ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΘΟΔΩΡΟΣ ΠΑΠΑΔΟΓΓΟΝΑΣ

Σετ Διαφανειών 6: Έλεγχοι υποθέσεων

Έλεγχοι υποθέσεων

- Πολύ σημαντικό εργαλείο της Επαγωγικής Στατιστικής
- Πλαίσιο για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τις τιμές των παραμέτρων ενός πληθυσμού με βάση τις παρατηρήσεις ενός τυχαίου δείγματος.
- Χρησιμοποιείται για να προσδιορίσουμε εάν μια υπόθεση σχετικά με την τιμή μιας παραμέτρου είναι αβάσιμη και πρέπει να απορριφθεί ή είναι βάσιμη και δεν πρέπει να απορριφθεί.

Στατιστικές υποθέσεις

- Μια στατιστική υπόθεση είναι ένας ισχυρισμός σχετικά με την τιμή μιας παραμέτρου ενός ερευνώμενου πληθυσμού.
- Οι στατιστικές υποθέσεις διατυπώνονται πάντα σε ζεύγη.
- Η πρώτη από τις δυο υποθέσεις $\mathbf{H_0}$ ονομάζεται **μηδενική υπόθεση** και η δεύτερη υπόθεση $\mathbf{H_1}$ ονομάζεται **εναλλακτική υπόθεση**.
- **Μηδενική υπόθεση**: η διαφορά μεταξύ της εκτίμησης μιας παραμέτρου που υπολογίσαμε και μιας υποθετικής τιμής της παραμέτρου του πληθυσμού είναι στατιστικά ασήμαντη.

Στατιστικές υποθέσεις (συν.)

- Για να ελέγξουμε αν η $\mathbf{H_0}$ είναι αληθής ή μη αληθής εφαρμόζουμε το κατάλληλο στατιστικό κριτήριο με τη βοήθεια του οποίου είτε θα την απορρίψουμε είτε δεν θα την απορρίψουμε.
- Αν ο έλεγχος υποδεικνύει την απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης τότε αποδεχόμαστε την εναλλακτική υπόθεση H_1, ενώ αν γίνει δεκτή η H_0 τότε η H_1 απορρίπτεται.
- Αν η διαφορά είναι στατιστικά σημαντική αυτό σημαίνει ότι η διαφορά αυτή είναι πραγματική και δεν οφείλεται στο στοιχείο της τυχαιότητας της δειγματοληψίας.

Διαδικασία ελέγχου υποθέσεων

Εξειδίκευση των στατιστικών υποθέσεων

- Ως μηδενική υπόθεση H_0 θέτουμε την σχέση ανάμεσα στην τιμή της στατιστικής συνάρτησης του δείγματος και μιας υποθετικής τιμής παραμέτρου του πληθυσμού.
- Η μηδενική υπόθεση μπορεί να είναι απλή, της μορφής H_0: $\theta = \theta_0$ (για παράδειγμα: η ελαστικότητα ζήτησης για βιβλία είναι ίση με -1), είτε σύνθετη, της μορφής H_0: $\theta \leq \theta_0$ ή H_0: $\theta \geq \theta_0$.
- Στην συνέχεια ορίζουμε την εναλλακτική υπόθεση H_1 η οποία είναι πάντοτε η αντίθετη της μηδενικής υπόθεσης (για παράδειγμα: η ελαστικότητα ζήτησης για βιβλία είναι διαφορετική του -1).

Εξειδίκευση των στατιστικών υποθέσεων (συν.)

- Οι πιθανές εναλλακτικές διατυπώσεις της μηδενικής και της εναλλακτικής υπόθεσης ενός στατιστικού ελέγχου είναι οι εξής:

$H_0: \theta \geq \theta_0$ $H_1: \theta < \theta_0$	$H_0: \theta \leq \theta_0$ $H_1: \theta > \theta_0$	$H_0: \theta = \theta_0$ $H_1: \theta \neq \theta_0$
Μονόπλευρος (αριστερόπλευρος) έλεγχος	Μονόπλευρος (δεξιόπλευρος) έλεγχος	Δίπλευρος (αμφίπλευρος) έλεγχος

Καθορισμός του επιπέδου σημαντικότητας

- Το επιλεγόμενο επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας είναι μια μικρή πιθανότητα που συμβολίζεται με α και εκφράζει την μέγιστη αποδεκτή πιθανότητα να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση παρόλο που αυτή είναι αληθής.
- Τα συνηθέστερα χρησιμοποιούμενα επίπεδα στατιστικής σημαντικότητας είναι 0,01 (1%), 0,05 (5%), ή 0,10 (10%).

Εξειδίκευση της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου

- Είναι μία κατάλληλη συνάρτηση, οι τιμές της οποίας προκύπτουν από τα δεδομένα του δείγματός μας για το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας α και χρησιμοποιούνται για την απόρριψη ή την μη απόρριψη της H_0.
- Οι τιμές της συνάρτησης αυτής στο επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας α προσδιορίζουν την **περιοχή απόρριψης** της μηδενικής υπόθεσης H_0.
- Η στατιστική συνάρτηση ελέγχου έχει την εξής μορφή:

$$\boldsymbol{\Sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\eta\sigma\eta\ E\lambda\epsilon\gamma\chi o\upsilon} = \frac{\boldsymbol{\delta\epsilon\iota\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\eta\ \epsilon\kappa\tau\iota\mu\eta\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ \pi\alpha\rho\alpha\mu\epsilon\tau\rho o\upsilon - \upsilon\pi o\theta\epsilon\tau\iota\kappa\eta\ \tau\iota\mu\eta}}{\boldsymbol{\tau\upsilon\pi\iota\kappa \acute{o}\ \sigma\varphi\alpha\lambda\mu\alpha\ \tau\eta\varsigma\ \epsilon\kappa\tau\iota\mu\eta\sigma\eta\varsigma}}$$

Εξαγωγή συμπεράσματος

- Εάν η τιμή της συνάρτησης ελέγχου βρίσκεται εντός της περιοχής απόρριψης, απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση H_0 και αποδεχόμαστε την εναλλακτική υπόθεση H_1.
- Εάν η τιμή της συνάρτησης ελέγχου βρίσκεται εκτός της περιοχής απόρριψης, δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση H_0.

Πραγματικό επίπεδο σημαντικότητας

- Ένα άλλο σημαντικό μέγεθος κατά την διενέργεια ελέγχων στατιστικών υποθέσεων ονομάζεται **πραγματικό επίπεδο σημαντικότητας**.
- Ορίζεται ως η πιθανότητα η στατιστική συνάρτηση ελέγχου να λάβει, υπό την μηδενική υπόθεση H_0, μια τιμή τόσο ή περισσότερο ακραία από αυτή που είχε για το συγκεκριμένο δείγμα.
- Το πραγματικό επίπεδο σημαντικότητας συμβολίζεται ως *p-value.*
- Με βάση το *p-value* απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση H_0 αν το *p-value* είναι μικρότερο από το επίπεδο σημαντικότητας α που έχουμε θέσει.

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού με γνωστή διακύμανση

- Θέλουμε να ελέγξουμε αν ο μέσος του πληθυσμού είναι ίσος με μία συγκεκριμένη τιμή της κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης του δείγματος σε επίπεδο σημαντικότητας α, θέλουμε δηλαδή να ελέγξουμε την εξής υπόθεση:

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{array}}$$

- Χρησιμοποιούμε τη στατιστική συνάρτηση ελέγχου:

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}$$

που ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή N(0,1).

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού με γνωστή διακύμανση (συν.)

- Από τα δεδομένα του δείγματος υπολογίζουμε την τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου:

$$\boxed{Z^{*} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}$$

- Μετά εφαρμόζουμε το κριτήριο απόρριψης ή μη απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης, δηλαδή συγκρίνουμε την ανωτέρω τιμή της συνάρτησης ελέγχου με την θεωρητική τιμή της Z σε επίπεδο σημαντικότητας α. Αν:

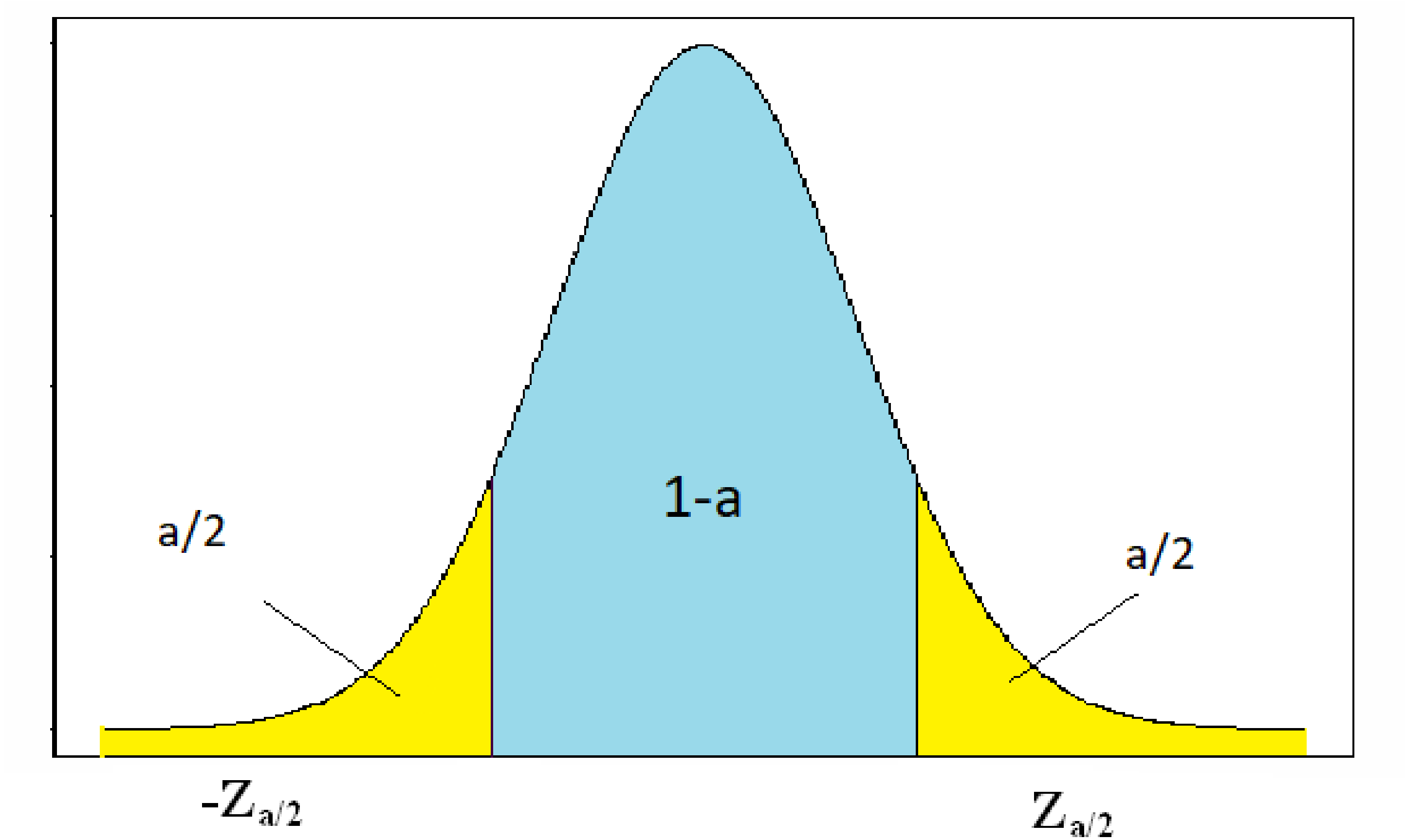
$$Z^* > Z_{\alpha/2} \text{ ή } Z^* < -Z_{\alpha/2}$$

ή, ισοδύναμα, $|Z^*| > Z_{\alpha/2}$

- τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α ή 100α%.

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού (γνωστή σ^2)

1) Αμφίπλευρος Έλεγχος

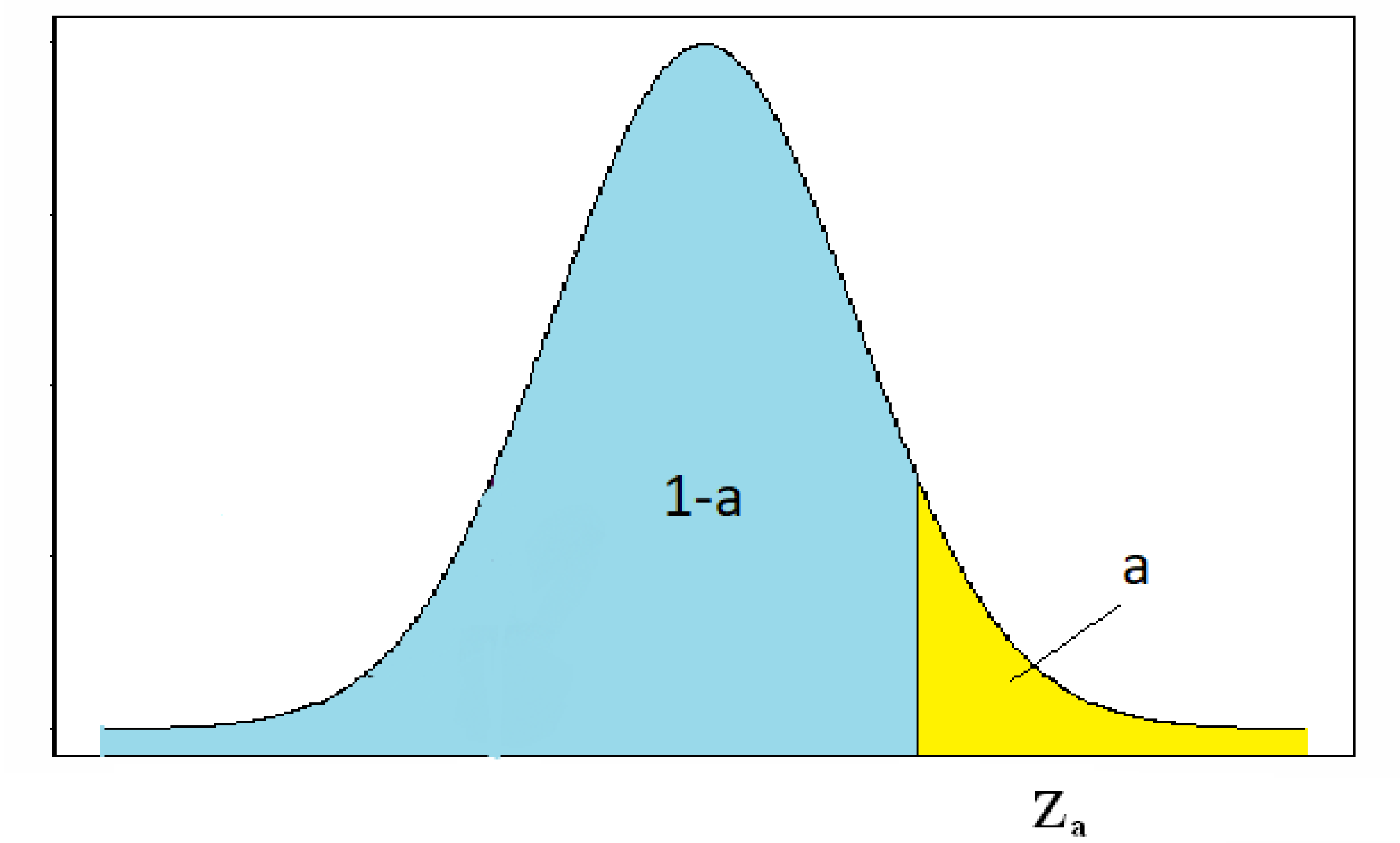


Με κίτρινο χρώμα η περιοχή απόρριψης.

Απορρίπτουμε την H_0 αν $Z^*>Z_{\alpha/2}$ ή αν $Z^*<-Z_{\alpha/2}$

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού (γνωστή σ^2)

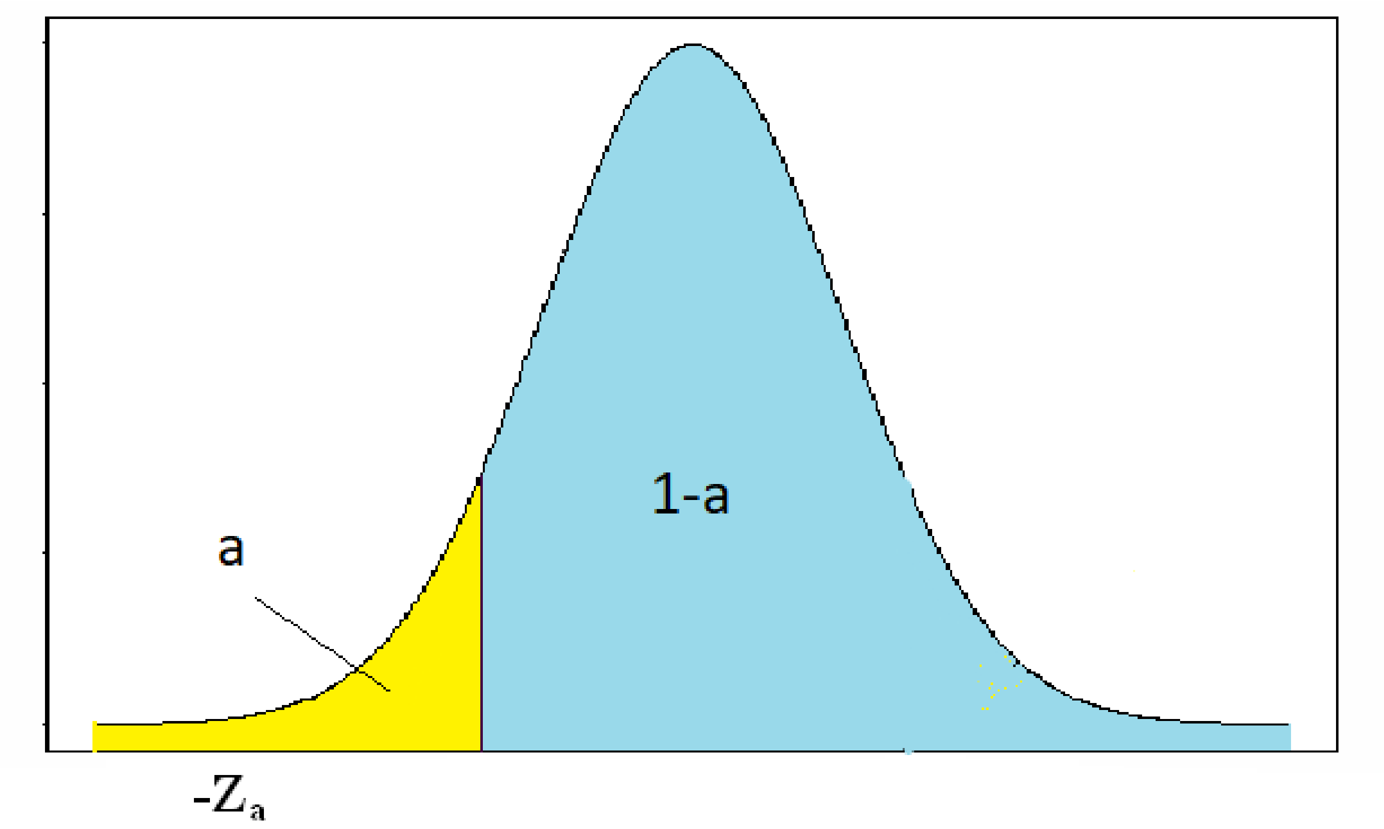
2) Δεξιόπλευρος Έλεγχος



Απορρίπτουμε την H_0 αν $Z^* > Z_\alpha$

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού (γνωστή σ^2)

3) Αριστερόπλευρος Έλεγχος



Απορρίπτουμε την H_0 αν $Z^* < -Z_\alpha$

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού με άγνωστη διακύμανση

- Θέλουμε να ελέγξουμε αν ο μέσος του πληθυσμού είναι ίσος με μία συγκεκριμένη τιμή της κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης του δείγματος σε επίπεδο σημαντικότητας *α*, θέλουμε δηλαδή να ελέγξουμε την εξής υπόθεση:

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{array}}$$

- Χρησιμοποιούμε τη στατιστική συνάρτηση ελέγχου:

$$\boxed{t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}}$$

που ακολουθεί την κατανομή *t* με *n - 1* βαθμούς ελευθερίας (όπου *S* είναι η δειγματική τυπική απόκλιση, την οποία υπολογίζουμε από την δειγματική διακύμανση).

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού με άγνωστη διακύμανση (συν.)

- Από τα δεδομένα του δείγματος υπολογίζουμε την τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου:

$$\boxed{t_{n-1}^{*} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}}$$

- Μετά εφαρμόζουμε το κριτήριο απόρριψης ή μη απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης, δηλαδή συγκρίνουμε την ανωτέρω τιμή της συνάρτησης ελέγχου με την θεωρητική τιμή της *t* σε επίπεδο σημαντικότητας *α.* Αν:

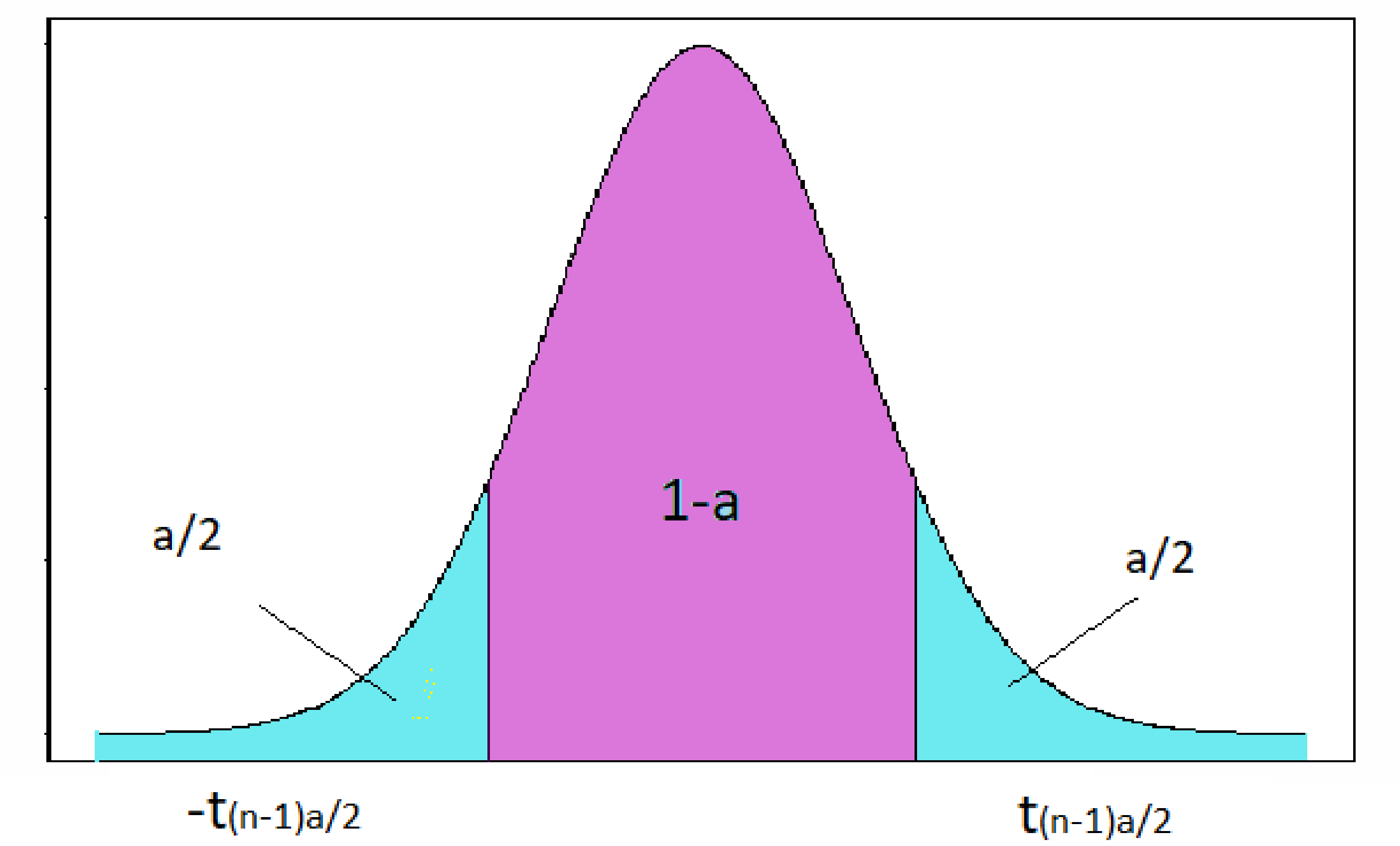
$$t^* > t_{(n-1),\, \alpha/2} \text{ ή } t^* < -t_{(n-1),\, \alpha/2}$$

ή, ισοδύναμα, $\left|t^*\right| > t_{(n-1),\alpha/2}$

- τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α ή 100α%.

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού (άγνωστη σ^2)

<u>1) Αμφίπλευρος Έλεγχος</u>

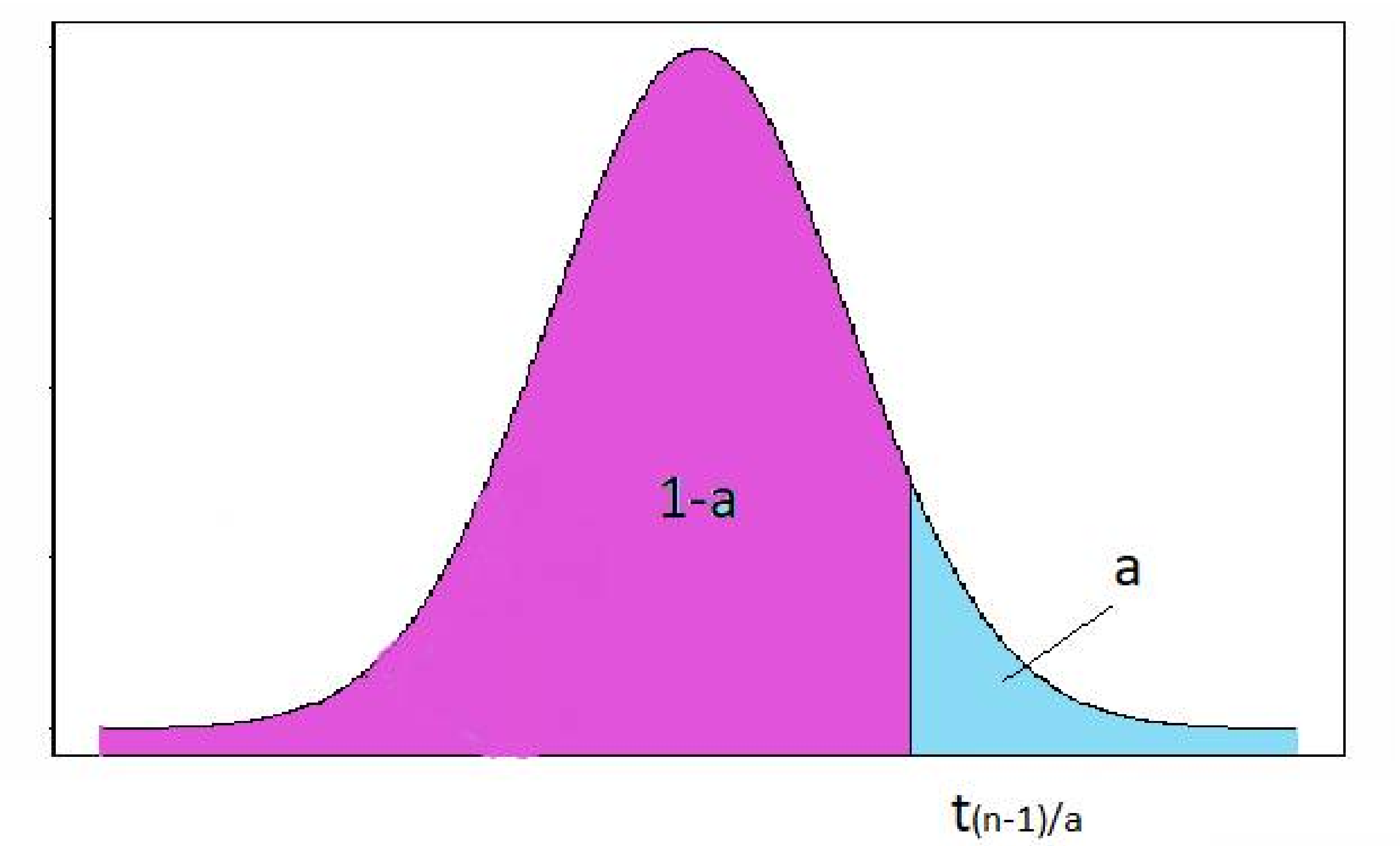


Απορρίπτουμε την H_0 αν:

$t^*_{n-1} > t_{(n-1)(a/2)}$ ή αν $t^*_{n-1} < -t_{(n-1)(a/2)}$

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού (άγνωστη $σ^2$)

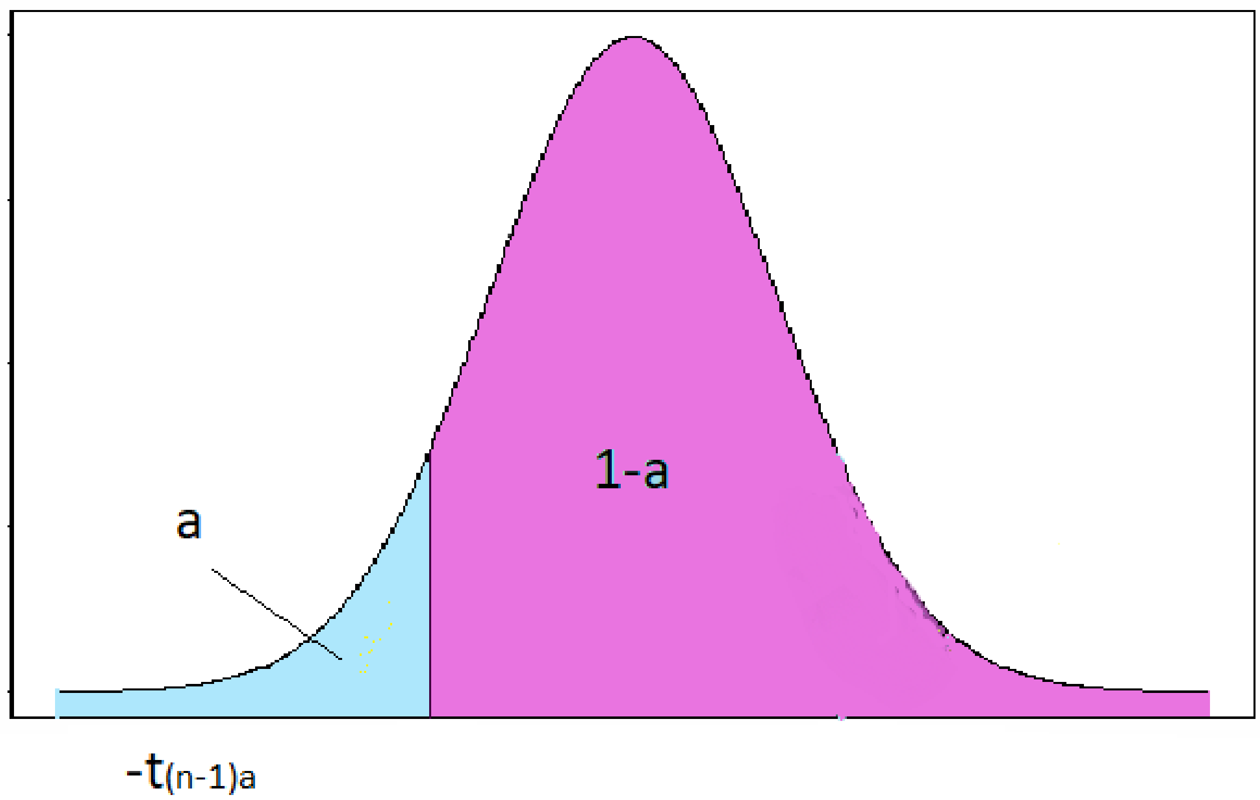
2) Δεξιόπλευρος Έλεγχος



Απορρίπτουμε την H_0 αν $t^*_{n-1} > t_{(n-1)a}$

ΕΥ για το μέσο κανονικού πληθυσμού (άγνωστη σ^2)

3) Αριστερόπλευρος Έλεγχος



Απορρίπτουμε την H_0 αν $t^*_{n-1} < -t_{(n-1)a}$

Παράδειγμα

- Ένα εργοστάσιο παρασκευής παγωτών παράγει τυποποιημένα παγωτά των οποίων το καθαρό βάρος ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μ = 500 γραμμάρια και τυπική απόκλιση σ = 8 γραμμάρια.
- Για την διασφάλιση των προδιαγραφών βάρους του προϊόντος αυτού πραγματοποιούνται συχνοί δειγματοληπτικοί έλεγχοι.
- Από ένα τυχαίο δείγμα 16 παρατηρήσεων βρέθηκε ότι $\bar{X} = 495$ γραμμάρια. Με βάση την πληροφορία αυτή να ελεγχθεί σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% αν ικανοποιούνται οι προδιαγραφές βάρους του προϊόντος.

Λύση

Ως H_0 θέτουμε την σχέση ανάμεσα στην τιμή της στατιστικής συνάρτησης του δείγματος και της προδιαγραφής μ_0 = 500 :

$$H_0\colon \mu = 500$$
$$H_1\colon \mu \neq 500$$

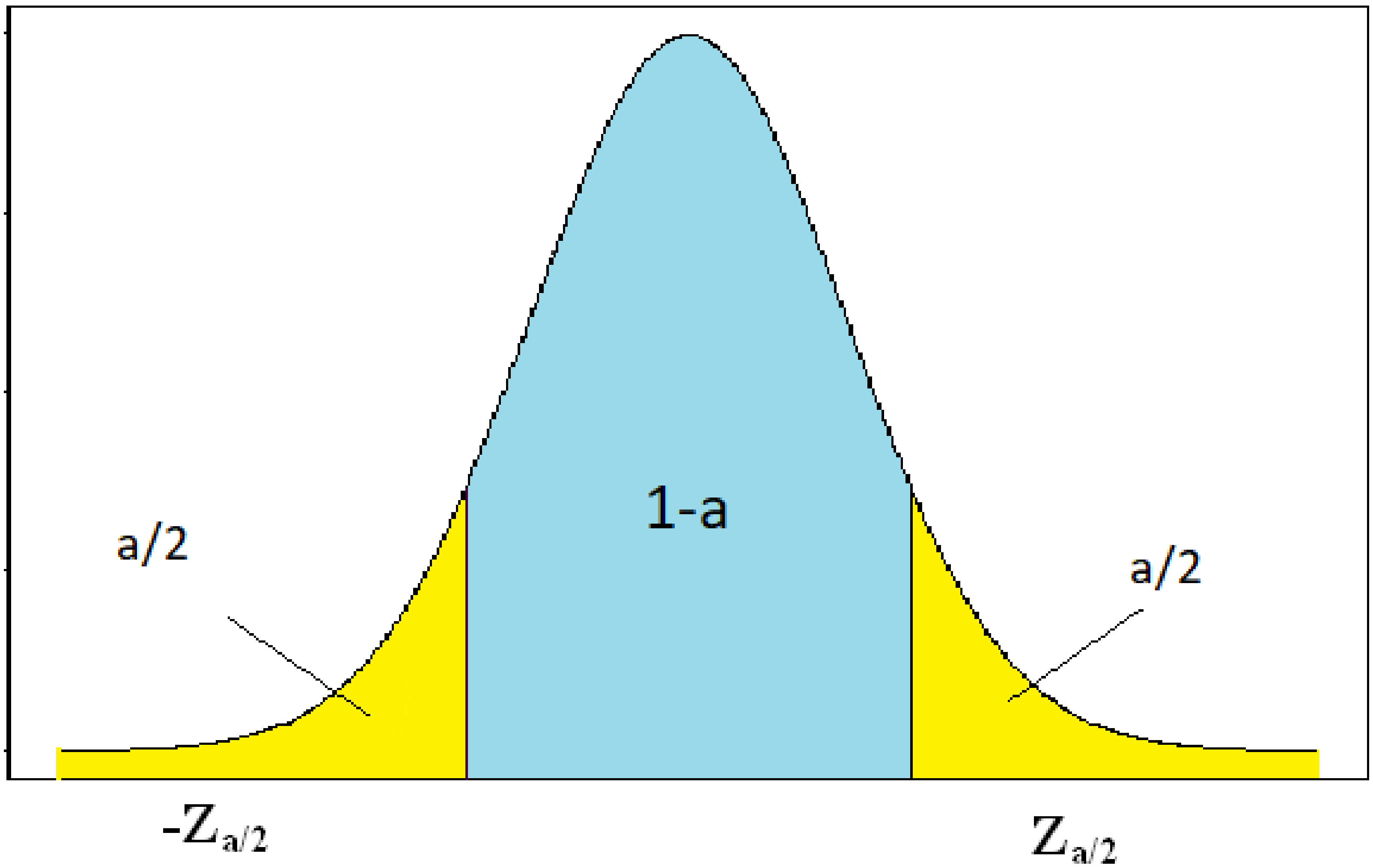
Από τα δεδομένα του δείγματος υπολογίζουμε την τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου:

$$Z^* = \frac{495 - 500}{8/\sqrt{16}} = -2{,}5$$

Στη συνέχεια συγκρίνουμε την τιμή της συνάρτησης ελέγχου με την θεωρητική τιμή της τυποποιημένης κανονικής κατανομής σε επίπεδο σημαντικότητας 0,5 και βρίσκουμε ότι:

$$Z^* = -2{,}5 < -Z_{\alpha/2} = -1{,}96$$

Επομένως η H_0 απορρίπτεται, δηλαδή σε α = 0,05 προκύπτουν ενδείξεις ότι δεν ικανοποιούνται οι προδιαγραφές.


1-a
a/2
a/2
-Z a/2
Z a/2

ΕΥ για τη διαφορά δύο μέσων από κανονικούς πληθυσμούς με γνωστές διακυμάνσεις

- Θέλουμε να ελέγξουμε την εξής υπόθεση:

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0: \mu_X = \mu_Y \\ H_1: \mu_X \neq \mu_Y \end{array}}$$

- Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση ελέγχου είναι:

$$\boxed{Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{(\sigma_X^2/n_X) + (\sigma_Y^2/n_Y)}}}$$

που ακολουθεί την που ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή N(0,1).

ΕΥ για τη διαφορά δύο μέσων από κανονικούς πληθυσμούς με γνωστές διακυμάνσεις (συν.)

- Από τα δεδομένα του δείγματος υπολογίζουμε την τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου:

$$\boxed{Z^* = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{(\sigma_X^2/n_X) + (\sigma_Y^2/n_Y)}}}$$

- Μετά εφαρμόζουμε το κριτήριο απόρριψης ή μη απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης, δηλαδή συγκρίνουμε την ανωτέρω τιμή της συνάρτησης ελέγχου με την θεωρητική τιμή της *t* σε επίπεδο σημαντικότητας *α*. Αν:

$$Z^* > Z_{\alpha/2} \text{ ή } Z^* < -Z_{\alpha/2}$$

ή, ισοδύναμα, $|Z^*| > Z_{\alpha/2}$

- τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α ή 100α%.