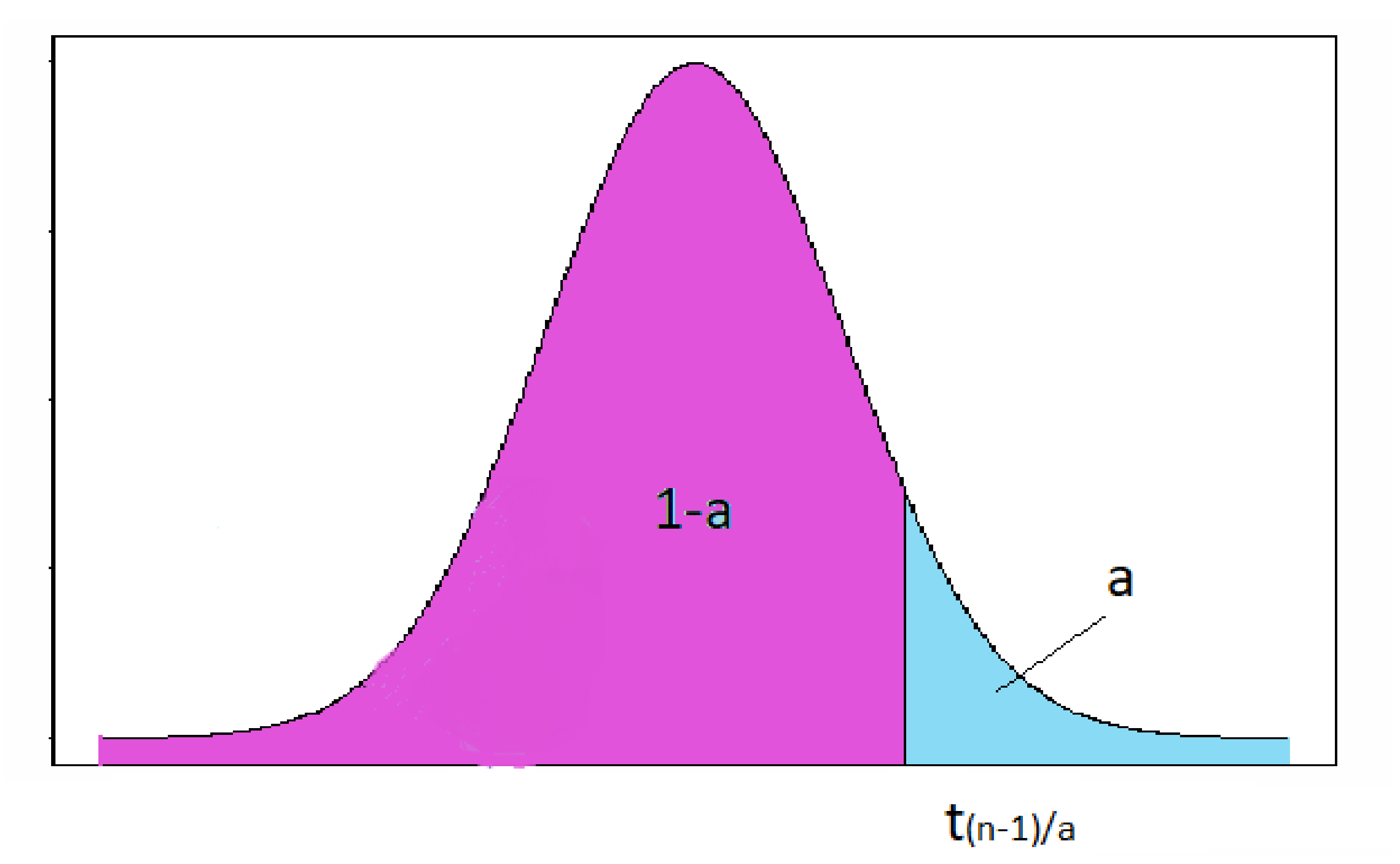


Απορρίπτουμε την H_0 αν:

$t^*_{n-1} > t_{(n-1)(a/2)}$ ή αν $t^*_{n-1} < -\, t_{(n-1)(a/2)}$

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού (άγνωστη σ^2)

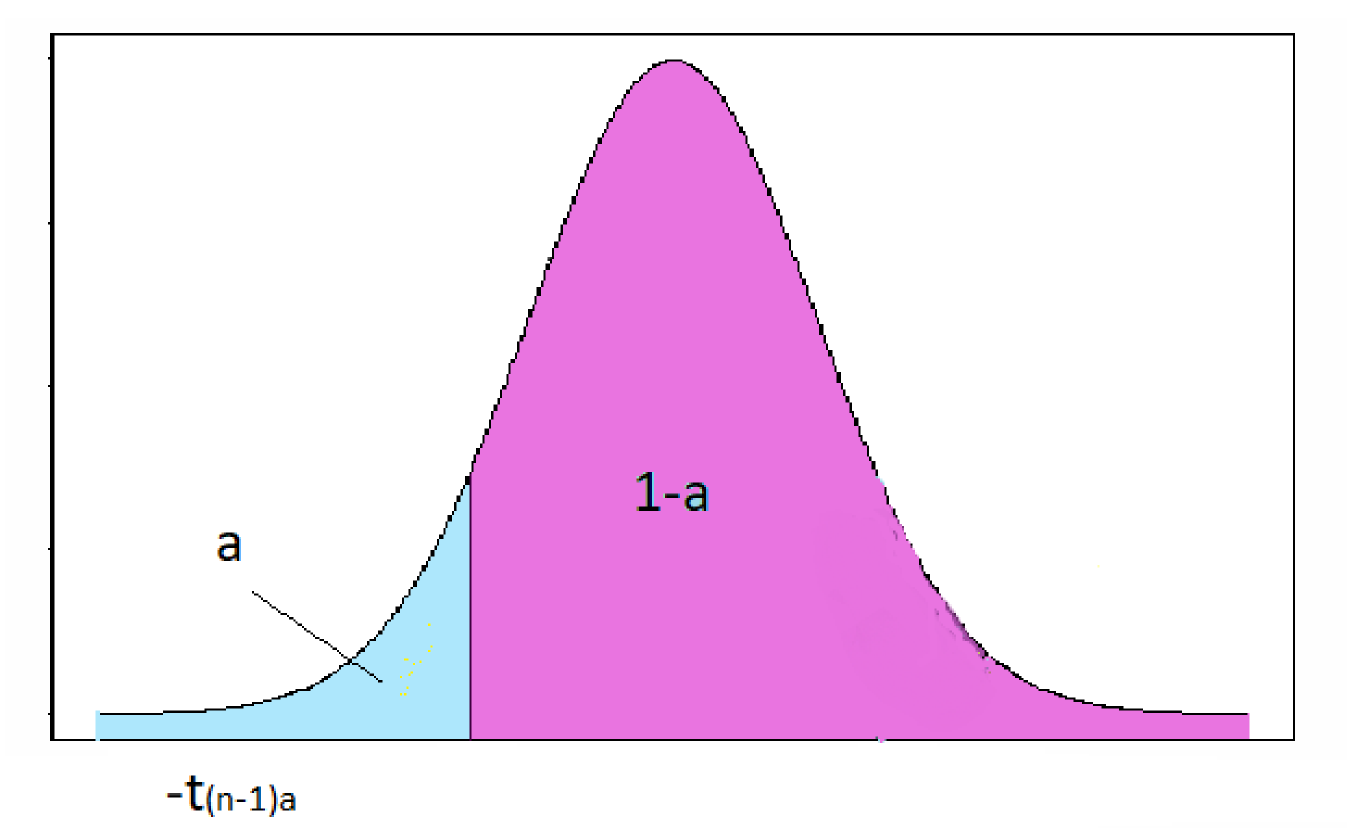
Δεξιόπλευρος Έλεγχος



Απορρίπτουμε την H_0 αν $t^*_{n-1} > t_{(n-1)a}$

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού (άγνωστη σ^2)

Αριστερόπλευρος Έλεγχος



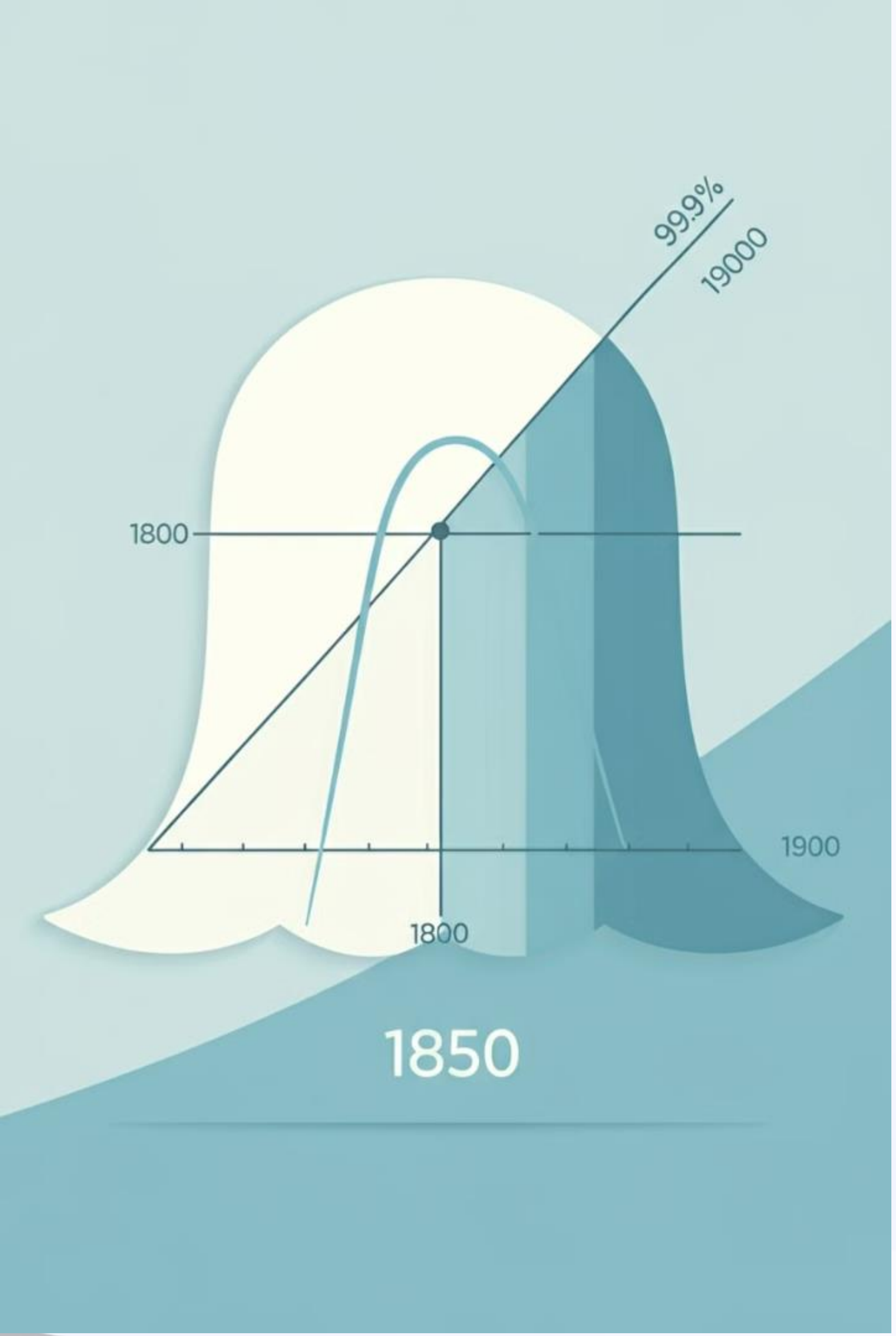
Απορρίπτουμε την H_0 αν $t^*_{n-1} < -t_{(n-1)a}$

Παράδειγμα

Ένα εργοστάσιο παρασκευής παγωτών παράγει τυποποιημένα παγωτά των οποίων το καθαρό βάρος ακολουθεί κανονική κατανομή με **μέσο μ = 500** γραμμάρια και **τυπική απόκλιση σ = 8** γραμμάρια.

Για την διασφάλιση των προδιαγραφών βάρους του προϊόντος αυτού πραγματοποιούνται συχνοί δειγματοληπτικοί έλεγχοι.

Από ένα **τυχαίο δείγμα 16** παρατηρήσεων βρέθηκε ότι $\bar{X} = 495$ γραμμάρια. Με βάση την πληροφορία αυτή να ελεγχθεί σε επίπεδο εμπιστοσύνης **95%** αν ικανοποιούνται οι προδιαγραφές βάρους του προϊόντος.



Λύση

Ως **H_0** θέτουμε την σχέση ανάμεσα στην τιμή της στατιστικής συνάρτησης του δείγματος και της προδιαγραφής $\mu_0 = 500$:

$$H_0: \mu = 500$$
$$H_1: \mu \neq 500$$

Από τα δεδομένα του δείγματος υπολογίζουμε την τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου:

$$Z^* = \frac{495 - 500}{8/\sqrt{16}} = -2{,}5$$

Στη συνέχεια συγκρίνουμε την τιμή της συνάρτησης ελέγχου με την θεωρητική τιμή της τυποποιημένης κανονικής κατανομής σε επίπεδο σημαντικότητας 0,5 και βρίσκουμε ότι:

$$Z^* = -2{,}5 < -Z_{\alpha/2} = -1{,}96$$

Επομένως η H_0 απορρίπτεται, δηλαδή σε α = 0,05 προκύπτουν ενδείξεις ότι δεν ικανοποιούνται οι προδιαγραφές.

Παράδειγμα

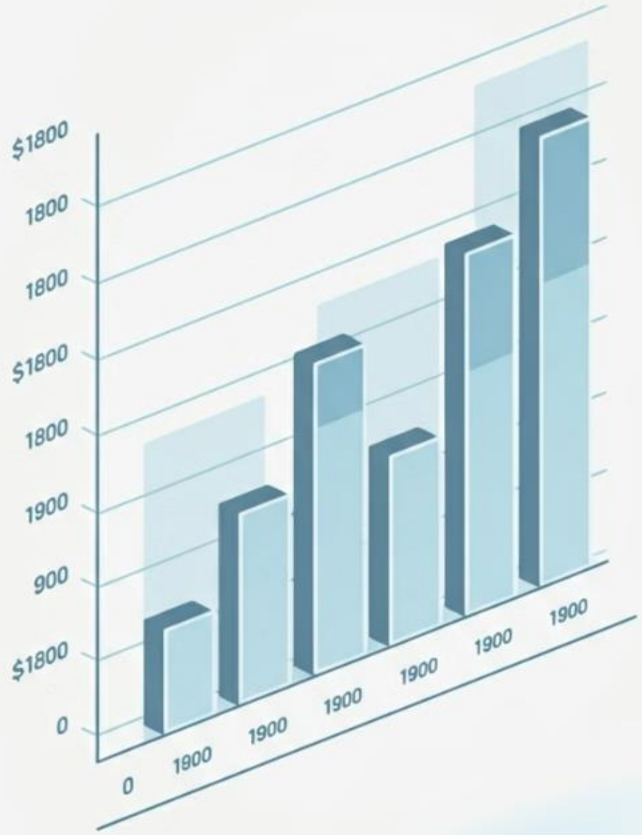
Μία εταιρεία υποστηρίζει ότι οι υπάλληλοί της εργάζονται, **κατά μέσο όρο, 42 ώρες** την εβδομάδα. Για να εξετάσουμε **<u>αν αυτός ο ισχυρισμός είναι αληθής</u>**, παίρνουμε ένα **δείγμα 30** υπαλλήλων, και βρίσκουμε ότι το δείγμα έχει **μέσο όρο 43 ώρες** και **τυπική απόκλιση 4 ώρες**. Ελέγξτε τον ισχυρισμό της εταιρείας στο επίπεδο σημαντικότητας **α=0.05**

Λύση:
Διατύπωση των Υποθέσεων:
Μηδενική Υπόθεση Η0: μ=42, (ο μέσος όρος είναι 42 ώρες)

Εναλλακτική Υπόθεση Η1: μ≠42 (ο μέσος όρος δεν είναι 42 ώρες)

Θα χρησιμοποιήσουμε τον **έλεγχο t** για τον **μέσο όρο** δεδομένου ότι έχουμε γνωστά το μέσο και την τυπική απόκλιση του δείγματος, αλλά η διασπορά του πληθυσμού είναι άγνωστη

- $t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$
- Υπολογισμός: $t = \frac{43-42}{4/\sqrt{30}} = \frac{1}{0.7303} \approx 1.37$



Για επίπεδο σημαντικότητας **0.05** και **29 βαθμούς** ελευθερίας, η κρίσιμη τιμή για δύο άκρα είναι **$t_{\alpha}/2 \approx 2.045$.**

Επειδή το t-στατιστικό (1.37) είναι μικρότερο από την κρίσιμη τιμή (2.045), **δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση**

Συμπέρασμα: Τα δεδομένα **δεν παρέχουν αρκετές ενδείξεις** για **να απορρίψουμε** τον ισχυρισμό της εταιρείας ότι ο μέσος όρος είναι **42 ώρες**

Παράδειγμα

Ένας ερευνητής υποστηρίζει ότι **τουλάχιστον το 60%** του πληθυσμού προτιμάει ένα συγκεκριμένο προϊόν έναντι άλλων. Σε **δείγμα 100 ατόμων**, το **54%** απάντησε ότι προτιμάει αυτό το προϊόν. Ελέγξτε τον ισχυρισμό του ερευνητή στο επίπεδο σημαντικότητας **0.01**

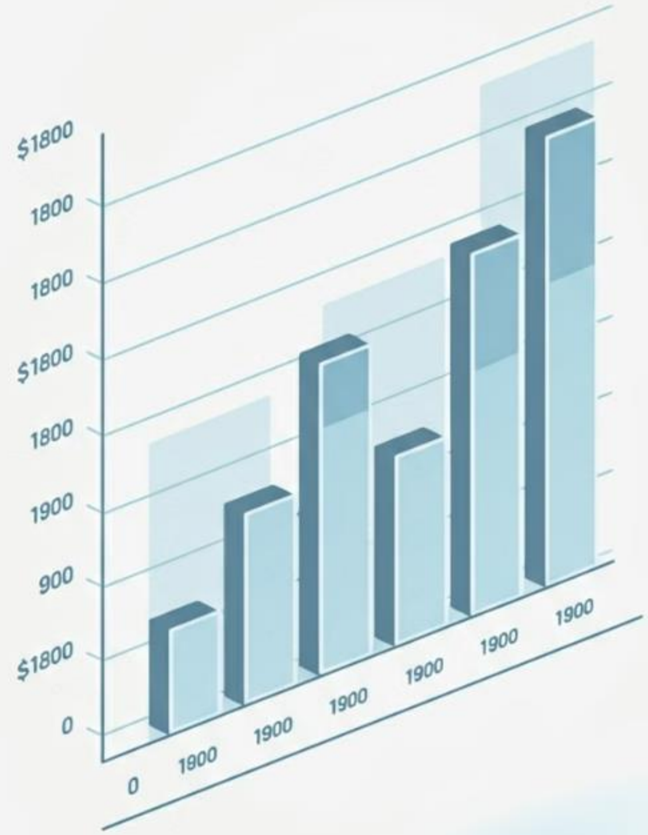
Λύση

Διατύπωση των Υποθέσεων:

Μηδενική Υπόθεση H0: $p=0.60$ (το ποσοστό είναι 60%)

Εναλλακτική Υπόθεση H1: $p<0.60$ (το ποσοστό είναι μικρότερο από 60%)

Θα χρησιμοποιήσουμε τον **έλεγχο z** για το ποσοστό δεδομένου ότι έχουμε μεγάλο δείγμα και συγκεκριμένο ποσοστό υπόθεσης



$$z = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

$$\text{Υπολογισμός: } z = \frac{0.54-0.60}{\sqrt{\frac{0.60 \cdot 0.40}{100}}} = \frac{-0.06}{0.049} \approx -1.22$$

Για επίπεδο σημαντικότητας **α=0.01** και έλεγχο αριστερής κατεύθυνσης, η κρίσιμη τιμή **$z_\alpha \approx -2.33$**

Επειδή το z-στατιστικό (-1.22) είναι μεγαλύτερο από την κρίσιμη τιμή (-2.33), **δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση**

Συμπέρασμα: Τα δεδομένα δεν παρέχουν αρκετές ενδείξεις για να απορρίψουμε τον ισχυρισμό ότι το ποσοστό των προτιμήσεων για το προϊόν **είναι τουλάχιστον 60%**

Παράδειγμα

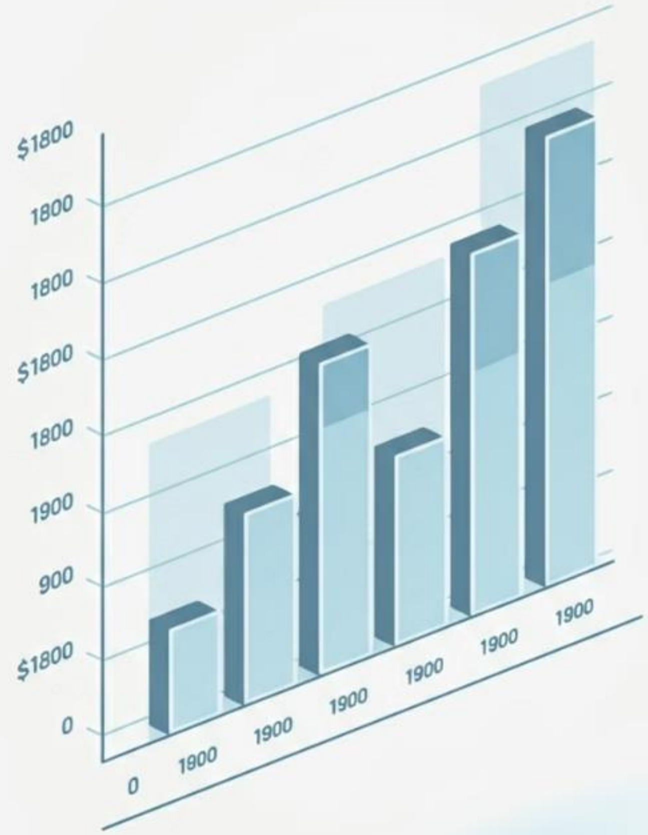
Ένας γεωργός ισχυρίζεται ότι το **μέσο βάρος** των καρπών από μία νέα ποικιλία σιταριού **είναι τουλάχιστον 50 γραμμάρια.** Για να επαληθεύσουμε αυτήν την υπόθεση, παίρνουμε **ένα δείγμα 40 καρπών** και διαπιστώνουμε ότι το **μέσο βάρος** τους είναι **48** γραμμάρια με **τυπική απόκλιση 5 γραμμάρια**. Εξετάστε τον ισχυρισμό του γεωργού στο επίπεδο σημαντικότητας, **α=0.01.**

Λύση:

Μηδενική Υπόθεση H0: μ≤50 (το μέσο βάρος είναι το πολύ 50 γραμμάρια)

Εναλλακτική Υπόθεση H1: μ>50 (το μέσο βάρος είναι περισσότερο από 50 γραμμάρια)

Θα χρησιμοποιήσουμε τον **έλεγχο t** για τον μέσο όρο, αφού η διασπορά του πληθυσμού δεν είναι γνωστή και έχουμε δείγμα με γνωστή τυπική απόκλιση



$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Υπολογισμός: $t = \frac{48-50}{5/\sqrt{40}} = \frac{-2}{0.79} \approx -2.53$

Για επίπεδο σημαντικότητας **0.01** και **39** βαθμούς ελευθερίας, η κρίσιμη τιμή για δεξιόπλευρο έλεγχο είναι περίπου $t_a \approx 2.426$.

Επειδή το t-στατιστικό (-2.53) είναι μικρότερο από την κρίσιμη τιμή (2.426), **δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση**

Συμπέρασμα: Τα δεδομένα δεν παρέχουν αρκετές ενδείξεις για να υποστηρίξουμε ότι το μέσο βάρος των καρπών **είναι τουλάχιστον 50 γραμμάρια**

Παράδειγμα

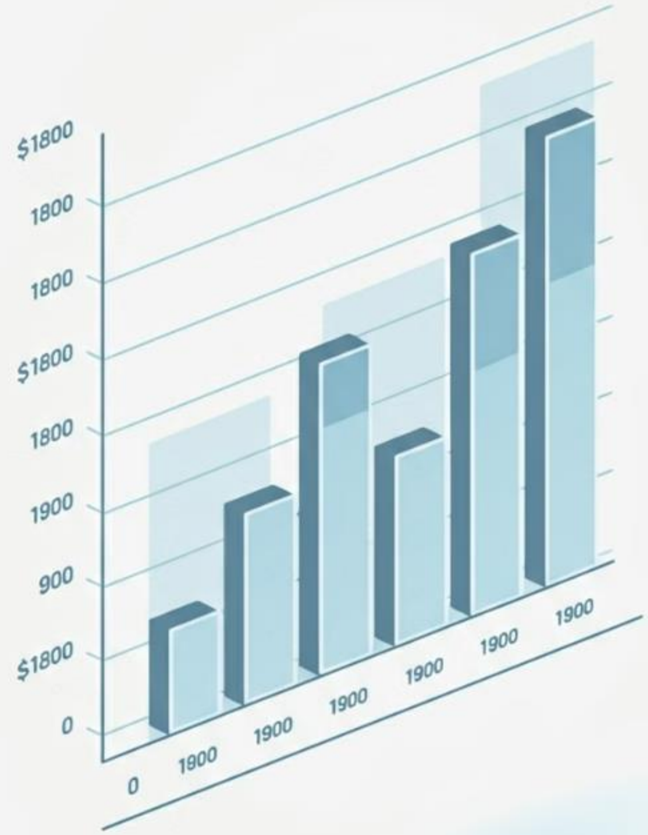
Ένας δήμος υποστηρίζει ότι **τουλάχιστον το 75%** των κατοίκων είναι ικανοποιημένοι από την καθαριότητα στην περιοχή. Για να το επαληθεύσουμε, παίρνουμε **δείγμα 200 κατοίκων** και διαπιστώνουμε ότι οι **140 δηλώνουν ικανοποιημένοι.** Εξετάστε τον ισχυρισμό του δήμου με επίπεδο σημαντικότητας **α=0.05.**

Λύση:

Μηδενική Υπόθεση H0: p≥0.75 (τουλάχιστον το 75% των κατοίκων είναι ικανοποιημένοι)

Εναλλακτική Υπόθεση H1): p<0.75 (λιγότερο από το 75% των κατοίκων είναι ικανοποιημένοι)

Θα χρησιμοποιήσουμε τον **έλεγχο z** για το ποσοστό, καθώς έχουμε μεγάλο δείγμα και γνωστό ποσοστό υπόθεσης



Εκτίμηση του ποσοστού στο δείγμα: $\hat{p} = \frac{140}{200} = 0.70$

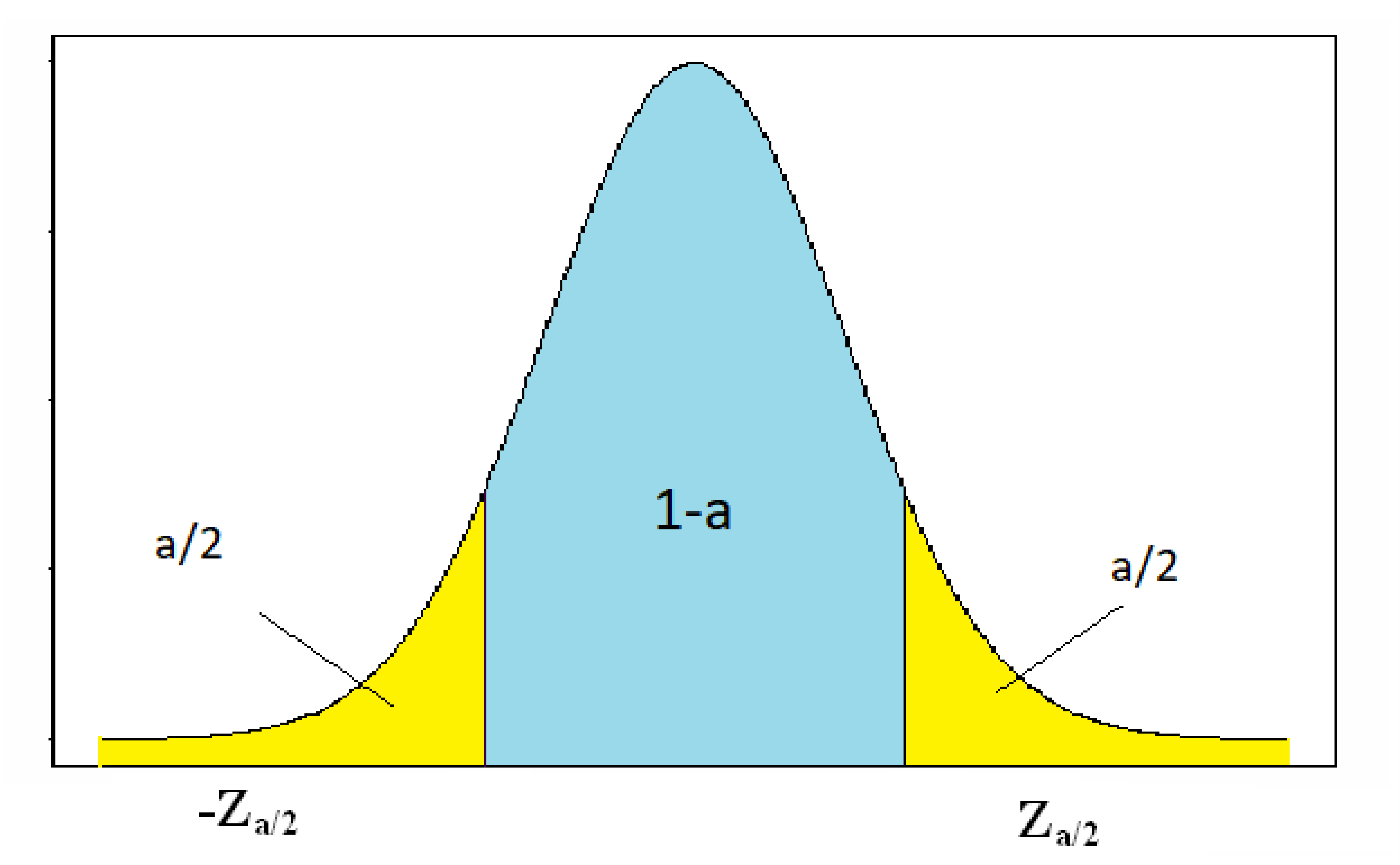
$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Υπολογισμός: $z = \frac{0.70 - 0.75}{\sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{200}}} = \frac{-0.05}{0.0306} \approx -1.63$

Για επίπεδο σημαντικότητας **0.05** και αριστερόπλευρο έλεγχο, η κρίσιμη τιμή **$z_α \approx -1.645$**

Επειδή το z-στατιστικό (-1.63) είναι μεγαλύτερο από την κρίσιμη τιμή (-1.645), **δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση**

Συμπέρασμα: Τα δεδομένα δεν παρέχουν αρκετές ενδείξεις για να υποστηρίξουμε ότι **λιγότερο από το 75%** των κατοίκων είναι ικανοποιημένοι από την καθαριότητα.


1-a
a/2
a/2
-Z a/2
Z a/2

ΕΥ για τη διαφορά δύο μέσων από κανονικούς πληθυσμούς με γνωστές διακυμάνσεις

Θέλουμε να ελέγξουμε την εξής υπόθεση:

$$\boxed{\begin{aligned} H_0&: \mu_X = \mu_Y \\ H_1&: \mu_X \neq \mu_Y \end{aligned}}$$

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση ελέγχου είναι:

$$\boxed{Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{(\sigma_X^2/n_X) + (\sigma_Y^2/n_Y)}}}$$

που ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή N(0,1).

ΕΥ για τη διαφορά δύο μέσων από κανονικούς πληθυσμούς με γνωστές διακυμάνσεις

Από τα δεδομένα του δείγματος υπολογίζουμε την τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου:

$$\boxed{Z^* = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{(\sigma_X^2/n_X) + (\sigma_Y^2/n_Y)}}}$$

Μετά εφαρμόζουμε το κριτήριο απόρριψης ή μη απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης, δηλαδή συγκρίνουμε την ανωτέρω τιμή της συνάρτησης ελέγχου με την θεωρητική τιμή της Z σε επίπεδο σημαντικότητας α. Αν: $Z^* > Z_{\alpha/2}$ ή $Z^* < -Z_{\alpha/2}$ ή, ισοδύναμα $|Z^*| > Z_{a/2}$

τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α ή 100α%.

Ερώτηση

Το **κεντρικό οριακό θεώρημα** είναι η βάση για την δημιουργία στατιστικών ελέγχου υποθέσεων:

(α) Σωστό

(β) Λάθος

Απάντηση: Η σωστή απάντηση είναι η (α)

Με βάση το κεντρικό οριακό θεώρημα οι διαδικασίες ελέγχου υποθέσεων επεκτείνονται και σε περιπτώσεις μη κανονικών πληθυσμών

Ερώτηση

Σε μικρά δείγματα, **$n < 30$**, χρησιμοποιούμε ως κατανομή ενός εκτιμητή την κατανομή **t** του **Student** με βαθμούς ελευθερίας ίσους με:

(α) το μέγεθος του δείγματος
(β) το μέγεθος του δείγματος μείον ένα
(γ) το μέγεθος του δείγματος μείον το αριθμό παραμέτρων που έχουμε εκτιμήσει στο υπόδειγμά μας
(δ) τίποτε από τα παραπάνω

Απάντηση: Η σωστή απάντηση είναι η (β)