ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

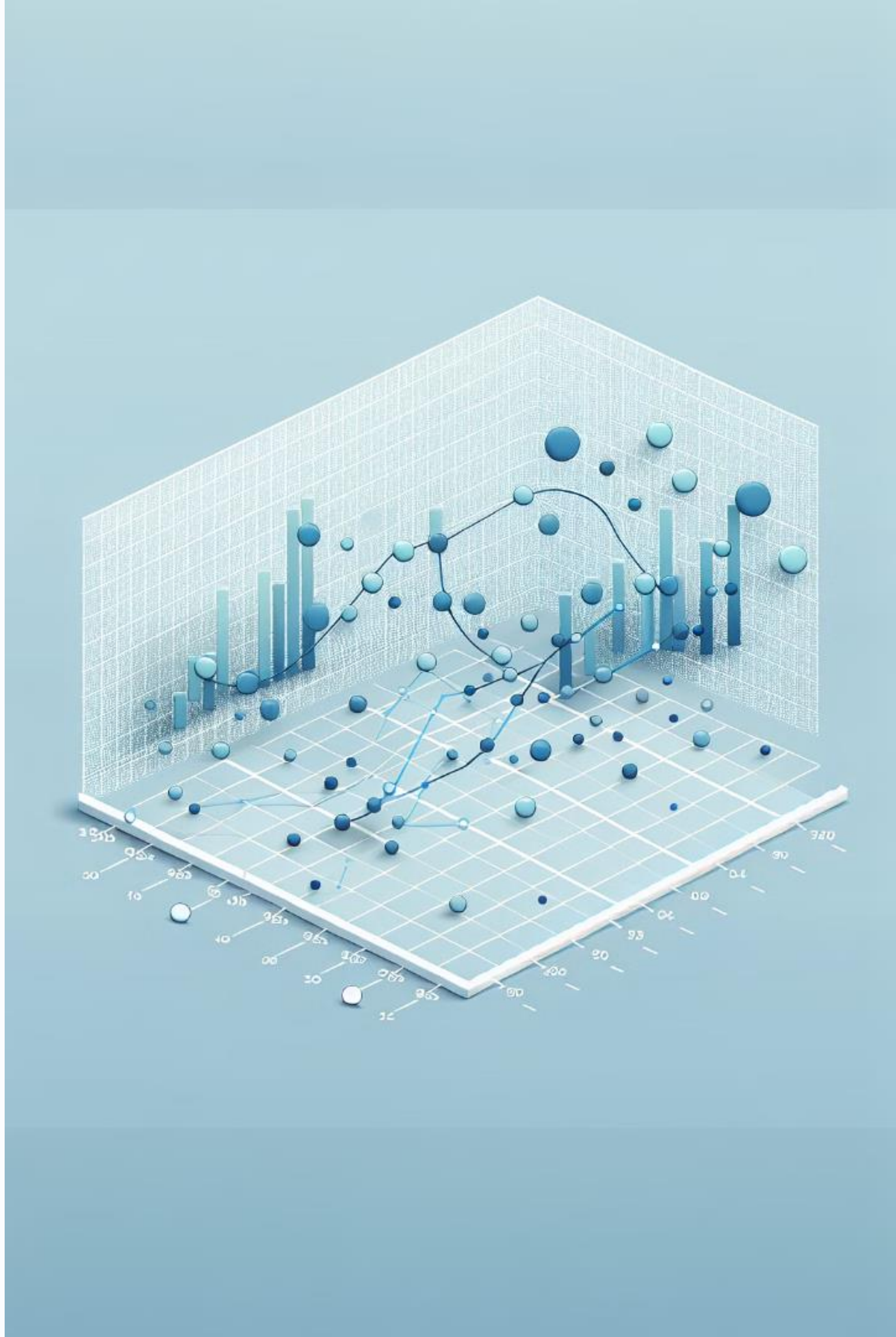
ΔΠΜΣ «ΤΕΧΝΟ-ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ»

Μάθημα: Ποσοτικές Μέθοδοι

Διδάσκων: Δρ. Ευάγγελος Δημ. Μακρυβέλιος

2η Εκπαιδευτική Συνάντηση:
Κατανομές τυχαίων μεταβλητών – Κατανομές διακριτών τυχαίων μεταβλητών - Διωνυμική - Poisson

Αθήνα, 2024



Τυχαίες μεταβλητές και διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Τυχαία μεταβλητή

- Είναι ένα γεγονός του οποίου το αποτέλεσμα **δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων**. Είναι άγνωστο πριν από την πραγματοποίηση **ενός πειράματος ή μιας διαδικασίας**
- Τα **αποτελέσματα** της τυχαίας μεταβλητής του εκφράζονται **αριθμητικά** και μπορεί να λαμβάνει **διαφορετικές τιμές** καθεμιά με μια **συγκεκριμένη πιθανότητα**

Παράδειγμα:

- Τυχαίο πείραμα: Η ρίψη **2** ζαριών
- Τυχαία μεταβλητή: Μετράμε τον αριθμό εμφάνισης του 6 (0,1 ή 2 φορές)

Διακριτές τυχαίες μεταβλητές: Μεταβλητές των οποίων τα ενδεχόμενα είναι διακριτοί αριθμοί, δηλαδή μπορούν να μετρηθούν

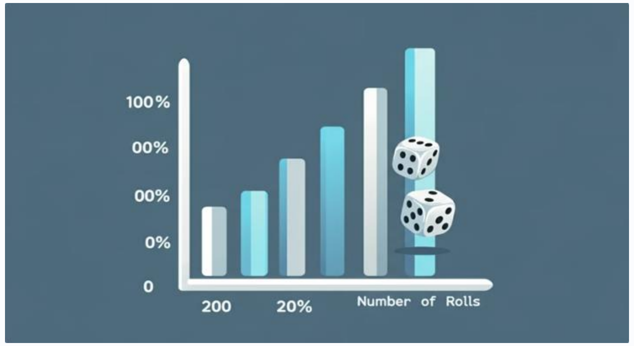
Παράδειγμα 1:

- Τυχαίο πείραμα: Ρίψη ενός νομίσματος **3** φορές
- Τυχαία μεταβλητή: Αριθμός γραμμάτων (0, 1, 2 ή 3)

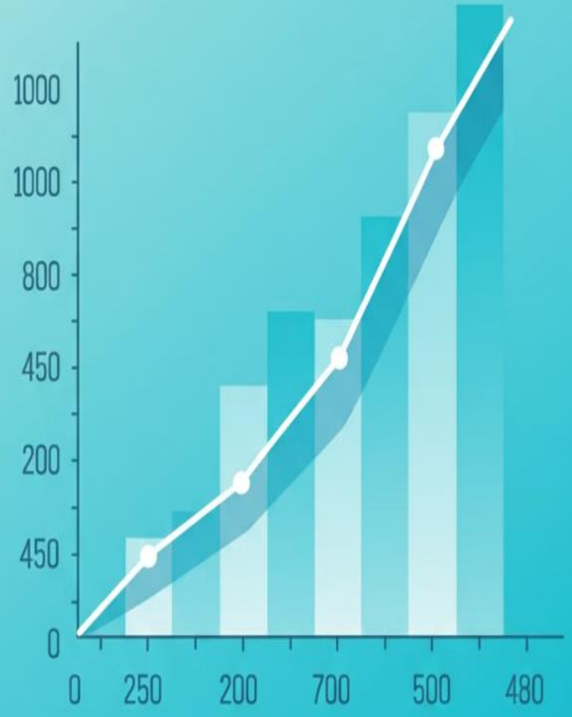
Παράδειγμα 2:

- Τυχαίο πείραμα: Αγώνας Μπάσκετ
- Τυχαία μεταβλητή: Αριθμός πόντων

Παράδειγμα: Ρίψη Ζαριού



Παράδειγμα: Ρίψη Νόμισματος



Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

Τυχαίο πείραμα: Ρίψη 2 νομισμάτων
Τυχαία μεταβλητή: Αριθμός κεφαλών

Κατανομή πιθανότητας

Ενδεχόμενα	Πιθανότητα
0	1/4 = 0,25
1	2/4 = 0,50
2	1/4 = 0,25

Κατανομές πιθανοτήτων

- Σε κάθε **τυχαία μεταβλητή** αντιστοιχεί μια **κατανομή πιθανότητας**. Συχνά όμως έχουν διαπιστωθεί **μεγάλες ομοιότητες** σε αυτές τις κατανομές πιθανοτήτων. Έτσι, έχουν δημιουργηθεί ορισμένες **βασικές μορφές κατανομών** πιθανοτήτων που ονομάζονται **θεωρητικές κατανομές πιθανοτήτων** και τις οποίες συνήθως χρησιμοποιούμε **ως προσεγγίσεις** των πραγματικών κατανομών

- Όταν λοιπόν θέλουμε να μελετήσουμε μια **τυχαία μεταβλητή Χ** η επιλογή της κατάλληλης **θεωρητικής κατανομής** που μπορεί να εκφράσει τις πιθανότητες των σημείων του δειγματικού χώρου της Χ μας **επιτρέπει την εξαγωγή συνοπτικών και αξιόπιστων συμπερασμάτων για τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες της Χ**

Συνάρτηση Πιθανότητας (Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές)

Είναι η καταγραφή όλων των βασικών **ενδεχομένων (X_i)** και των <u>αντίστοιχων</u> **πιθανοτήτων τους $P(X_i)$**

❖ X_i = **βασικό ενδεχόμενο** δηλ. τιμή της τυχαίας μεταβλητής

❖ $P(X_i)$ = **πιθανότητα** της τιμής - **ενδεχομένου** X_i

❖ Η $P(X_i)$ συμβολίζεται και ως **f(x)** και ονομάζεται **συνάρτηση πιθανότητας**. Ισχύουν:

$$0 \leq P(X_i) \leq 1 \qquad \sum_i P(X_i) = 1$$

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

Αναμενόμενη τιμή (μέσος ή μαθηματική ελπίδα):

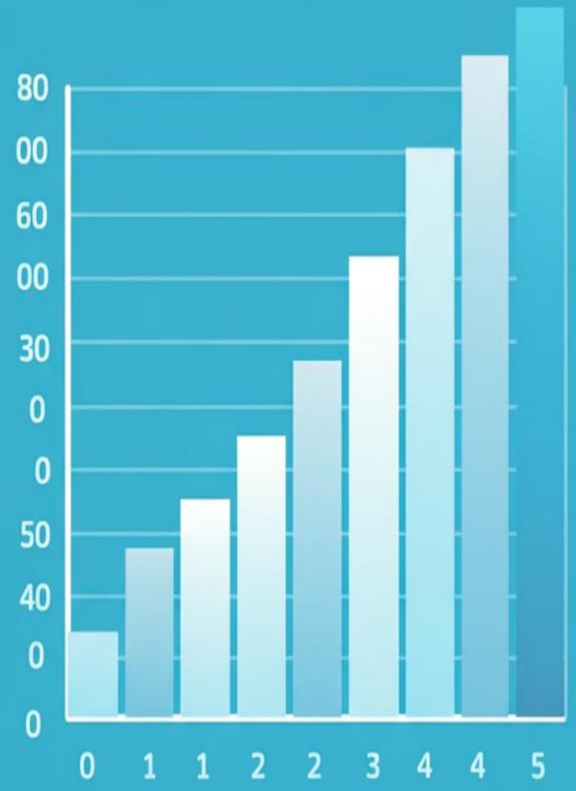
Η αναμενόμενη τιμή, γνωστή και ως μέσος όρος ή μαθηματική ελπίδα, είναι μια σημαντική έννοια στην θεωρία πιθανοτήτων και στατιστικής. Είναι η μέση τιμή που αναμένουμε να λάβουμε από μια τυχαία μεταβλητή, λαμβάνοντας υπόψη τις πιθανότητες των διαφόρων τιμών που μπορεί να πάρει η μεταβλητή

Σταθμικός μέσος των X_i με βάρη τις πιθανότητες των X_i:

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i P(x_i)$$

Υπολογίζεται ως ο **σταθμικός μέσος όρος** των τιμών της τυχαίας μεταβλητής, **με βάρη** τις **αντίστοιχες πιθανότητες**. Συγκεκριμένα, για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X, **η αναμενόμενη τιμή E(X) ορίζεται ως η άθροιση όλων των τιμών της X, πολλαπλασιασμένων με τις αντίστοιχες πιθανότητες**

Τυχαίο Πείραμα: Ρίψη 2 νομισμάτων
Τυχαία Μεταβλητή: Αριθμός κεφαλών



Κατανομή Πιθανότητας

Ενδεχόμενα	Πιθανότητα
0	1/4 = 0,25
1	2/4 = 0,50
2	1/4 = 0,25

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές (παράδειγμα)

Ρίψη **2** νομισμάτων, αριθμός κεφαλών

Αναμενόμενη τιμή:

$$\mu = \sum_{x=0}^{2} x\,P(x)$$

$$= 0 \times 0,25 + 1 \times 0,5 + 2 \times 0,25 = 1,0$$

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

Διακύμανση

Σταθμικός μέσος των **τετραγωνικών αποστάσεων** **X_j** από το μέσο με βάρη τις πιθανότητες των **X_j**:

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(\mathrm{X}-\mu)^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(X = x_i)$$

Η **τυπική απόκλιση** της **X** είναι η **θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης**:

$$\sigma = \sqrt{V(x)}$$

Ιδιότητες Μέσης Τιμής και Διακύμανσης

Για όλες τις τυχαίες μεταβλητές ισχύουν :

$$E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b, \quad a,\ b \in \mathbb{R}$$

$$E(a \cdot X) = a \cdot E(X), \quad a \in \mathbb{R}$$

$$E(a \cdot X \pm b \cdot Y) = a \cdot E(X) \pm b \cdot E(Y), \quad a,\ b \in \mathbb{R}$$

$$E(a) = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

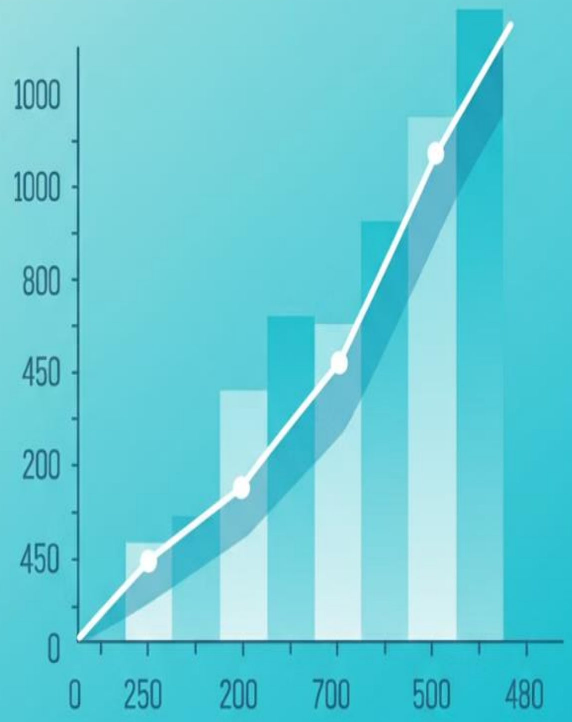
$$V(a \cdot X) = a^2 \cdot V(X), \quad a \in \mathbb{R}$$

$$V(a \cdot X \pm b \cdot Y) = a^2 \cdot V(X) + b^2 \cdot V(Y), \quad a,\ b \in \mathbb{R}$$

$$V(a) = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Παράδειγμα



Τυχαίο Πείραμα: Ρίψη 2 Νομισμάτων
Τυχαία Μεταβλητή: Αριθμός Κεφαλών

Μέσος μ = 1

Κατανομή Πιθανότητας

Ενδεχόμενα	Πιθανότητα
0	1/4 = 0,25
1	2/4 = 0,50
2	1/4 = 0,25

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

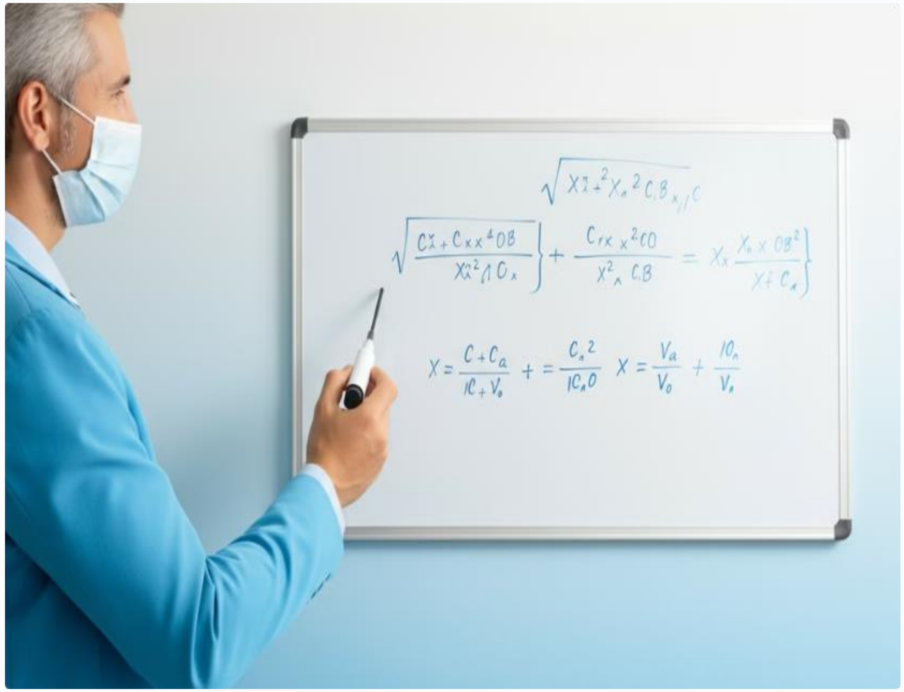
Παράδειγμα: Ρίψη 2 νομισμάτων, αριθμός κεφαλών

Διακύμανση: $$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{2} (x-\mu)^2 P(x)$$

$$= (0-1)^2 \times 0,25 + (1-1)^2 \times 0,50 +$$

$$+(2-1)^2 \times 0,25 = 0,5$$

Συνάρτηση Κατανομής



Είναι η **συνάρτηση που μας δίνει την πιθανότητα** P(X ≤ x)

Προκύπτει ως **άθροισμα των πιθανοτήτων P(X = x_i)** όλων των βασικών ενδεχομένων x_i για τα οποία $x_i \leq x$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Παράδειγμα Bernoulli

- Ας υποθέσουμε ότι πραγματοποιούμε ένα πείραμα τύχης το οποίο έχει **δύο δυνατά** (*αμοιβαίως αποκλειόμενα*) αποτελέσματα: **επιτυχία** ή **αποτυχία**, και η **πιθανότητα επιτυχίας** είναι **σταθερή και ίση με p**

- Κάθε τέτοια εκτέλεση **ενός πειράματος τύχης** με **μόνο δύο δυνατά** αποτελέσματα καλείται **δοκιμή**

- Το πείραμα με τα χαρακτηριστικά αυτά ονομάζεται **πείραμα Bernoulli**

Παράδειγμα Bernoulli

Το στρίψιμο ενός νομίσματος είναι ένα πείραμα Bernoulli, με **πιθανότητα επιτυχίας** **p=0,5** και **πιθανότητα αποτυχίας** επίσης **q =1 – p = 0,5**. Αν **X** είναι η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το ενδεχόμενο επιτυχίας έχουμε:

$$X \sim B(0,5)$$

Διωνυμική (Binomial) κατανομή

Εάν έχουμε μια ακολουθία από **n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli (p)**, με την **πιθανότητα επιτυχίας p** να είναι σταθερή σε όλες τις δοκιμές, τότε η τυχαία μεταβλητή που καταγράφει τον αριθμό των επιτυχιών (στις **n** προσπάθειες) ονομάζεται **διωνυμική** κατανομή με παραμέτρους **n, p** και συμβολίζουμε:

$$X \sim B(n, p)$$

Διωνυμική κατανομή

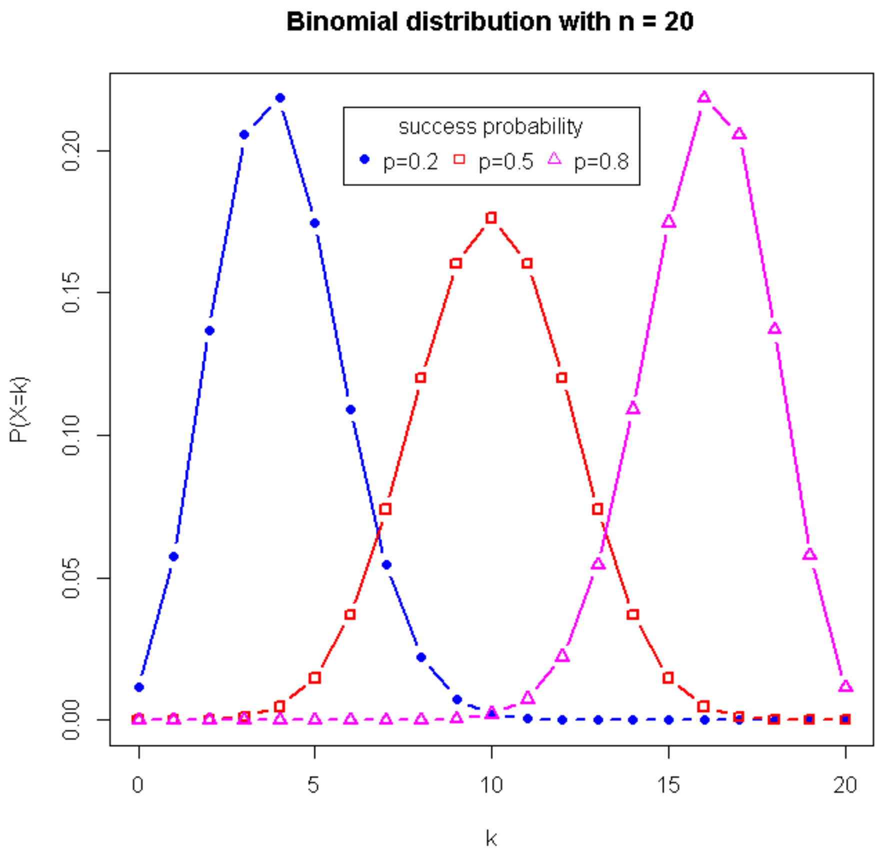
Η **συνάρτηση πιθανότητας** είναι:

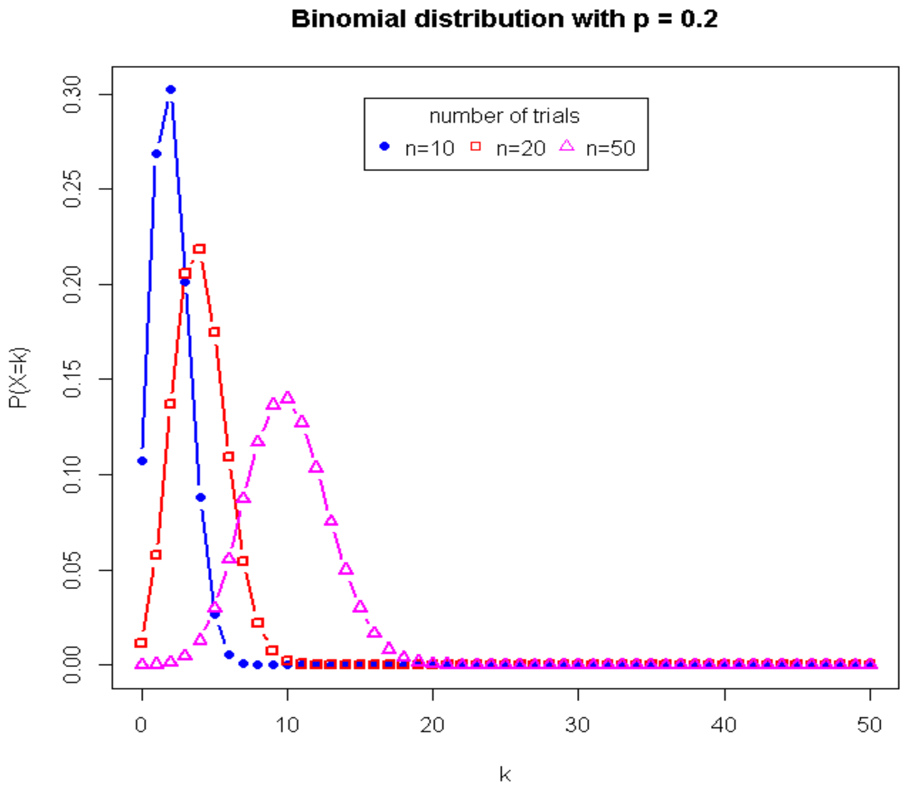
$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k},\quad 0\le k\le n,\quad 0<p<1$$

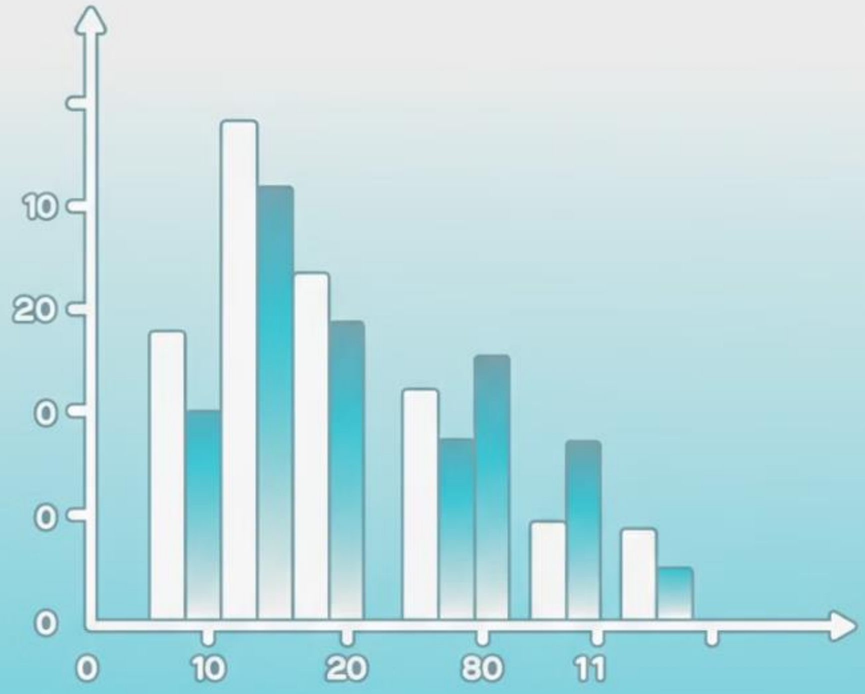
ενώ η **μέση τιμή** και η **διακύμανση** είναι:

$$E(X)=np \qquad V(X)=npq$$

Η μορφή της διωνυμικής κατανομής







Παράδειγμα Διωνυμικής Κατανομής

Ένας πωλητής πραγματοποιεί τηλεφωνικές πωλήσεις. Από διαχρονικά στοιχεία που τηρούνται στο τμήμα πωλήσεων της εταιρείας προκύπτει ότι η **πιθανότητα επίτευξης** πώλησης για το συγκεκριμένο πωλητή είναι **30%.** Έστω ότι ο πωλητής σε μια τυχαία επιλεγμένη ημέρα τηλεφωνεί σε **10 άτομα.** Αν γνωρίζουμε ότι η **πιθανότητα πώλησης παραμένει σταθερή** στο χρόνο και ότι τα διαδοχικά τηλεφωνήματα είναι **ανεξάρτητα** μεταξύ τους να υπολογισθούν:

1. Η πιθανότητα να επιτύχει **3 πωλήσεις**
2. Η πιθανότητα να επιτύχει **το πολύ 2 πωλήσεις**
3. Η πιθανότητα να επιτύχει **τουλάχιστον 2 πωλήσεις**
4. Ο **αναμενόμενος αριθμός** και η **τυπική απόκλιση** των πωλήσεων

Λύση

Έστω **X** η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των επιτυχημένων τηλεφωνημάτων από τα **10** που συνολικά έγιναν τη συγκεκριμένη ημέρα. Έχουμε:

$$X \sim B(n,p) = B(10,0,3)$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}, \quad 0 \le k \le n, \quad 0 < p < 1$$

1 $$P(X=3) = \binom{10}{3} p^3 (1-p)^7 = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} 0,3^3 \times 0,7^7 = 0,2668$$

Λύση

2 $$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$

$$= \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} + \binom{10}{1} p^1 (1-p)^9 + \binom{10}{2} p^2 (1-p)^8 =$$

$$= 0,7^{10} + 10 \times 0,3^1 \times 0,7^9 + \frac{10 \times 9}{2} 0,3^2 \times 0,7^8 =$$

$$= 0,0282 + 0,1211 + 0,2335 =$$

$$= 0,3828$$

Λύση

3 $$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$$
$$= 1 - 0,0282 - 0,1211 = 0,8507$$

4 $$E(X) = n \times p = 10 \times 0,3 = 3$$
$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{10 \times 0,3 \times 0,7} = 1,449$$

Ερώτηση

1. Ποια από τις ακόλουθες είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή;
α) το φορολογητέο εισόδημα ενός εργαζομένου
β) η τιμή του πετρελαίου
γ) ο αριθμός παιδιών μιας οικογένειας
δ) η τιμή ενός αυτοκινήτου

Απάντηση
Η σωστή απάντηση είναι η (γ)

Ερώτηση

2. Ποια από τις ακόλουθες προτάσεις σχετικά με μια πιθανότητα δεν είναι σωστή;

α) μια τιμή κοντά στο 1 σημαίνει ότι το ενδεχόμενο είναι σχεδόν σίγουρο ότι θα συμβεί
β) λαμβάνει τιμές ανάμεσα στο 0 και το 1
γ) λαμβάνει τιμές ανάμεσα στο -1 και το 1
δ) μπορεί να εκφραστεί είτε ως δεκαδικός είτε ως κλασματικός αριθμός

Απάντηση

Η **σωστή απάντηση είναι** η **(γ).** Κάθε πιθανότητα λαμβάνει οπωσδήποτε τιμές ανάμεσα στο **0** και το **1**

Ερώτηση

3. Με ποιόν από τους ακόλουθους τύπους υπολογίζεται η διακύμανση μιας διωνυμικής κατανομής;

α) $s^2 = p^2$
β) $s^2 = np$
γ) $s^2 = npq$
δ) $s^2 = n^2p^2q^2$

Απάντηση
Η **σωστή απάντηση** είναι η (**γ**)

Ερώτηση

4. Η πιθανότητα αποτυχίας σε μια διωνυμική κατανομή είναι:
α) $p = 1 + q$
β) $p = q - p$
γ) $q = 1 - p$
δ) $q = p + 1$

Απάντηση
Η **σωστή απάντηση** είναι η (**γ**)

Κατανομή Poisson

Η **κατανομή Poisson** χρησιμοποιείται συνήθως για να περιγράψει φαινόμενα **«ουρών»** όπως π.χ. ο αριθμός πελατών που φθάνουν σε μια τράπεζα εντός ορισμένου χρονικού διαστήματος, ο αριθμός τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μία περιοχή κατά τη διάρκεια ενός ορισμένου χρονικού διαστήματος, ο αριθμός κλήσεων ενός τηλεφωνικού κέντρου κ.λπ.

Για την διαδικασία πραγματοποίησης των ενδεχομένων μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Poisson ισχύουν τα ακόλουθα:

i. Σε κάθε χρονικό διάστημα ένα ενδεχόμενο **μπορεί είτε να πραγματοποιηθεί είτε να μην πραγματοποιηθεί.** Η πραγματοποίησή του ενδεχομένου ονομάζεται **επιτυχία**, ενώ η μη πραγματοποίησή του **αποτυχία**

ii. Οι **τυχαίες** εμφανίσεις ενδεχομένων είναι **ανεξάρτητες**, δηλαδή η εμφάνιση ενός ενδεχομένου σε ένα διάστημα χρόνου ή χώρου **δεν επηρεάζει την πιθανότητα εμφάνισής του** στα επόμενα διαστήματα του χρόνου ή του χώρου

Κατανομή Poisson

Έστω μια **διακριτή τυχαία μεταβλητή X** της οποίας οι τιμές εκφράζουν τον αριθμό των συμβάντων σε ένα προκαθορισμένο διάστημα χρόνου ή χώρου. Αν **λ** είναι ο **μέσος αριθμός επιτυχιών** στο διάστημα αυτό, τότε η τυχαία μεταβλητή **X** λέμε ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson με **παράμετρο λ**:

$$X \sim P(\lambda)$$

Η **συνάρτηση πιθανότητας** της κατανομής Poisson είναι:

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\ldots$$

Με **μέση τιμή** και **διακύμανση**:

$$E(X)=\lambda \qquad V(X)=\lambda$$

Γραφική Απεικόνιση Κατανομής Poisson

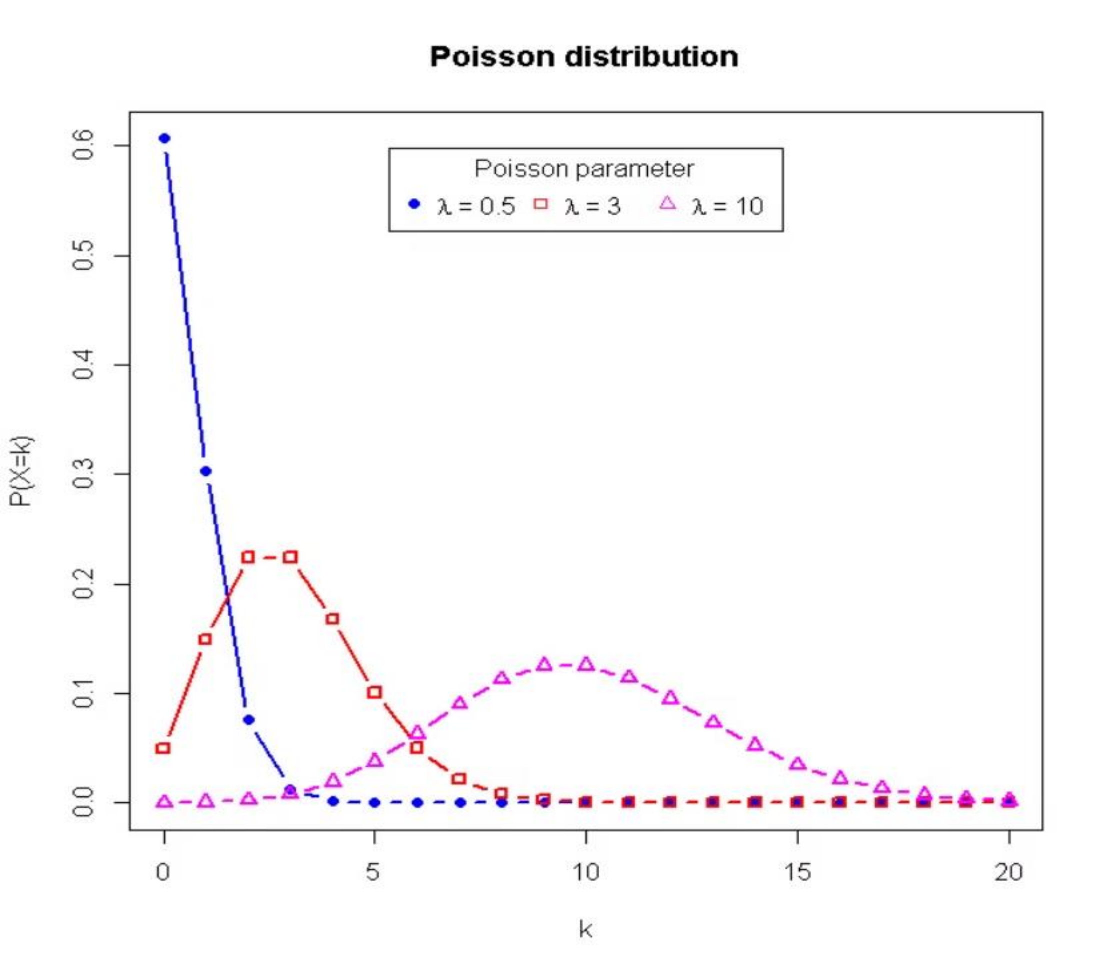
- Η κατανομή Poisson μπορεί να απεικονιστεί γραφικά χρησιμοποιώντας ένα **διάγραμμα ράβδων**

- Κάθε ράβδος αντιπροσωπεύει την **πιθανότητα εμφάνισης ενός συγκεκριμένου αριθμού συμβάντων σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα**

- Ο **άξονας x αντιπροσωπεύει τον αριθμό των συμβάντων**, ενώ ο **άξονας y αντιπροσωπεύει την πιθανότητα**

- Το σχήμα του διαγράμματος ράβδων εξαρτάται από την τιμή της παράμετρου **λ**

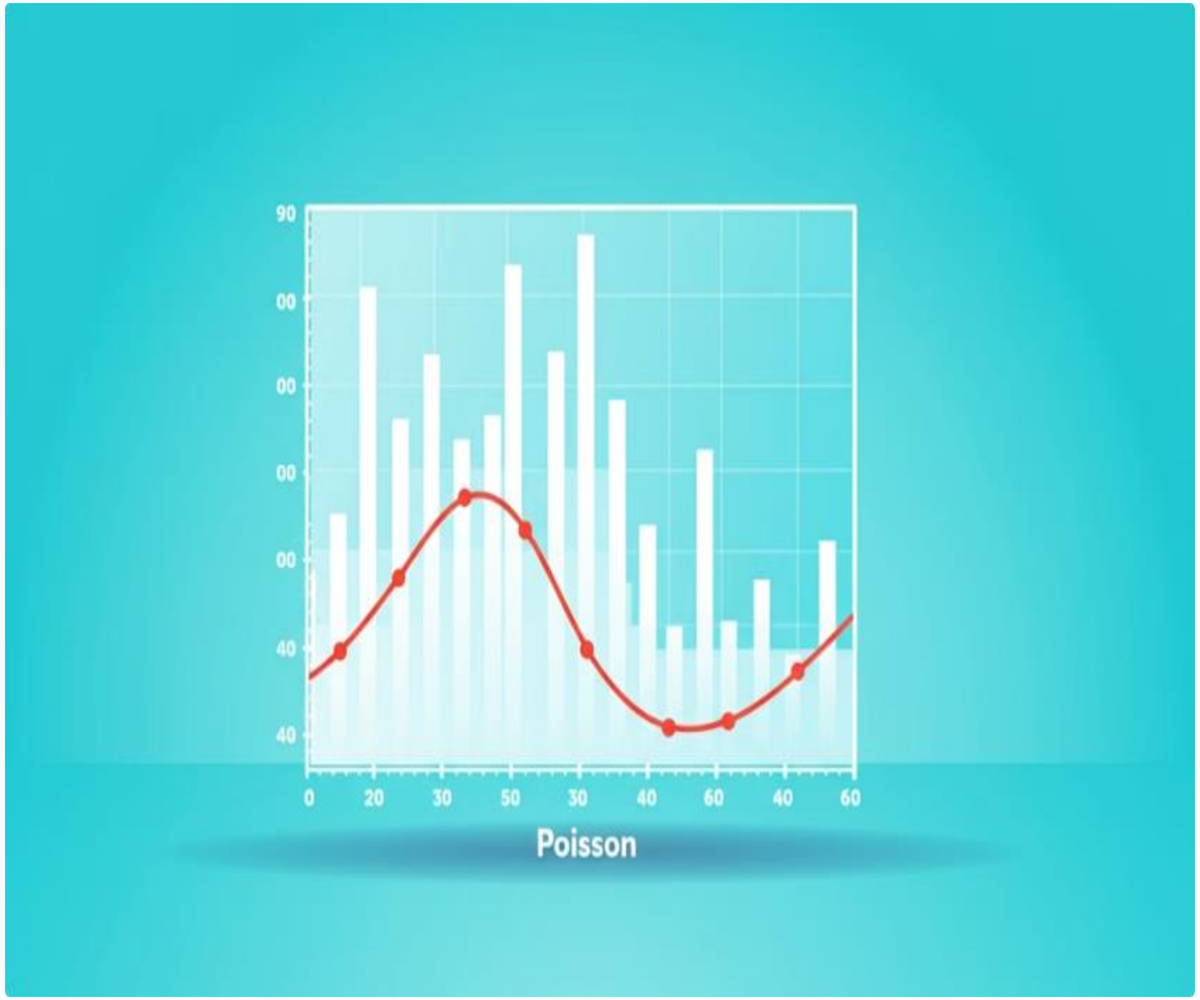
- **Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του λ**, τόσο **πιο πλατιά είναι η κατανομή**



Ιδιότητες κατανομής Poisson

- Η **μέση τιμή** είναι ***ίση*** με τη **διακύμανση** (ίσες με το **λ**)

- Αν η τυχαία μεταβλητή **Χ ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή λ** στη μονάδα του χρόνου (ή χώρου) τότε **σε t μονάδες χρόνου (ή χώρου) ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή λt**



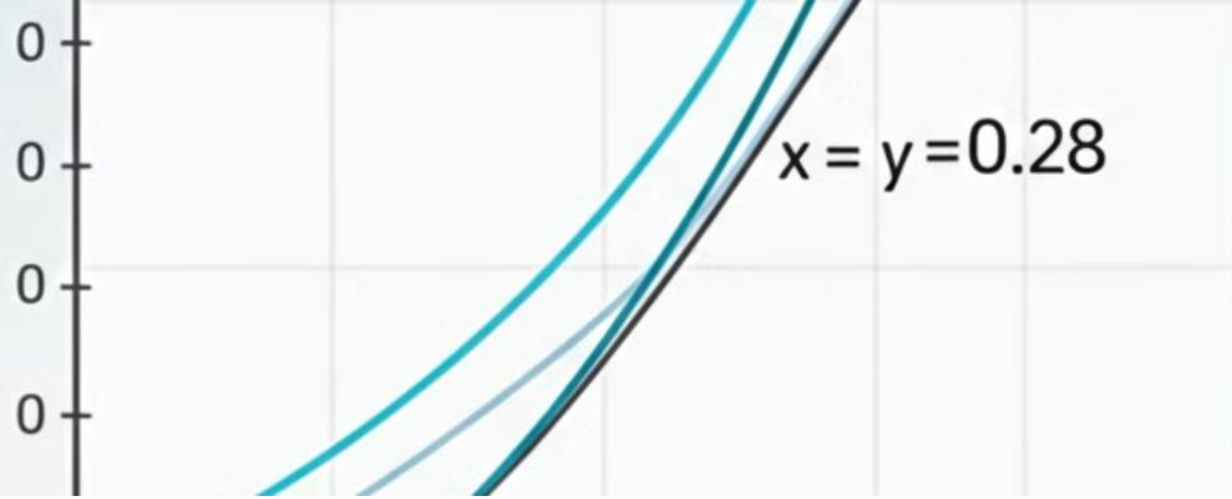
Παράδειγμα

Η εταιρεία «DOT.COM A.E.» ασχολείται με τις πωλήσεις προϊόντων μέσω Internet. Οι παραγγελίες καταφθάνουν με ρυθμό 48 ανά ώρα.

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να υπάρχουν **2 παραγγελίες** σε ένα οποιοδήποτε διάστημα **ενός πεντάλεπτου**

(β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να υπάρχουν **4 παραγγελίες** σε ένα οποιοδήποτε διάστημα **ενός τετάρτου**

(γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να υπάρχουν **τουλάχιστον 2 παραγγελίες** σε ένα οποιοδήποτε διάστημα **ενός πεντάλεπτου**



Λύση

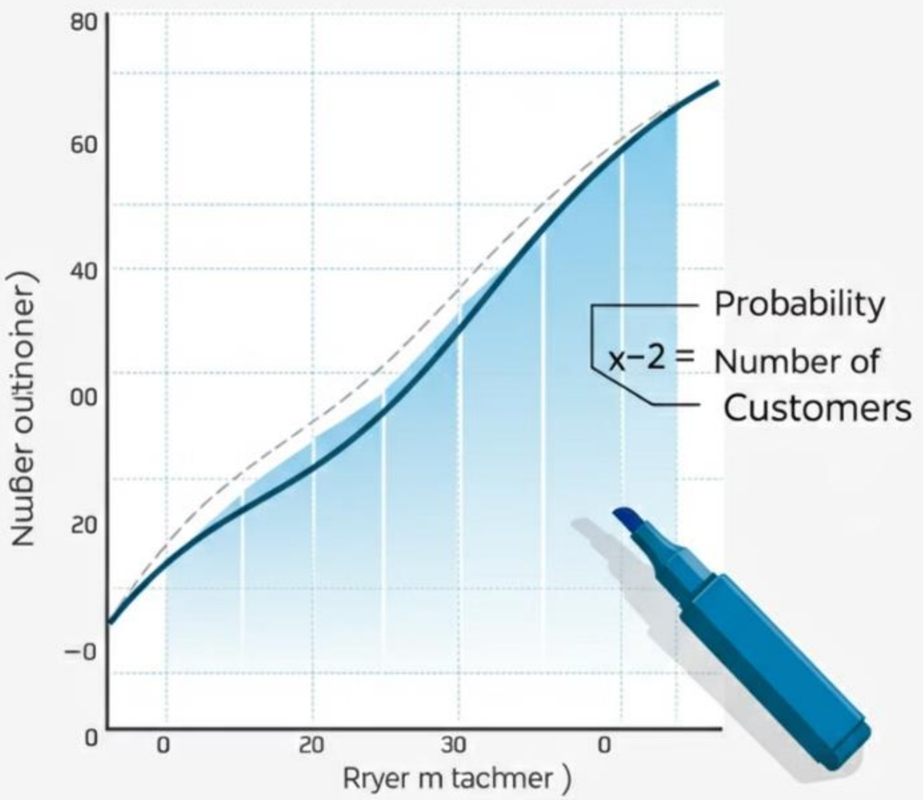
Οι παραγγελίες ακολουθούν την **κατανομή Poisson**. Σύμφωνα με τα δεδομένα ο **μέσος** αριθμός παραγγελιών είναι **48 κλήσεις ανά 60 λεπτά**, δηλαδή **λ = 48/60 = 0,8** κλήσεις το λεπτό. Επομένως έχουμε:

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots$$

1

$$P\left(2\ \text{παραγγελίες σε ένα πεντάλεπτο}\right)=P\left(X=2\middle|\lambda=5\times 0{,}8\right)=$$

$$=P\left(X=2\middle|\lambda=4\right)=\frac{e^{-4}4^{2}}{2!}=0{,}1465$$



Λύση 2

2 $$P\left(4 \text{ παραγγελίες σε ένα τέταρτο}\right)=P\left(X=4\middle|\lambda_2=15\times 0,8\right)=$$

$$=P\left(X=4\middle|\lambda_2=12\right)=\frac{e^{-12}12^4}{4!}=0,0053$$

3 $$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)=$$

$$=1-P\left(X=0\middle|\lambda=4\right)-P\left(X=1\middle|\lambda=4\right)=1-\frac{e^{-4}4^0}{0!}-\frac{e^{-4}4^1}{1!}=$$

$$=1-0,0183-0,0732=0,9084$$

Ερώτηση

Με ποιόν από τους ακόλουθους τύπους υπολογίζεται η διακύμανση μιας κατανομής Poisson;

α) $s^2 = p^2$
β) $s^2 = np$
γ) $s^2 = \lambda^2$
δ) $s^2 = \lambda$

Η σωστή απάντηση είναι η (δ).

$$V(X) = \lambda$$

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- **Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές**: παίρνουν τιμές σε **ένα (συνεχές) διάστημα τιμών** (π.χ. το βάρος ενός ατόμου, οι τιμές των μετοχών, κ.ά.)

- **Συναρτήσεις πιθανότητας συνεχών τυχαίων μεταβλητών**
  - Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x)
  - Συνάρτηση κατανομής F(x) (αθροιστική)

- Επειδή υπάρχει άπειρος αριθμός τιμών, η **πιθανότητα** κάθε **μεμονωμένης τιμής** είναι ουσιαστικά **0**

- Έτσι, μπορούμε να καθορίσουμε την **πιθανότητα ενός εύρους τιμών μόνο**

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Ιδιότητες

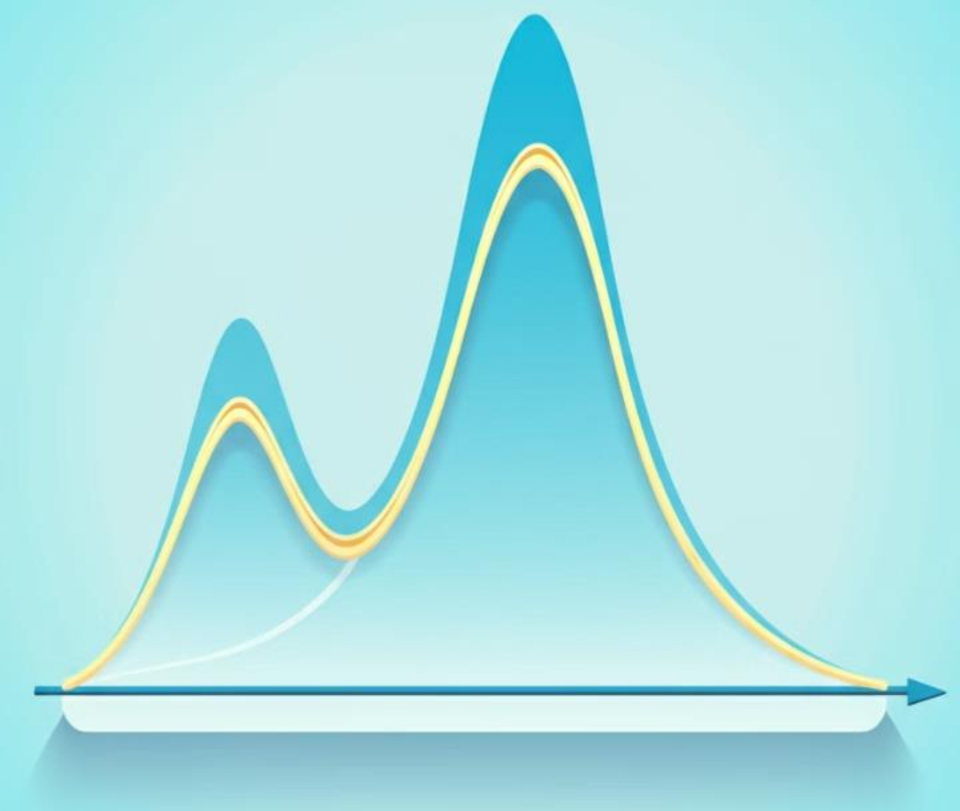
1. $$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

2. $$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

3. $f(x) \ge 0$ **για κάθε x**

4. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

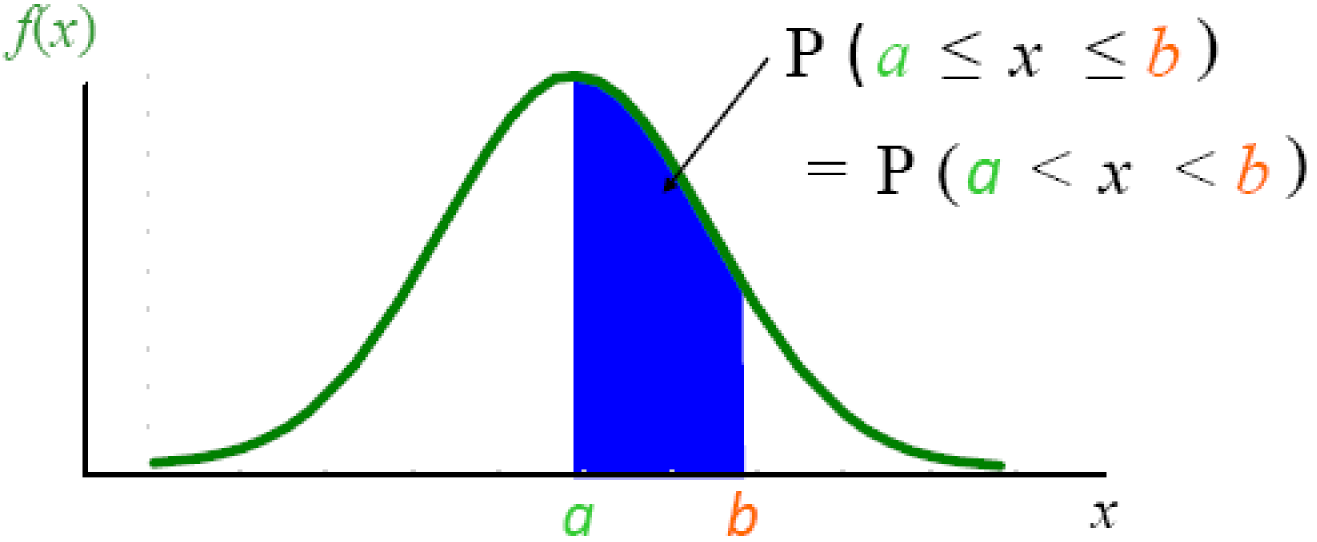
Η f(x) είναι σ.π.π. αν και μόνο αν ισχύουν τα (3) & (4)



Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Η **πιθανότητα** το **X** να βρίσκεται μεταξύ δύο τιμών **είναι η περιοχή κάτω από την καμπύλη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του X**, μεταξύ των δύο τιμών:

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \Pr(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$



Συνάρτηση Κατανομής

Ορισμός: Είναι η συνάρτηση που μας δίνει την πιθανότητα $P(X \leq x)$ δηλαδή

$$F(\mathrm{b}) = P(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

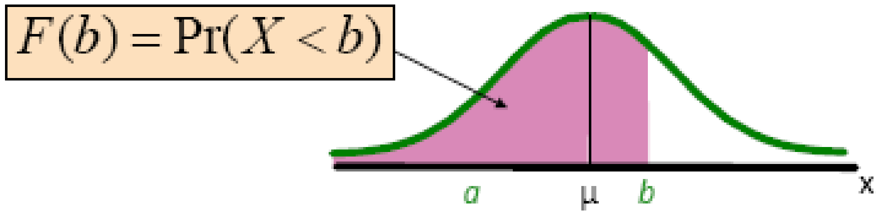
Ιδιότητες

1. $F(x) \geq 0$ για κάθε x

2. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

3. $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

4. $P(X \leq b) = P(X < b) = F(b)$



Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Στις διακριτές μεταβλητές: Συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$

Στις συνεχείς μεταβλητές: Πιθανότητα ενός μεμονωμένου σημείου $P(X = x) = 0$

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Αναμενόμενη τιμή (μέσος ή μαθηματική ελπίδα):

$$\mathrm{E}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

Για τη **μέση τιμή** χρησιμοποιούμε επίσης το συμβολισμό

$$\mathrm{E}(x) = \mu.$$

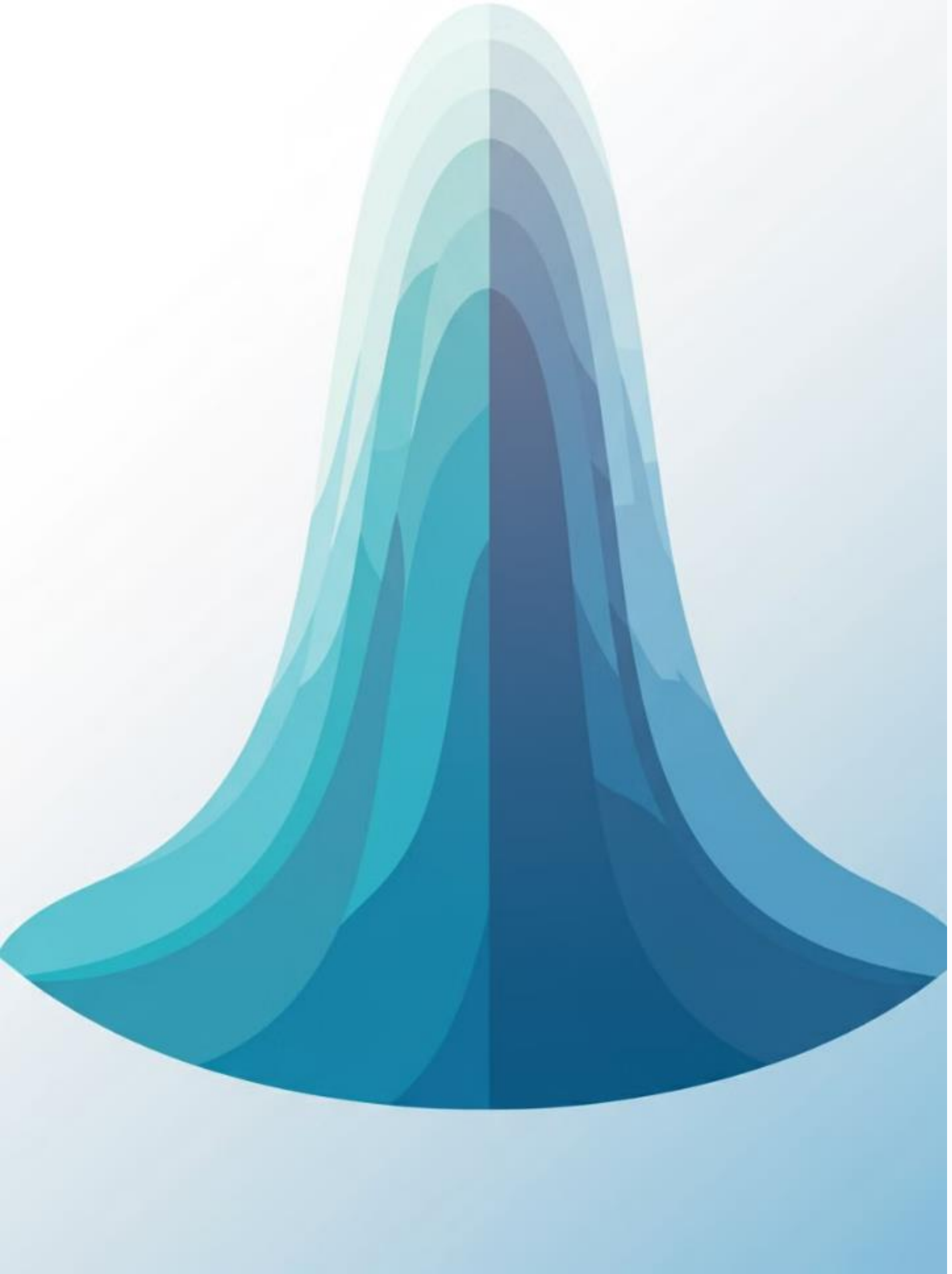
Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Διακύμανση

$$V(x) = \mathrm{E}\left[\left(\mathrm{X}-\mu\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-\mu\right)^2 \cdot f(x)dx$$

Η τυπική απόκλιση της Χ είναι η **θετική τετραγωνική** ρίζα της **διακύμανσης**:

$$\sigma = \sqrt{V(x)}$$



Κανονική (Normal) κατανομή

Η **κανονική κατανομή** (Normal Distribution) είναι η **σημαντικότερη** από όλες τις κατανομές πιθανότητας και αποτελεί τη βάση της σύγχρονης στατιστικής μεθοδολογίας. Η σημασία της οφείλεται σε 3 κυρίως λόγους :

(α) Τα **περισσότερα συνεχή φαινόμενα** μπορούν να εκφραστούν **μέσω τυχαίων μεταβλητών** που ακολουθούν **την κανονική κατανομή**

(β) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προσέγγιση για **πολλές ασυνεχείς κατανομές** όπως π.χ. η **διωνυμική κατανομή** ή η κατανομή Poisson που περιγράψαμε νωρίτερα

(γ) Η κανονική κατανομή **είναι η βάση για πολλές τεχνικές** που χρησιμοποιούνται στην επαγωγική στατιστική (ή στατιστική συμπερασματολογία)

Κανονική (Normal) κατανομή

Έστω **X συνεχής τυχαία μεταβλητή** που μπορεί να πάρει τιμές σε ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Λέμε ότι η **X ακολουθεί την κανονική κατανομή** με παραμέτρους **μ** και **σ²** αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο:

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < X < +\infty$$

Με **μέση τιμή** και **διακύμανση**:

$$E(X) = \mu \qquad V(X) = \sigma^2$$

Η **συνάρτηση κατανομής** είναι:

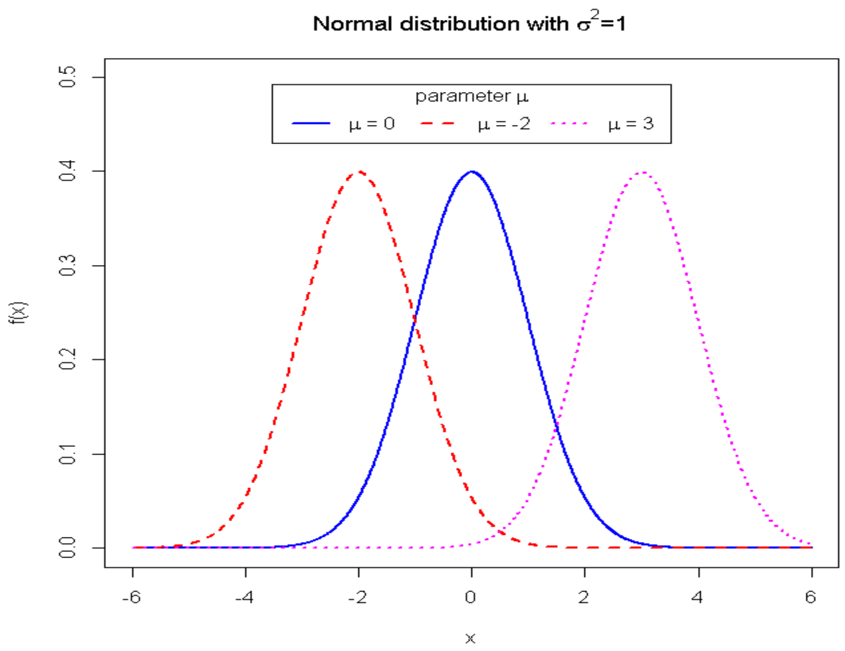
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

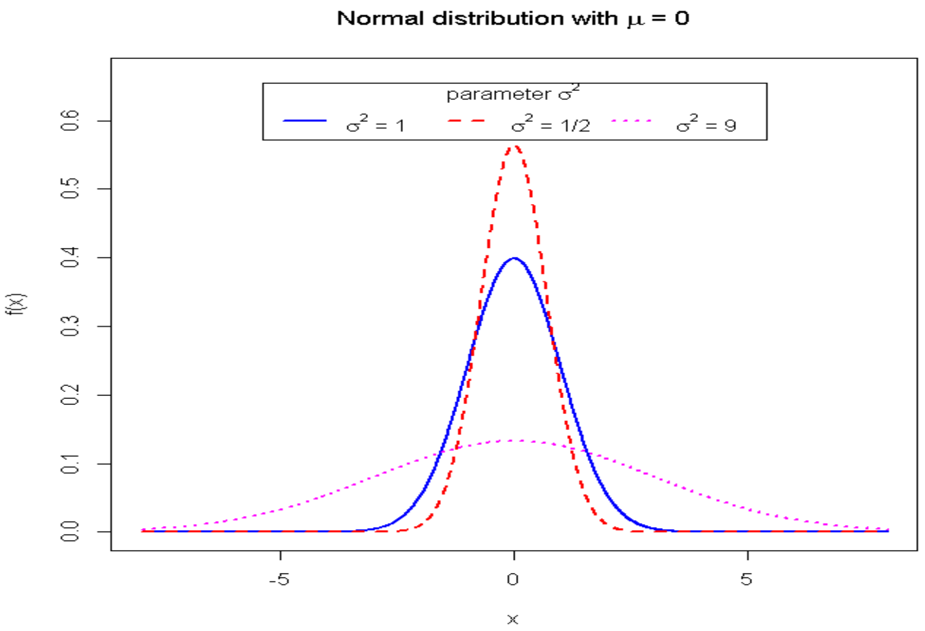
Κανονική κατανομή

Το σχήμα και η θέση της κανονικής καμπύλης **αλλάζει όταν αλλάζει ο μέσος μ** ή **η τυπική απόκλιση σ**

Η μεταβολή του **μ** μετατοπίζει την καμπύλη **αριστερά ή δεξιά**

Η μεταβολή του **σ αυξάνει** ή **μειώνει** την διασπορά

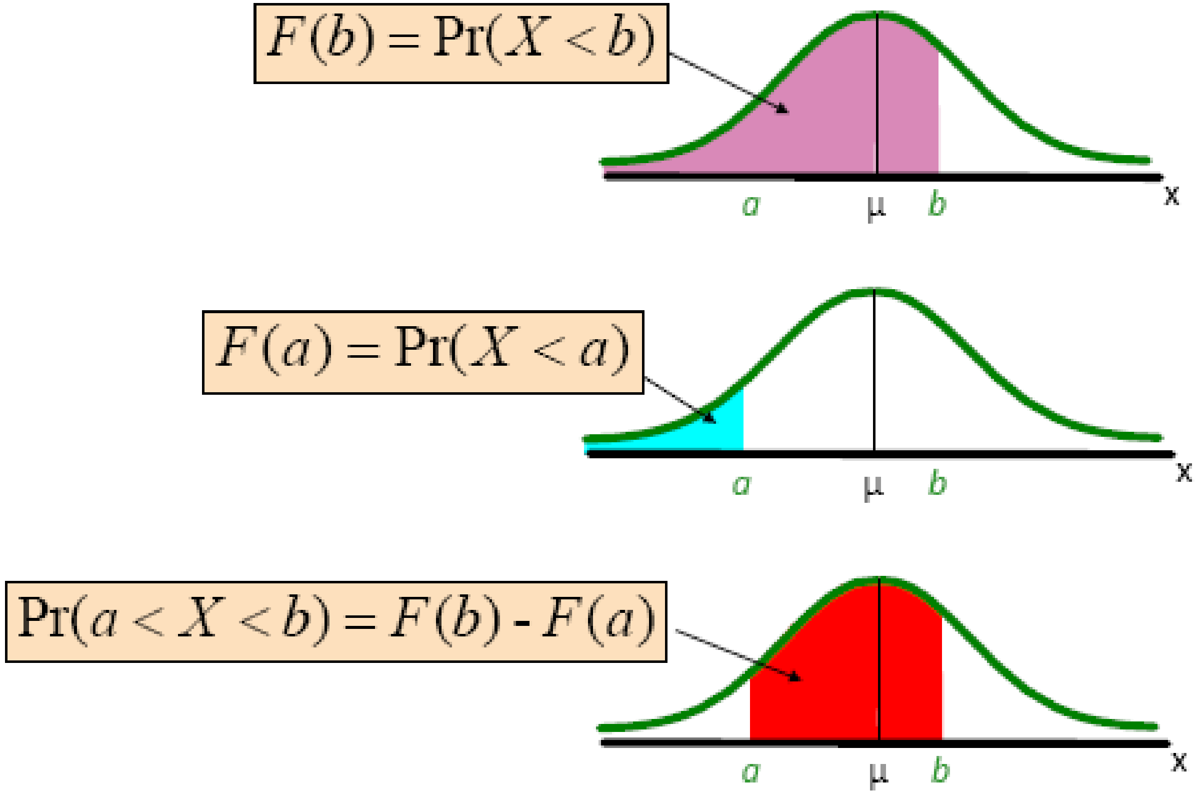


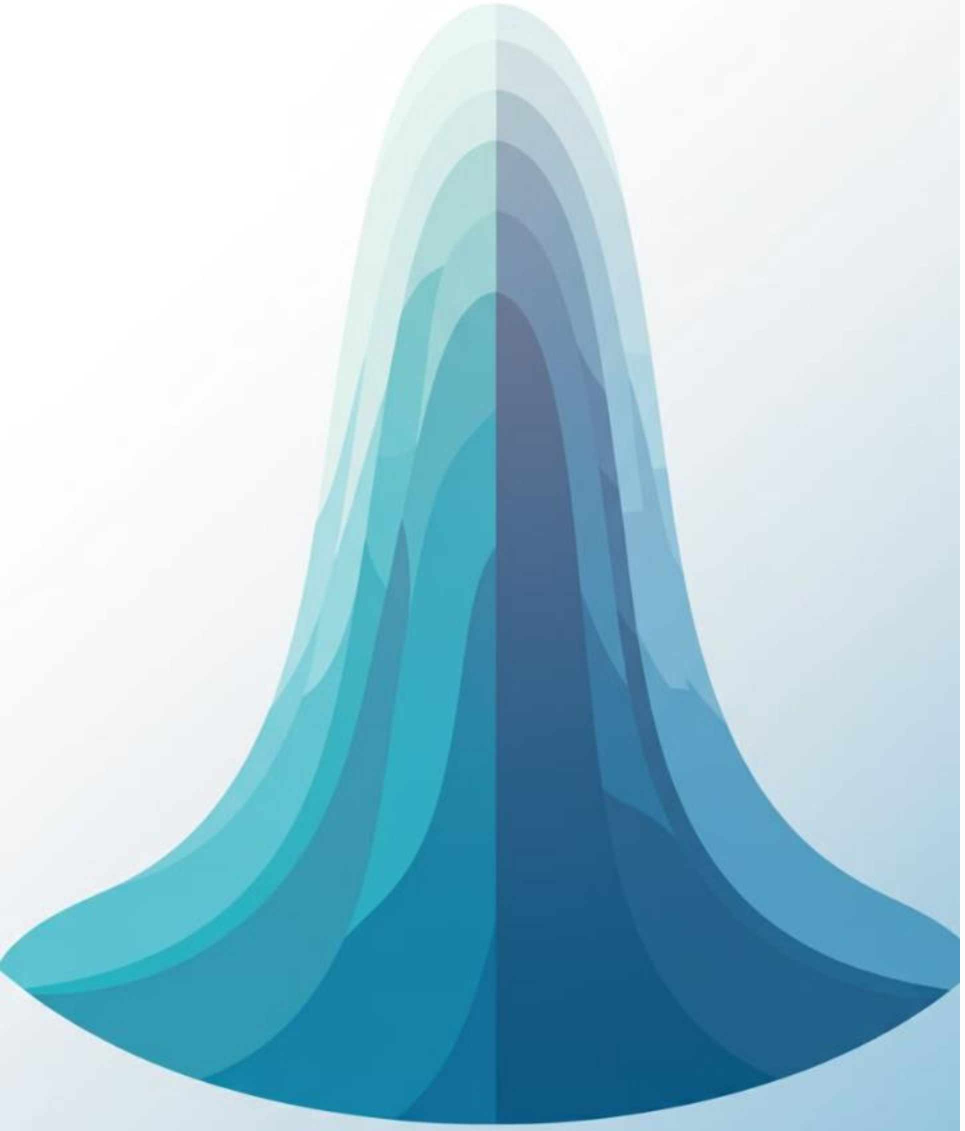


Κανονική κατανομή

Οι πιθανότητες ενός διαστήματος τιμών υπολογίζονται ως:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$





Κανονική κατανομή

Η Κανονική είναι μια ***οικογένεια*** από:

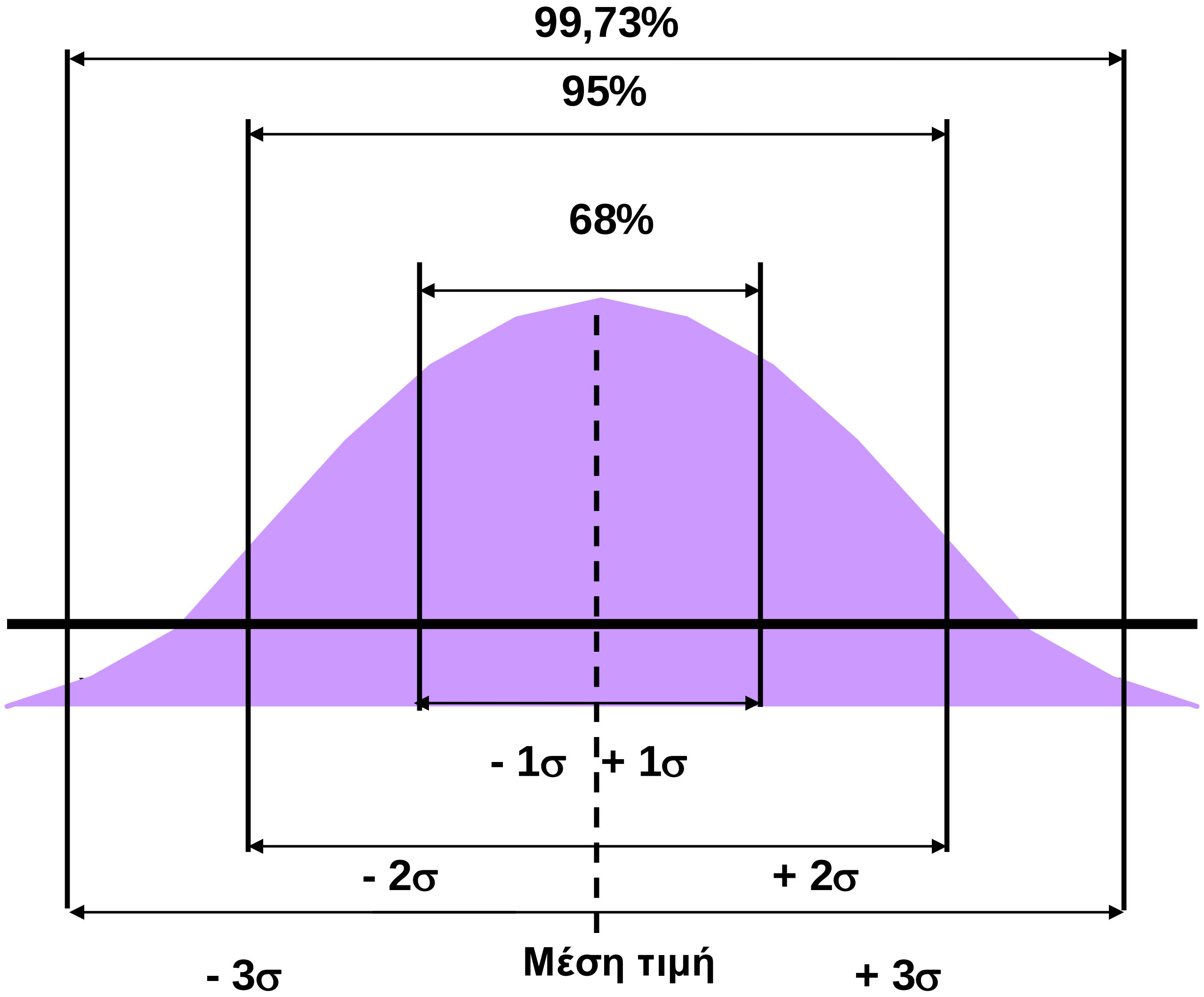
- ***Κωδωνοειδούς σχήματος*** και ***συμμετρικές*** κατανομές. Λόγω συμμετρίας, οι μισές τιμές **(50%)** βρίσκονται **αριστερά** του μέσου **μ** και οι άλλες μισές τιμές βρίσκονται **δεξιά** του μέσου **μ**

- Καθεμιά χαρακτηρίζεται από ένα διαφορετικό συνδυασμό ***μέσου, μ,*** και ***διακύμανσης, σ***^{2}. Το συμβολίζουμε ως: [**X~N(μ, σ**^{2}**)**]

- Καθεμιά είναι ***ασυμπτωτική*** ως προς τον οριζόντιο άξονα

Κανονική κατανομή

Η περιοχή που βρίσκεται **κάτω** από την κανονική καμπύλη και σε **απόσταση *k* τυπικών αποκλίσεων** *εκατέρωθεν του μέσου* **είναι σταθερή** για οποιαδήποτε κανονική κατανομή **ανεξάρτητα από το μέσο και τη διακύμανση**



Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

Η κανονική κατανομή με παραμέτρους **μ=0** και **σ^2 =1** αποκαλείται **τυποποιημένη κανονική κατανομή** και συμβολίζεται με $Z \sim N(0,1)$

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε ο μετασχηματισμός $$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

μας οδηγεί στην **τυποποιημένη κανονική κατανομή**, δηλαδή $Z \sim N(0,1)$

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

Αν $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ τότε για τον υπολογισμό της $P\left(\alpha < X \le \beta\right)$

μετασχηματίζουμε τη Χ στην τυποποιημένη κανονική κατανομή $Z \sim N\left(0,1\right)$

και εν συνεχεία κάνουμε χρήση του πίνακα ο οποίος περιέχει τις τιμές $\Phi\left(z\right) = P\left(Z \le z\right)$

Για την τυποποιημένη κανονική κατανομή Ζ ισχύουν:

$$\Phi\left(-z\right) = 1 - \Phi\left(z\right)$$

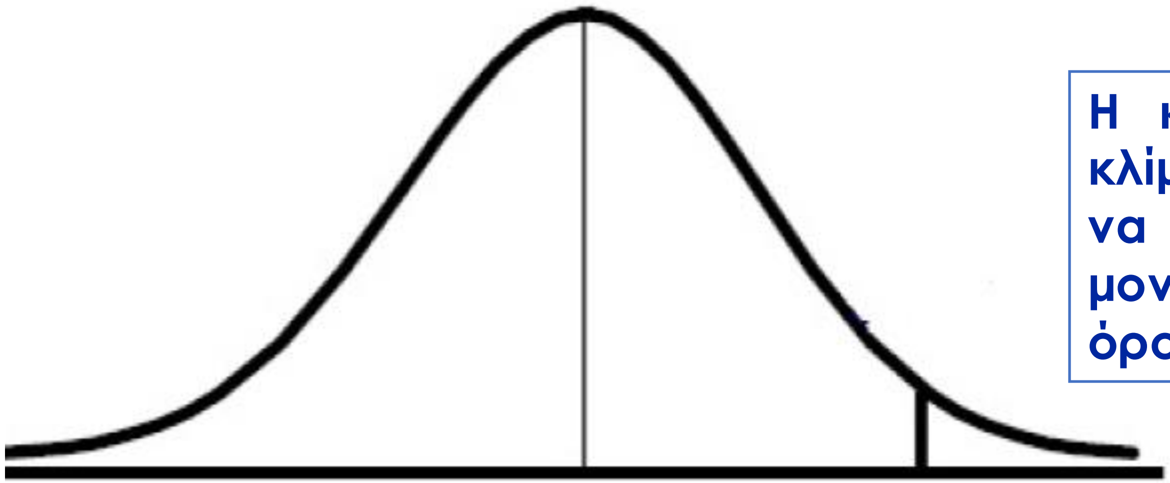
$$P\left(\alpha < Z \le \beta\right) = \Phi\left(\beta\right) - \Phi\left(\alpha\right)$$

Παράδειγμα

Αν X ~ N (100, 50^2), η τιμή του Z για το X = 200 είναι

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{200 - 100}{50} = 2$$

Αυτό σημαίνει ότι το X = 200 είναι κατά δύο τυπικές αποκλίσεις μεγαλύτερο από το μέσο όρο των 100

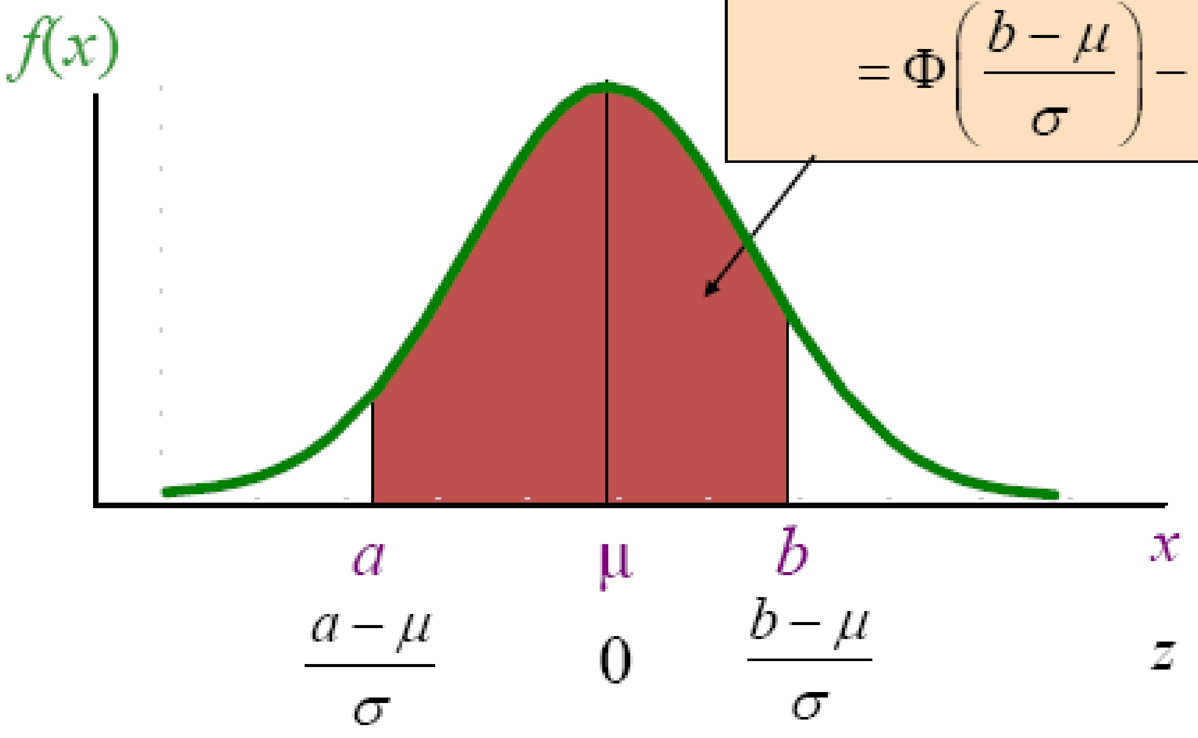


Η κατανομή παραμένει η ίδια, μόνο η κλίμακα αλλάζει. Το ίδιο πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί είτε με βάση τις αρχικές μονάδες (της X) είτε σε τυποποιημένους όρους (μονάδες Y)

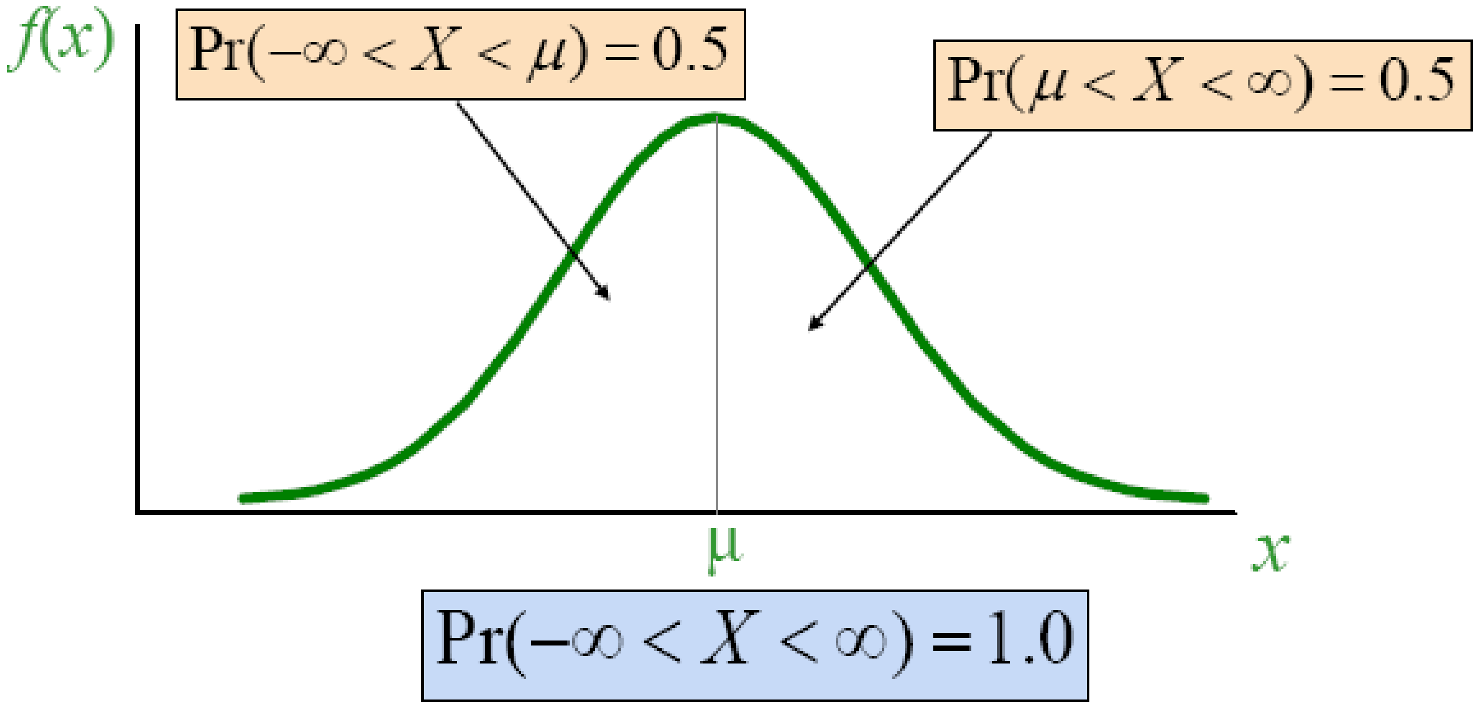
Εύρεση πιθανοτήτων της Κανονικής Κατανομής

$$\Pr(a < X < b) = \Pr\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

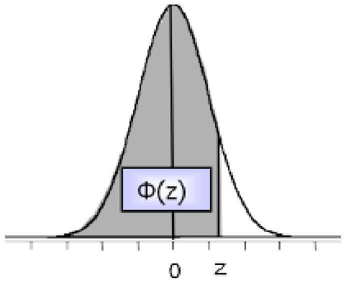


Συμμετρία της Κανονικής Κατανομής



Πίνακας της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής

Τιμές των πιθανοτήτων **Φ(z) = P(x ≤ z)** της τυποποιημένης κανονικής κατανομής **N(0, 1) για z ≥ 0. Για z < 0 ισχύει Φ(z) = 1 - Φ(-z)**

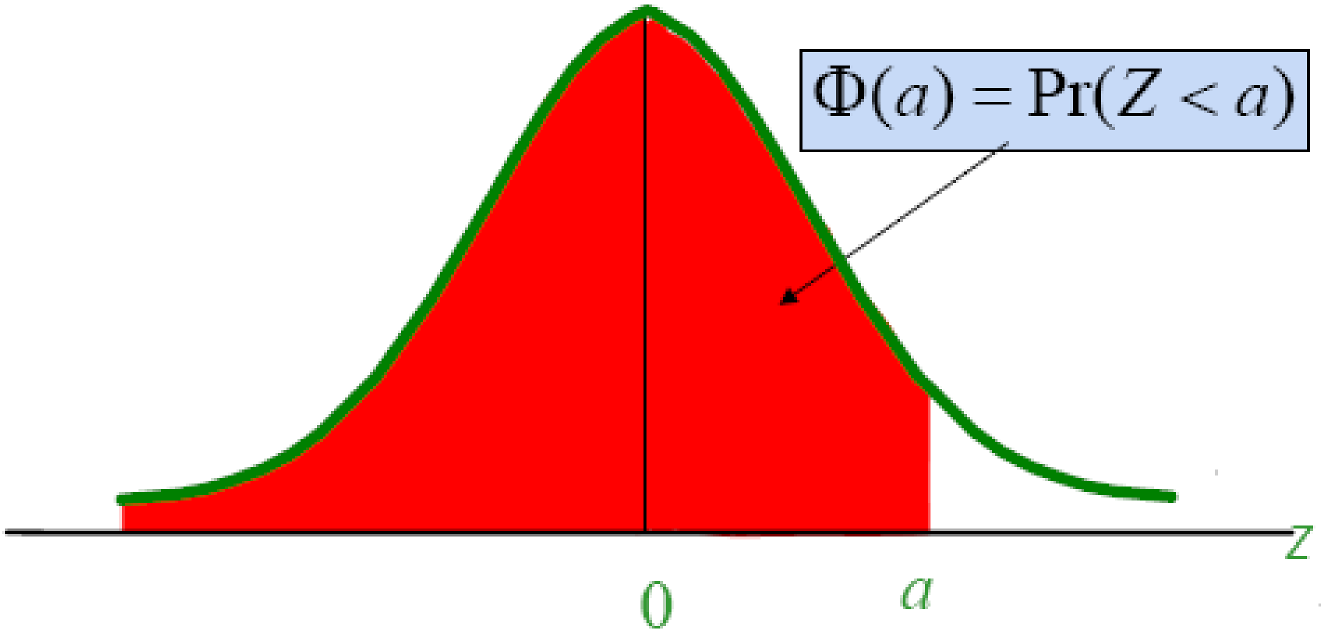


z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84850	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92786	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99897	0,99900

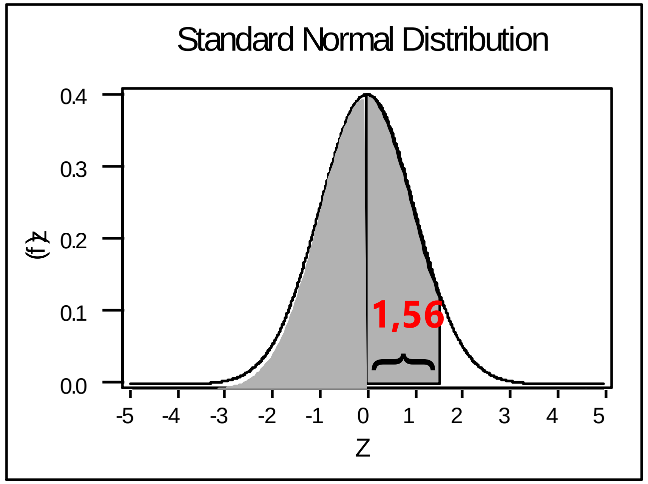
Πίνακες της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής

Οι Πίνακες δείχνουν τις πιθανότητες της αθροιστικής συνάρτησης της κανονικής κατανομής:

Για δεδομένη τιμή **α της Z**, ο πίνακας δείχνει την περιοχή κάτω από την καμπύλη από **- ∞ μέχρι το α.**



Εύρεση πιθανοτήτων της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής : P(Z < 1,56)

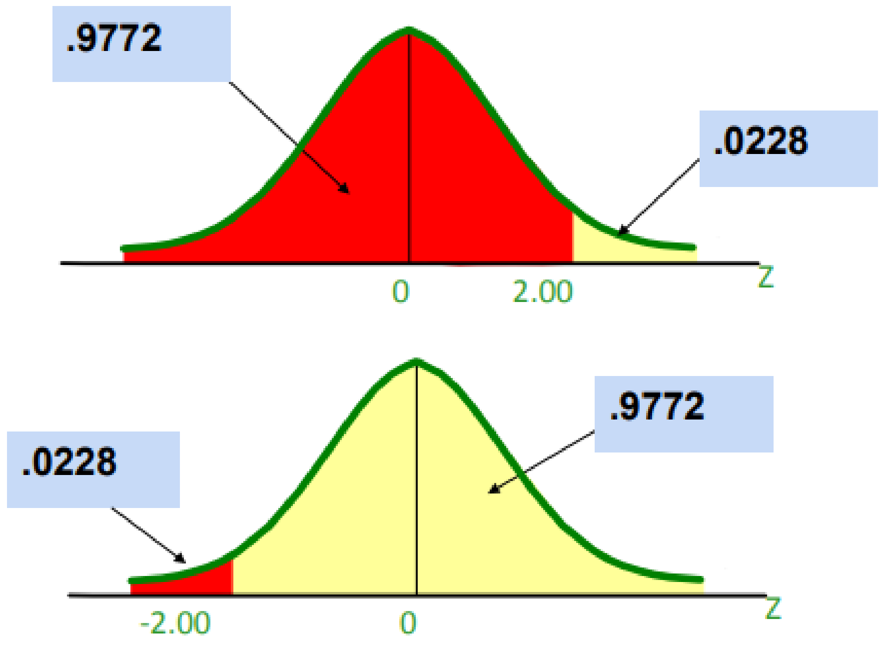


z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84850	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92786	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520

Πηγαίνουμε στη γραμμή με ένδειξη 1,5 και στη στήλη με ένδειξη 0,06 και βρίσκουμε $P(Z \leq 1{,}56) = 0{,}94062$

Εύρεση πιθανοτήτων της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής : P(Z < -2)

Θα χρησιμοποιήσουμε τη συμμετρία της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής



Z	0,00	0,01
0,0	0,50000	0,50399
0,1	0,53983	0,54380
0,2	0,57926	0,58317
0,3	0,61791	0,62172
0,4	0,65542	0,65910
0,5	0,69146	0,69497
0,6	0,72575	0,72907
0,7	0,75804	0,76115
0,8	0,78814	0,79103
0,9	0,81594	0,81859
1,0	0,84134	0,84375
1,1	0,86433	0,86650
1,2	0,88493	0,88686
1,3	0,90320	0,90490
1,4	0,91924	0,92073
1,5	0,93319	0,93448
1,6	0,94520	0,94630
1,7	0,95543	0,95637
1,8	0,96407	0,96485
1,9	0,97128	0,97193
2,0	0,97725	0,97778

$P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

Εύρεση πιθανοτήτων της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής : P(Z < -2,47)

Για να βρούμε το P(Z < -2,47):

Βρίσκουμε την τιμή του πίνακα για το 2,47

$P(Z < 2{,}47) = 0{,}9932$

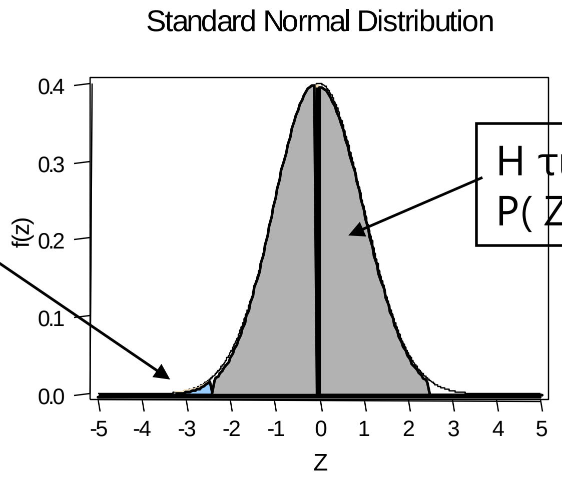
<u>Στη συνέχεια και λόγω συμμετρίας:</u>

$P(Z < -2{,}47) = 1 - P(Z < 2{,}47)$

$= 1 - 0{,}9932 = 0{,}0068$

z	...		.07	.08	.09
.			.	.	.
.			.	.	.
.			.	.	.
2.3	...	0.9909	0.9911	0.9913	
2.4	...	0.9931	**0.9932**	0.9934	
2.5	...	0.9948	0.9949	0.9951	
.					
.					
.					

Αριστερά του -2.47
P(Z < -2.47) = 1 – 0,9932
= 0,0068



Η τιμή του πίνακα για το 2,47
P(Z < 2.47) = 0,9932

Εύρεση πιθανοτήτων της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής : $P(1 \leq Z \leq 2)$

Για να βρούμε την **$P(1 \leq Z \leq 2)$**:

1. Βρίσκουμε την τιμή του πίνακα για το 2,00

   $F(2) = P(Z \leq 2{,}00) = 0{,}9772$

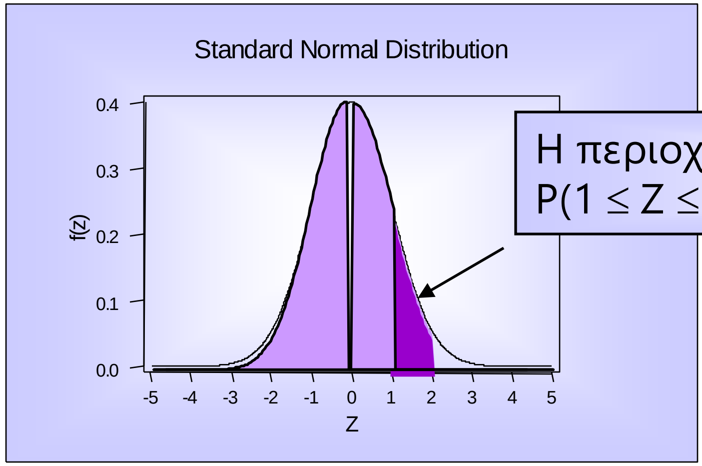
2. Βρίσκουμε την τιμή του πίνακα για το 1,00

   $F(1) = P(Z \leq 1{,}00) = 0{,}8413$

3. $P(1 \leq Z \leq 2{,}00) = P(Z \leq 2{,}00) - P(Z \leq 1{,}00)$

   $= 0{,}9772 - 0{,}8413 =$ **0,1359**

z	.00	...
.	.	
.	.	
.	.	
0.9	0.8159	...
1.0	0.8413	...
1.1	0.8643	...
.	.	
.	.	
.	.	
1.9	0.9713	...
2.0	0.9772	...
2.1	0.9821	...



Η περιοχή μεταξύ 1 και 2

$P(1 \leq Z \leq 2) = 0{,}9772 - 0{,}8413 = 0{,}1359$

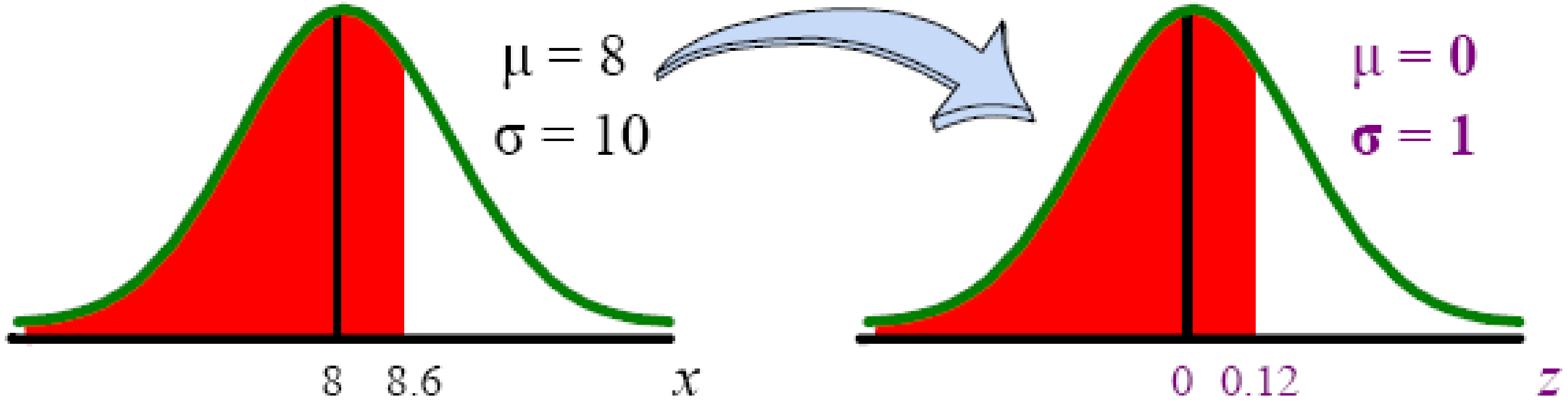
Παράδειγμα Τυποποίησης

Αν η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο 8,0 και τυπική απόκλιση 5,0 να βρεθεί η $P(X < 8{,}6)$

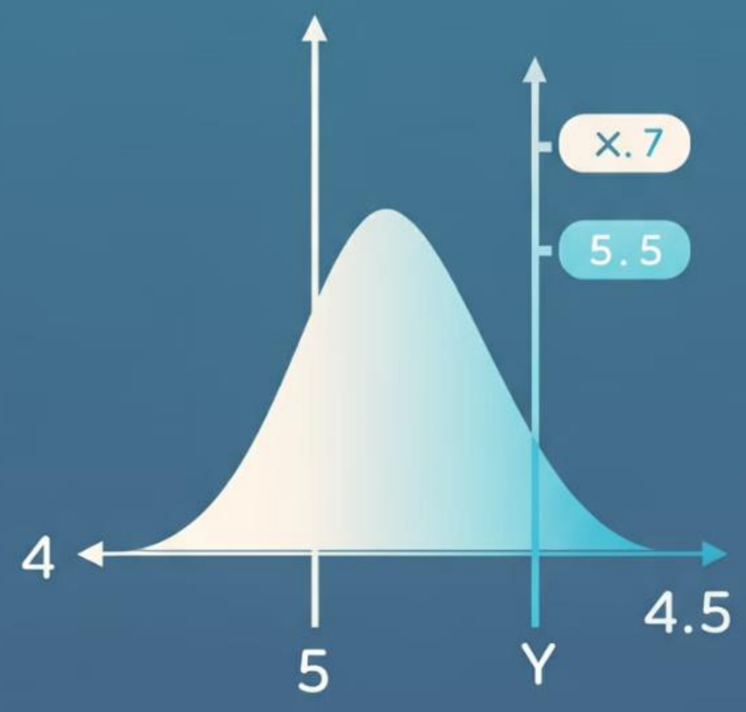
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{8{,}6 - 8}{5} = 0{,}12$$

$$\Phi(0{,}12) = 0{,}5478$$

z	0,00	0,01	0,02
0,0	0,50000	0,50399	0,50798
0,1	0,53983	0,54380	0,54776



$P(X < 8{,}6)$ $P(Z < 0{,}12)$



Παράδειγμα

Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει φούρνους μικροκυμάτων για τους οποίους ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρι την εμφάνιση της πρώτης βλάβης **ακολουθεί κανονική κατανομή** με **μέσο 4 έτη** και **τυπική απόκλιση 1.2 έτη**. Με βάση τα στοιχεία αυτά να υπολογισθούν:

1. Η **πιθανότητα** ένας φούρνος μικροκυμάτων του συγκεκριμένου εργοστασίου να μην χρειαστεί επισκευή πριν από τα **5.5 έτη** λειτουργίας του

2. Η **πιθανότητα** ένας φούρνος μικροκυμάτων να παρουσιάσει βλάβη στο διάστημα από **το 4^{ο} έως το 5^{ο}** έτος λειτουργίας του

Λύση

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο που μεσολαβεί μέχρι την εμφάνιση της πρώτης βλάβης ενός φούρνου μικροκυμάτων που κατασκευάζεται από το παραπάνω εργοστάσιο.

Δίνεται ότι : $X \sim N\left(4{,}1{,}2^2\right)$

1. $$P\left(X > 5{,}5\right) = P\left(\frac{X-4}{1{,}2} > \frac{5{,}5-4}{1{,}2}\right) = P\left(Z > \frac{1{,}5}{1{,}2}\right) = P(Z > 1{,}25) =$$
$$= 1 - P(Z < 1{,}25) = 1 - \Phi(1{,}25) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$$

2. $$P\left(4 \le X \le 5\right) = P\left(\frac{4-4}{1{,}2} \le \frac{X-4}{1{,}2} \le \frac{5-4}{1{,}2}\right) =$$
$$= P\left(0 \le Z \le 0{,}833\right) = P(Z \le 0{,}833) - P(Z < 0) =$$
$$= \Phi(0{,}833) - \Phi(0) = 0{,}7967 - 0{,}5 = 0{,}2967$$

Προσέγγιση της Διωνυμικής μέσω της Κανονικής Κατανομής

- Στη διωνυμική κατανομή είχαμε ***n ανεξάρτητες δοκιμές*** με πιθανότητα επιτυχίας **p**

- Έστω ότι η ***X*** είναι μια τ.μ. που ακολουθεί την διωνυμική κατανομή:

$$E(X) = \mu = np$$

$$Var(X) = \sigma^2 = np(1-p)$$

- Αν το ***n*** είναι μεγάλο τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως προσέγγιση την κανονική κατανομή

Προσέγγιση της Διωνυμικής μέσω της Κανονικής Κατανομής

- Η κανονική κατανομή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προσέγγιση για τη διωνυμική **αν *np*(1 – *p*) > 5**.

Τότε ισχύει επίσης:

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

- Π.χ., αν σε μια διωνυμική κατανομή θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα η τ.μ. X να βρίσκεται

μεταξύ α και β τότε

$$\Pr(a < X < b) = Pr\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} < Z < \frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Προσέγγιση της Διωνυμικής μέσω της Κανονικής Κατανομής

Παράδειγμα: Σε μια ψηφοφορία το **40%** των ψηφοφόρων υποστηρίζουν την πρόταση Α. Σε ένα δείγμα από **n = 200** ψηφοφόρους ποια η πιθανότητα οι υποστηρικτές της πρότασης Α να είναι μεταξύ **76** και **80**;

$$E(X) = \mu = np = 200(0.40) = 80$$

$$Var(X) = np(1-p) = 200(0.40)(1-0.40) = 48$$

Οπότε:

$$\Pr(76 < X < 80) = Pr\left(\frac{76-80}{\sqrt{48}} < Z < \frac{80-80}{\sqrt{48}}\right)$$

$$= \Pr\,(-0{,}58 < Z < 0)$$

$$= \Phi(0) - \Phi(-0.58)$$

$$= 0.500 - 0.2810 = 0.219$$

Η Κατανομή Χ^2

Αν οι $Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. και $Z_i \sim N(0,1)$.

Τότε: $X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim x^2(n)$

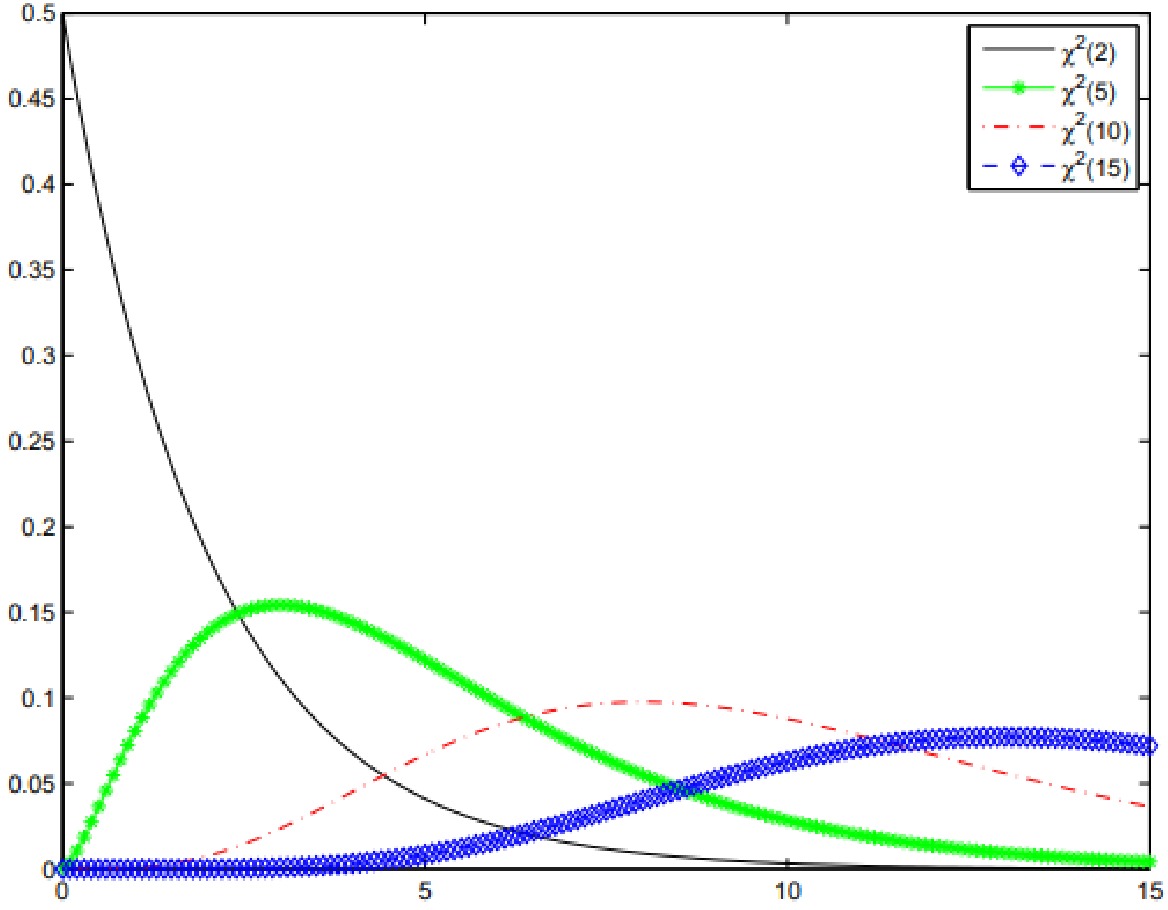
- Η Κατανομή Χ^2 έχει μόνο μια παράμετρο, το *n*, είναι πάντα θετική και θετικά ασύμμετρη

- Επιπλέον ισχύουν: $E(X) = n, \quad και$

$$Var(X) = 2n$$

$$για\ n \geq 2$$

Η Κατανομή Χ^2



Η Κατανομή t

Έστω 2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $Z \sim N(0,1)$ και $Y \sim x^2(n)$

Τότε η τ.μ.: $W = \dfrac{Z}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$

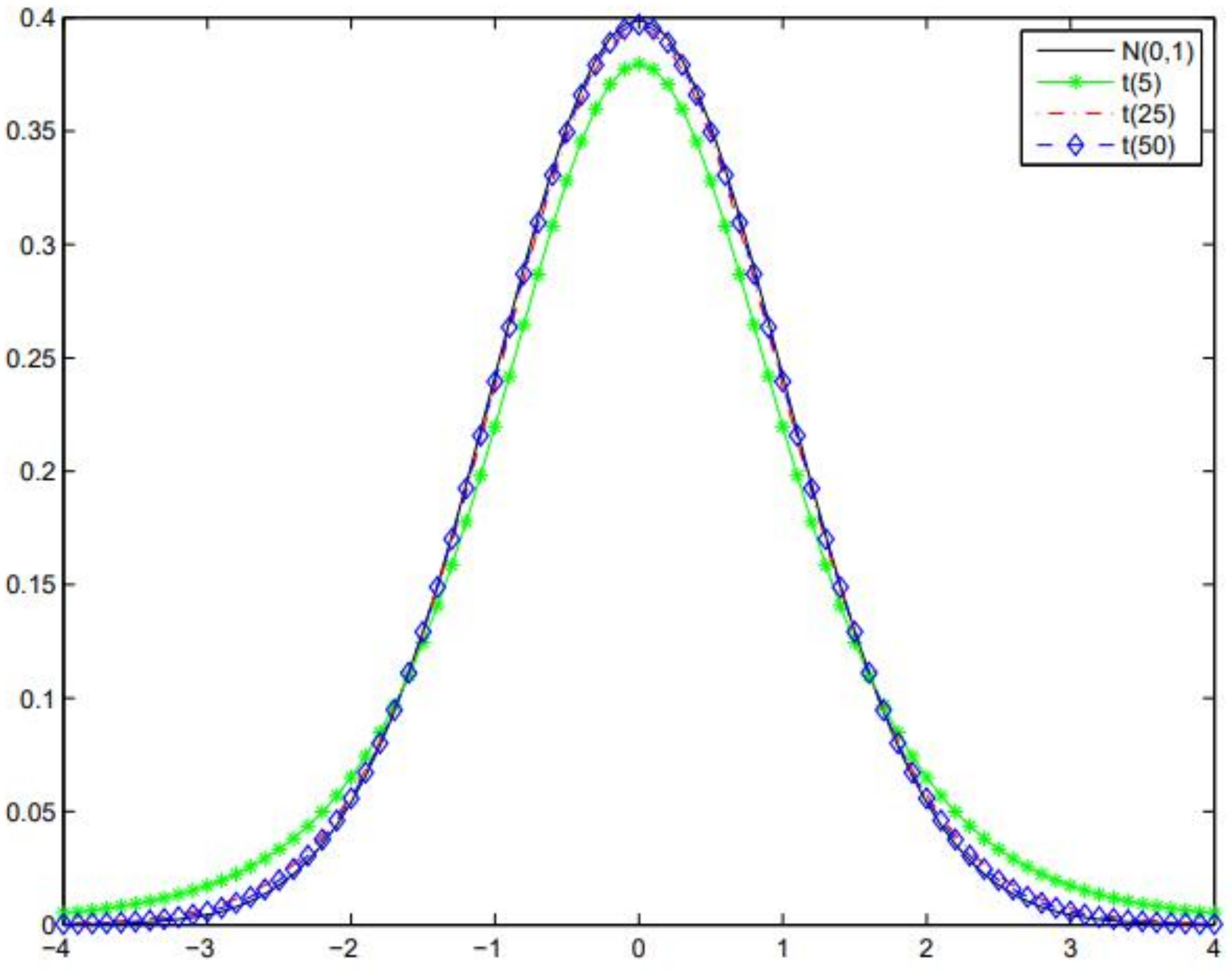
Η Κατανομή *t* έχει μόνο μια παράμετρο, το ***n***, είναι **πάντα θετική και συμμετρική** γύρω από το μηδέν

Επιπλέον ισχύουν $E(X) = 0,$ για n > 1 $Var(X) = \dfrac{n}{n-1}$ για n > 2

$$W \underset{n\to\infty}{\sim} N(0,1)$$

Η Κατανομή t

Η κατανομή t είναι μια συμμετρική κατανομή Χρησιμοποιείται για τη δημιουργία διαστημάτων εμπιστοσύνης και δοκιμής υποθέσεων όταν η τυπική απόκλιση του πληθυσμού είναι άγνωστη



Η Κατανομή F

Έστω **X** και **Y** δύο ανεξάρτητες **τυχαίες μεταβλητές** που κατανέμονται ως $x^2 : X \sim x^2(n)$ και $Y \sim x^2(m)$

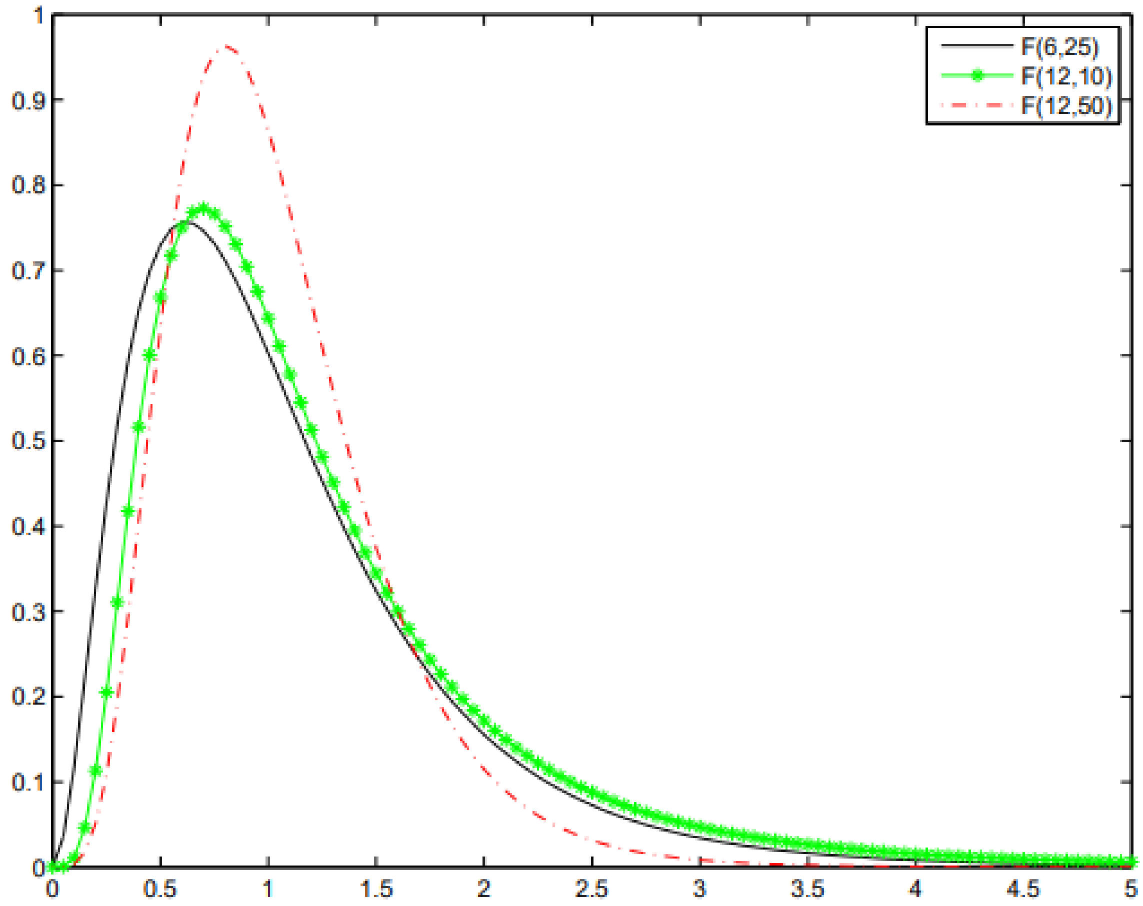
Τότε: $$W = \frac{X/n}{Y/m} \sim F(n,m)$$

Η Κατανομή ***F*** έχει δύο παραμέτρους, τα ***n*** και ***m*** (οι βαθμοί ελευθερίας του αριθμητή και του παρανομαστή), είναι πάντα **θετική** και **θετικά ασύμμετρη**.

Επιπλέον ισχύει ότι αν $W \sim F(n,m)$

$$E(W) = \frac{m}{1-m}, for\ m > 2.$$

Η Κατανομή F


F(6,25)
F(12,10)
F(12,50)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Περισσότερη μελέτη και εξάσκηση

Από το βιβλίο του κ. Θ. Παπαδόγγονα, «Ποσοτικές μέθοδοι ανάλυσης επιχειρηματικών αποφάσεων»

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και ασκήσεις, σελίδες: 88-93 και 384-397

Βιβλιογραφικές αναφορές

Παπαδόγγονας, Θ.

«Ποσοτικές μέθοδοι ανάλυσης επιχειρηματικών αποφάσεων", 2η Έκδοση, Εκδόσεις Τσότρας, 2022