ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΘΟΔΩΡΟΣ ΠΑΠΑΔΟΓΓΟΝΑΣ

Σετ Διαφανειών 4: Κατανομές συνεχών τυχαίων μεταβλητών - Κανονική Κατανομή - Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή – Κατανομή t – Κατανομή X^2 – Κατανομή F

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές
  – παίρνουν τιμές σε ένα (συνεχές) διάστημα τιμών (π.χ. το βάρος ενός ατόμου, οι τιμές των μετοχών, κ.ά.)
- Συναρτήσεις πιθανότητας συνεχών τυχαίων μεταβλητών
  – Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x)
  – Συνάρτηση κατανομής F(x) (αθροιστική)
- Επειδή υπάρχει άπειρος αριθμός τιμών, η πιθανότητα κάθε μεμονωμένης τιμής είναι ουσιαστικά 0. Έτσι, μπορούμε να καθορίσουμε την πιθανότητα ενός εύρους τιμών μόνο.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

1. $$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

2. $$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

3. $f(x) \ge 0$ για κάθε x

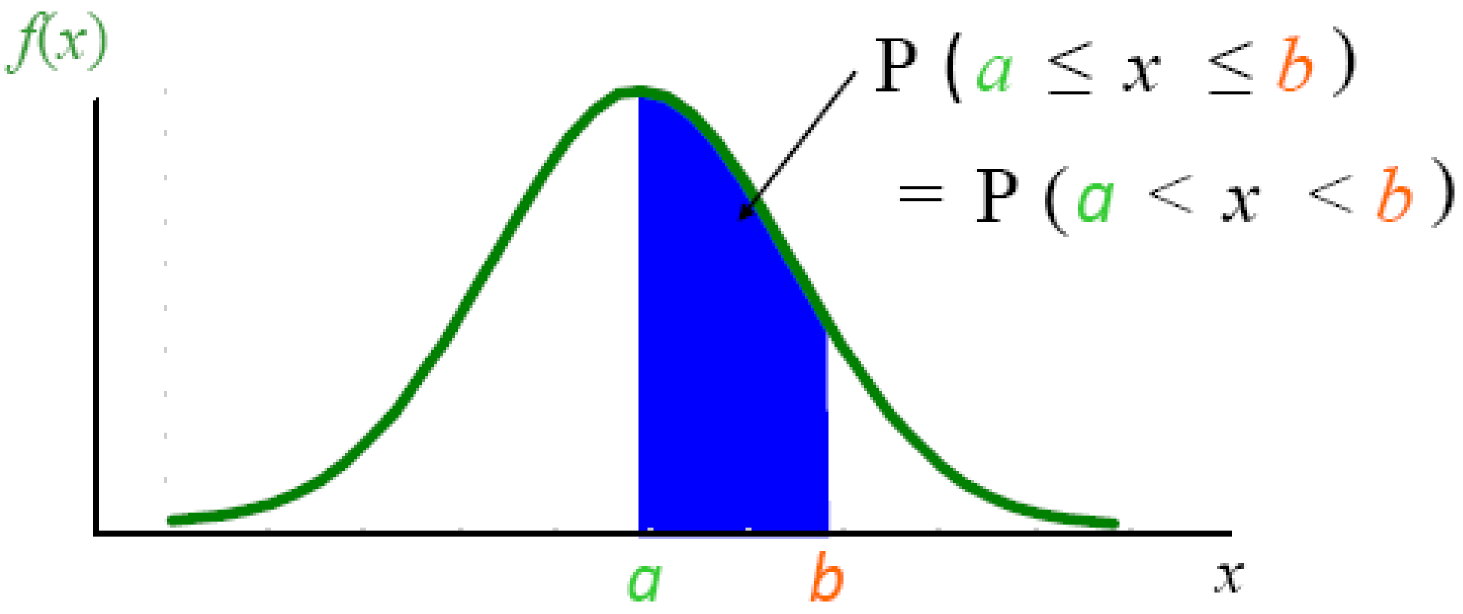
4. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Η f(x) είναι σ.π.π. αν και μόνο αν ισχύουν τα (3) & (4)

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (συν.)

Η πιθανότητα το X να βρίσκεται μεταξύ δύο τιμών είναι η περιοχή κάτω από την καμπύλη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του X, μεταξύ των δύο τιμών:

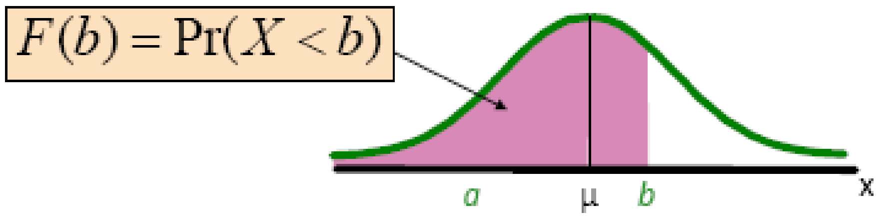
$$\Pr(a \le X \le b) = \Pr(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$



Συνάρτηση Κατανομής

ΟΡΙΣΜΟΣ: Είναι η συνάρτηση που μας δίνει την πιθανότητα $P(X \leq x)$ δηλαδή

$$F(\mathrm{b}) = P(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. $F(x) \geq 0$ για κάθε x

2. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

3. $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

4. $P(X \leq b) = P(X < b) = F(b)$

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

- **Στις διακριτές μεταβλητές:** Συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$
- **Στις συνεχείς μεταβλητές:** Πιθανότητα ενός μεμονωμένου σημείου $P(X = x) = 0$

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Αναμενόμενη τιμή (μέσος ή μαθηματική ελπίδα):

$$\mathrm{E}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

Για τη μέση τιμή χρησιμοποιούμε επίσης το συμβολισμό $\mathrm{E}(x) = \mu$.

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Διακύμανση

$$V(x) = \mathrm{E}\left[\left(\mathrm{X} - \mu\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mu\right)^2 \cdot f(x)dx$$

Η τυπική απόκλιση της X είναι η θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης:

$$\sigma = \sqrt{V(x)}$$

Κανονική (Normal) κατανομή

Η **κανονική κατανομή** (Normal Distribution) είναι η σημαντικότερη από όλες τις κατανομές πιθανότητας και αποτελεί τη βάση της σύγχρονης στατιστικής μεθοδολογίας. Η σημασία της οφείλεται σε 3 κυρίως λόγους :

(α) Τα περισσότερα συνεχή φαινόμενα μπορούν να εκφραστούν μέσω τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την κανονική κατανομή.

(β) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προσέγγιση για πολλές ασυνεχείς κατανομές όπως π.χ. η διωνυμική κατανομή ή η κατανομή Poisson που περιγράψαμε νωρίτερα.

(γ) Η κανονική κατανομή είναι η βάση για πολλές τεχνικές που χρησιμοποιούνται στην επαγωγική στατιστική (ή στατιστική συμπερασματολογία).

Κανονική (Normal) κατανομή

- Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή που μπορεί να πάρει τιμές σε ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Λέμε ότι η X ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και $σ^2$ αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο:

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < X < +\infty$$

- Με μέση τιμή και διακύμανση:

$$E(X) = \mu \qquad V(X) = \sigma^2$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι:

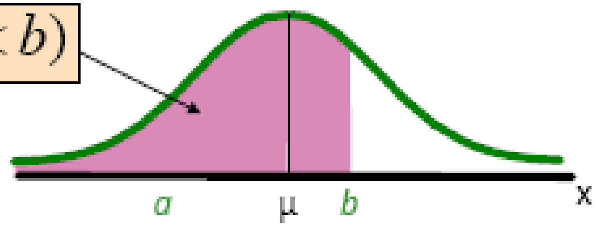
$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Κανονική κατανομή

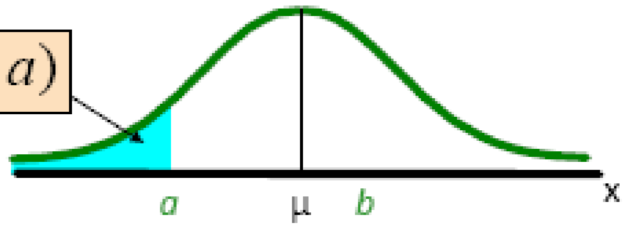
Οι πιθανότητες ενός διαστήματος τιμών υπολογίζονται ως:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

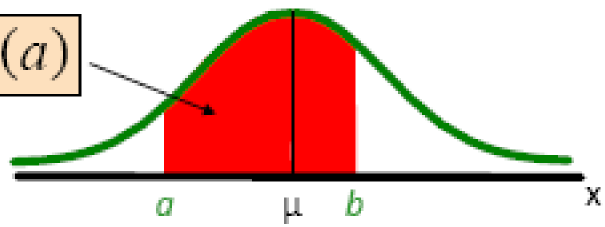
$$\boxed{F(b) = \Pr(X < b)}$$



$$\boxed{F(a) = \Pr(X < a)}$$



$$\boxed{\Pr(a < X < b) = F(b) \text{ - } F(a)}$$

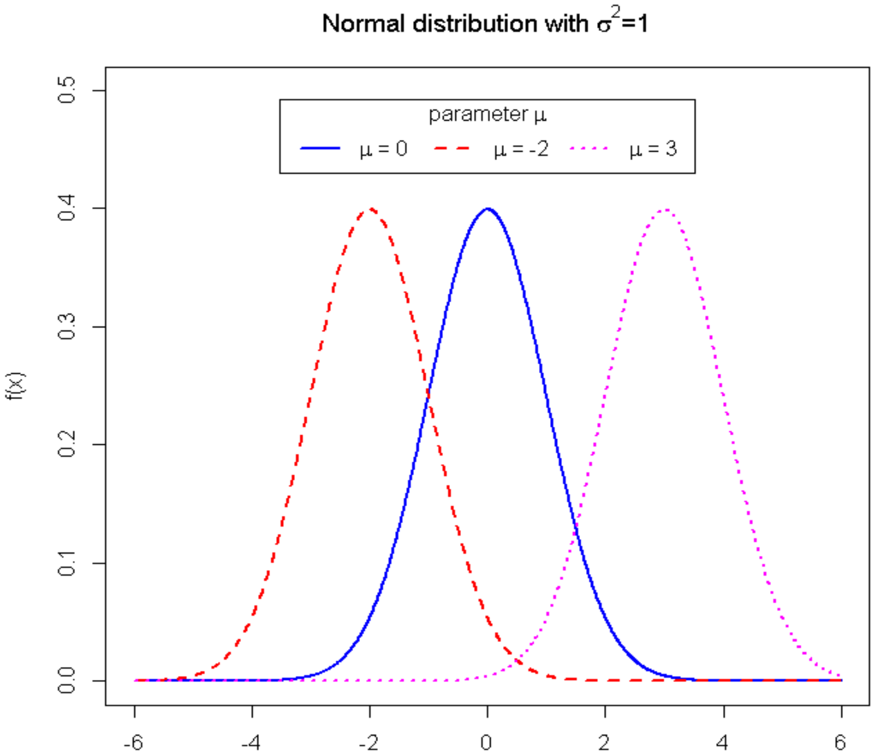


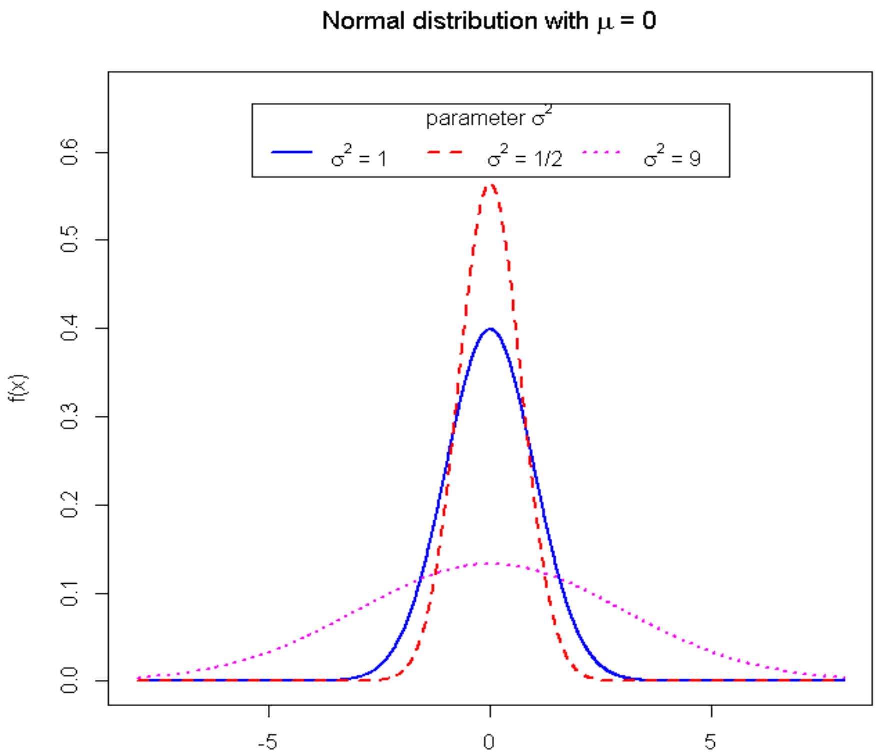
Κανονική κατανομή

Το σχήμα και η θέση της κανονικής καμπύλης αλλάζει όταν αλλάζει ο μέσος μ ή η τυπική απόκλιση σ.

Η μεταβολή του μ μετατοπίζει την καμπύλη αριστερά ή δεξιά.

Η μεταβολή του σ αυξάνει ή μειώνει την διασπορά.



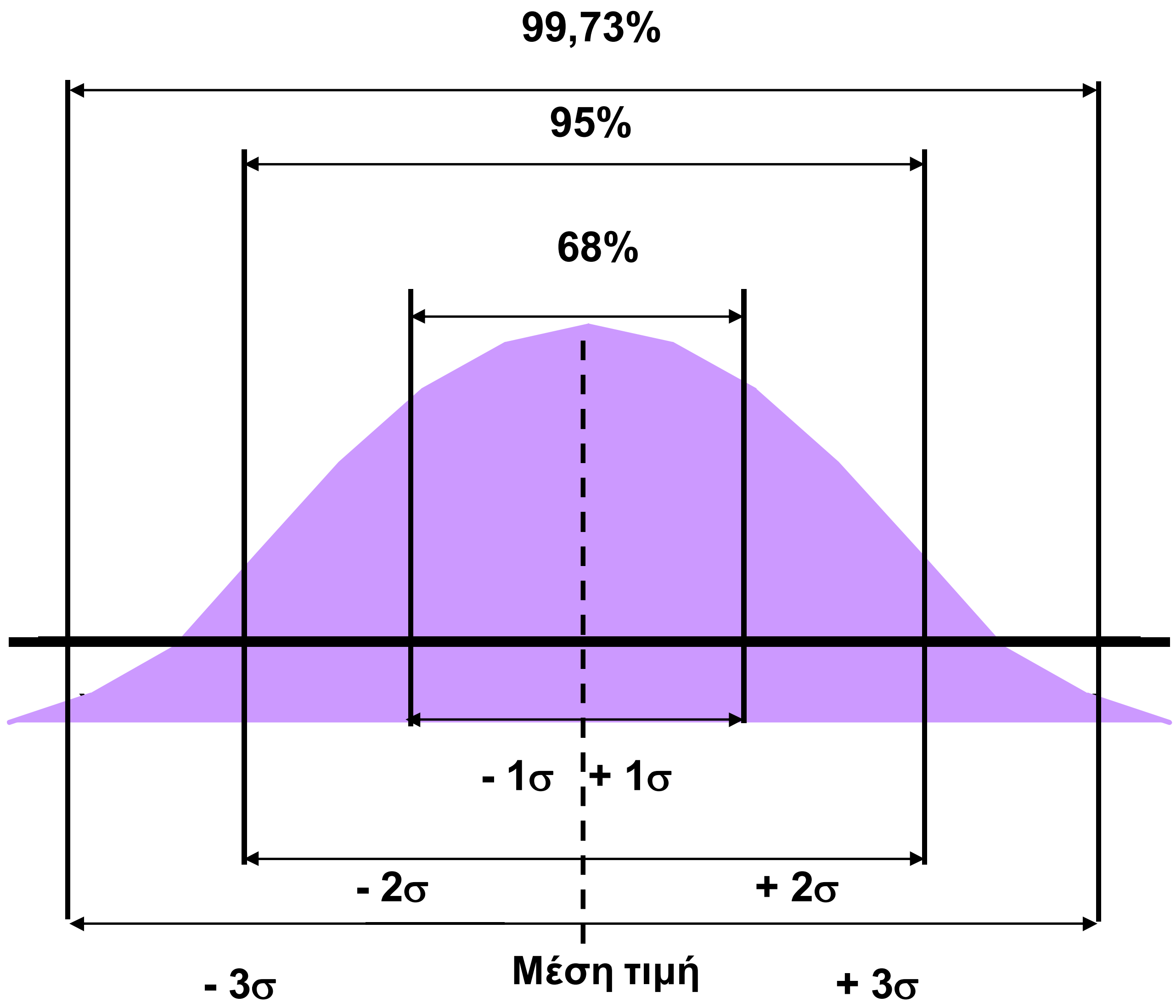


Κανονική κατανομή

Η Κανονική είναι μια ***οικογένεια*** από:

- ***Κωδωνοειδούς σχήματος*** και ***συμμετρικές*** κατανομές. Λόγω συμμετρίας, οι μισές τιμές (50%) βρίσκονται αριστερά του μέσου μ και οι άλλες μισές τιμές βρίσκονται δεξιά του μέσου μ.
- Καθεμιά χαρακτηρίζεται από ένα διαφορετικό συνδυασμό ***μέσου, μ,*** και ***διακύμανσης, σ^2***. Το συμβολίζουμε ως: [**$X \sim N(\mu, \sigma^2)$**].
- Καθεμιά είναι ***ασυμπτωτική*** ως προς τον οριζόντιο άξονα.

Η περιοχή που βρίσκεται κάτω από την κανονική καμπύλη και σε απόσταση *k τυπικών αποκλίσεων εκατέρωθεν του μέσου* **είναι σταθερή** για οποιαδήποτε κανονική κατανομή ανεξάρτητα από το μέσο και τη διακύμανση.



Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

- Η κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$ αποκαλείται τυποποιημένη κανονική κατανομή και συμβολίζεται με $Z \sim N(0,1)$
- Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε ο μετασχηματισμός

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

μας οδηγεί στην τυποποιημένη κανονική κατανομή, δηλαδή

$$Z \sim N(0,1)$$

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

Αν $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ τότε για τον υπολογισμό της $P\left(\alpha < X \le \beta\right)$ μετασχηματίζουμε τη Χ στην τυποποιημένη κανονική κατανομή $Z \sim N\left(0,1\right)$ και εν συνεχεία κάνουμε χρήση του πίνακα ο οποίος περιέχει τις τιμές $\Phi\left(z\right) = P\left(Z \le z\right)$

Για την τυποποιημένη κανονική κατανομή Ζ ισχύουν:

$$\Phi\left(-z\right) = 1 - \Phi\left(z\right)$$

$$P\left(\alpha < Z \le \beta\right) = \Phi\left(\beta\right) - \Phi\left(\alpha\right)$$

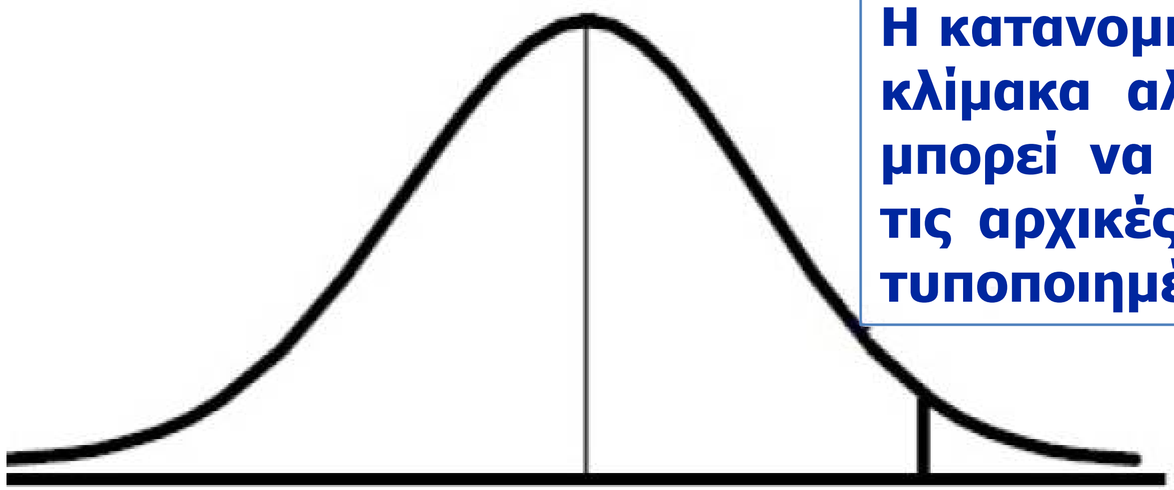
Παράδειγμα

Αν X ~ N (100, 50^2), η τιμή του Z για το X = 200 είναι

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{200 - 100}{50} = 2$$

Αυτό σημαίνει ότι το X = 200 είναι κατά δύο τυπικές αποκλίσεις μεγαλύτερο από το μέσο όρο των 100.

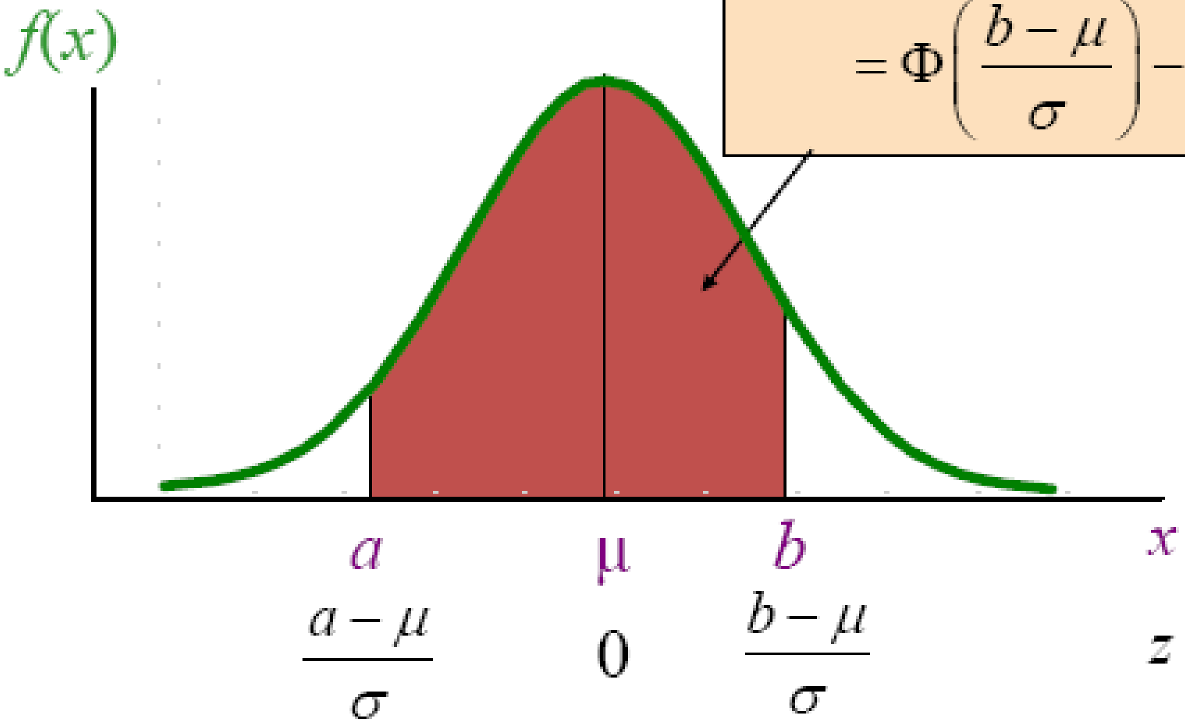
Η κατανομή παραμένει η ίδια, μόνο η κλίμακα αλλάζει. Το ίδιο πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί είτε με βάση τις αρχικές μονάδες (της X) είτε σε τυποποιημένους όρους (μονάδες Y)



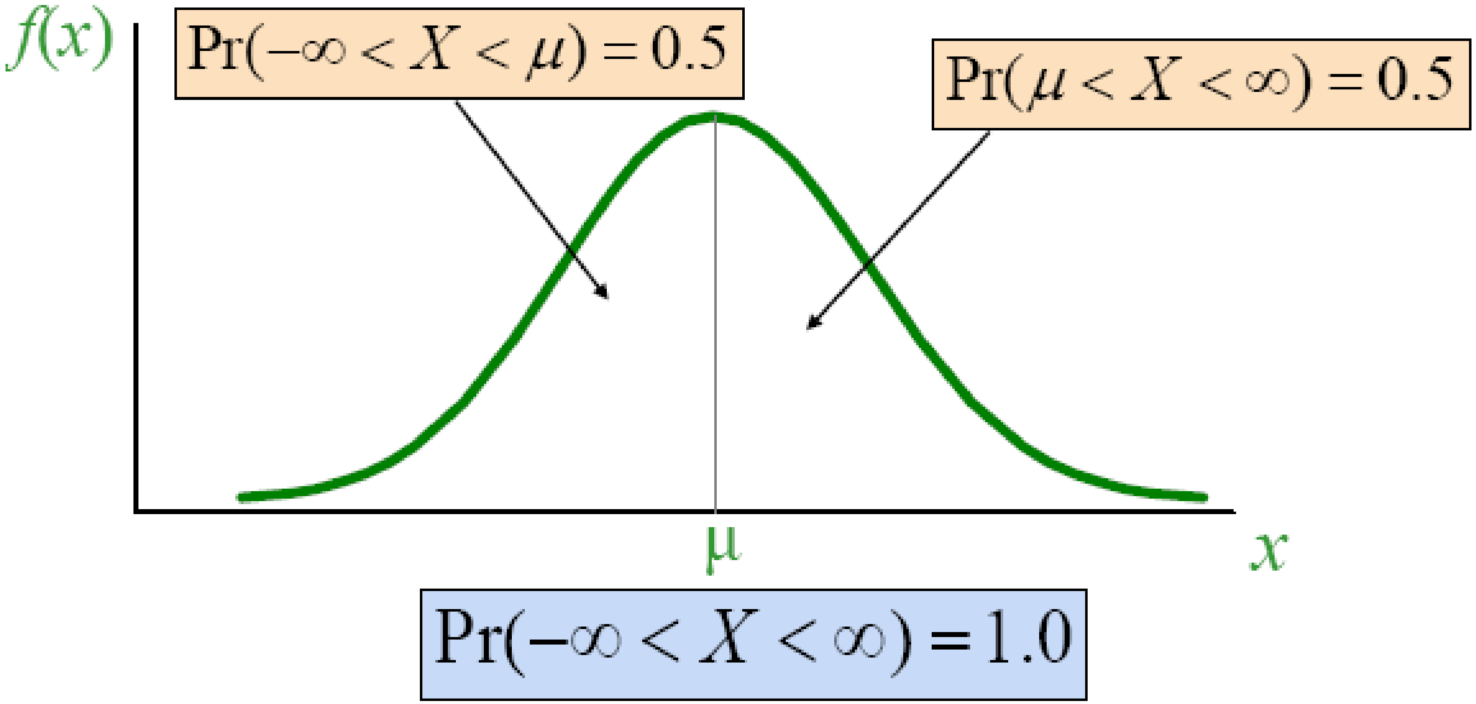
Εύρεση πιθανοτήτων της Κανονικής Κατανομής

$$\Pr(a < X < b) = \Pr\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

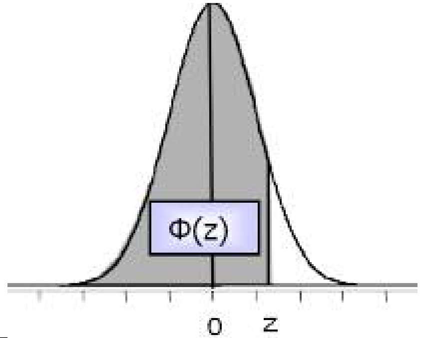


Συμμετρία της
Κανονικής Κατανομής



Πίνακας της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής

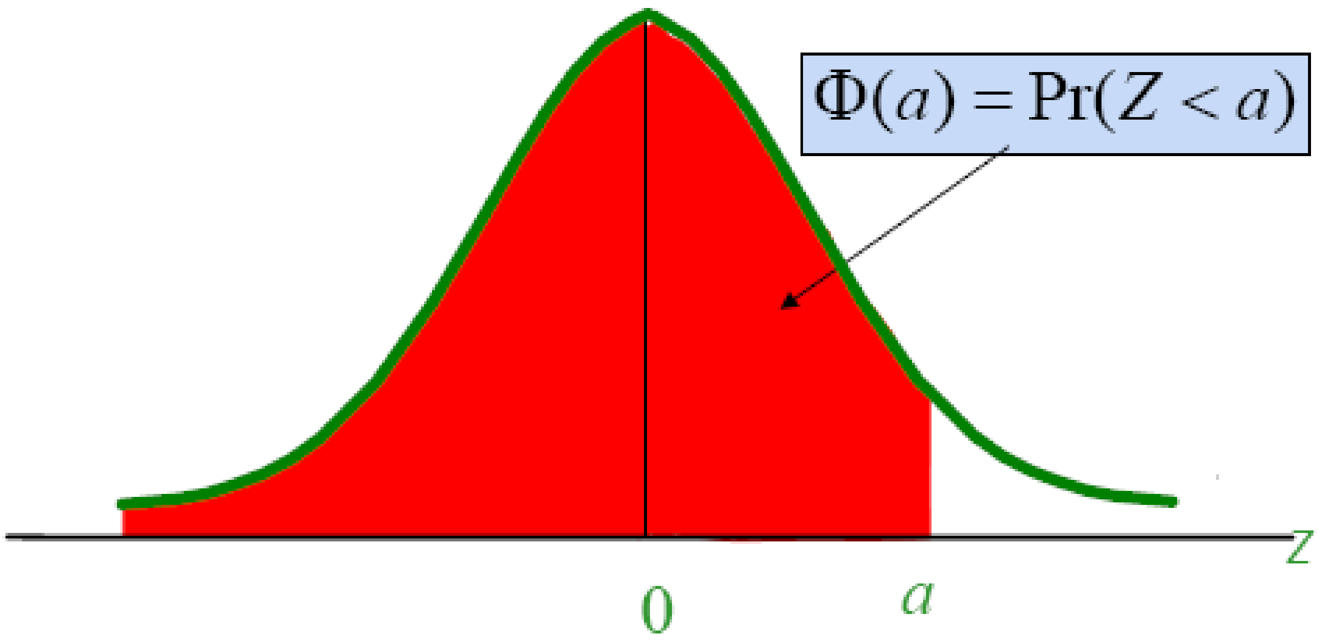
Τιμές των πιθανοτήτων $\Phi(z) = P(x \le z)$ της τυποποιημένης κανονικής κατανομής $N(0, 1)$ για $z \ge 0$. Για $z < 0$ ισχύει $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$



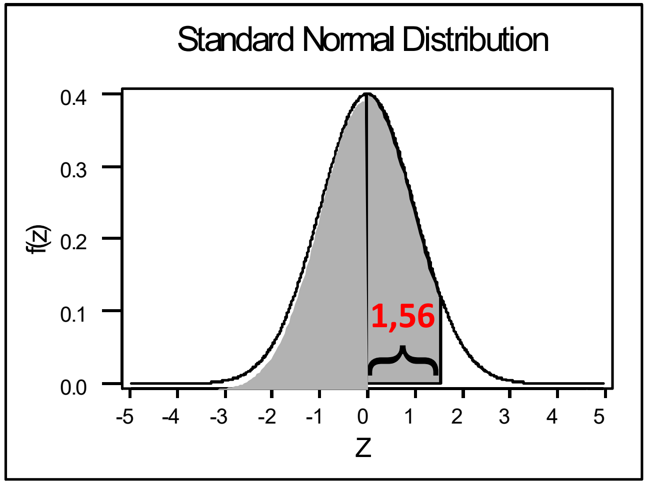
z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84850	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92786	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Πίνακες της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής

Οι Πίνακες δείχνουν τις πιθανότητες της αθροιστικής συνάρτησης της κανονικής κατανομής: Για δεδομένη τιμή α της Z, ο πίνακας δείχνει την περιοχή κάτω από την καμπύλη από - ∞ μέχρι το α.



Εύρεση πιθανοτήτων της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής : P(Z < 1,56)

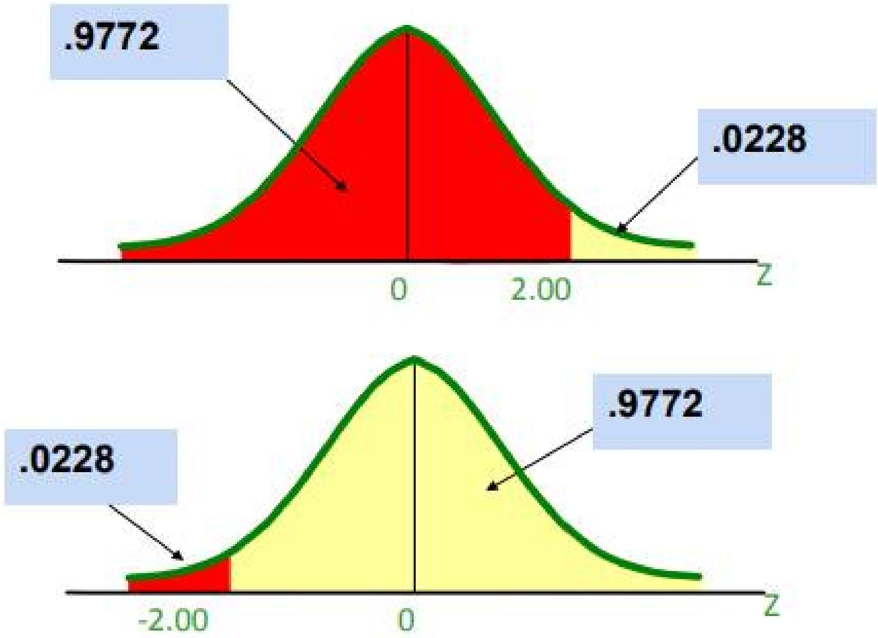


z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84850	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92786	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	**0,94062**	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520

Πηγαίνουμε στη γραμμή με ένδειξη 1,5 και στη στήλη με ένδειξη 0,06 και βρίσκουμε $P(Z \leq 1{,}56) = 0{,}94062$

Εύρεση πιθανοτήτων της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής : P(Z < -2)

Θα χρησιμοποιήσουμε τη συμμετρία της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής



Z	0,00	0,01
0,0	0,50000	0,50399
0,1	0,53983	0,54380
0,2	0,57926	0,58317
0,3	0,61791	0,62172
0,4	0,65542	0,65910
0,5	0,69146	0,69497
0,6	0,72575	0,72907
0,7	0,75804	0,76115
0,8	0,78814	0,79103
0,9	0,81594	0,81859
1,0	0,84134	0,84375
1,1	0,86433	0,86650
1,2	0,88493	0,88686
1,3	0,90320	0,90490
1,4	0,91924	0,92073
1,5	0,93319	0,93448
1,6	0,94520	0,94630
1,7	0,95543	0,95637
1,8	0,96407	0,96485
1,9	0,97128	0,97193
2,0	**0,97725**	0,97778

P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 – P(Z < 2) = 1 – 0,9772 = 0,0228

Εύρεση πιθανοτήτων της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής : P(Z < -2,47)

Για να βρούμε το P(Z < -2,47):

Βρίσκουμε την τιμή του πίνακα για το 2,47

$P(Z < 2{,}47) = 0{,}9932$

Στη συνέχεια και λόγω συμμετρίας:

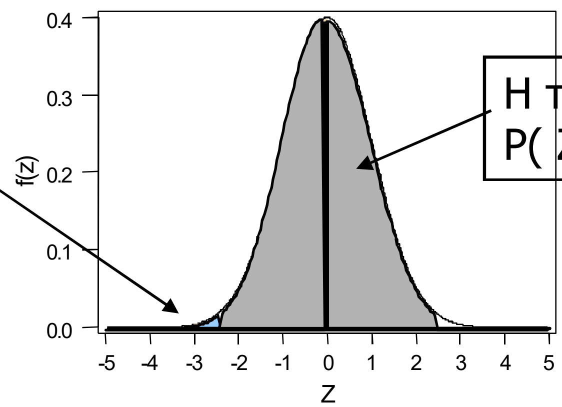
$P(Z < -2{,}47) = 1 - P(Z < 2{,}47)$

$= 1 - 0{,}9932 = 0{,}0068$

z	...		.07	.08	.09
.			.	.	.
.			.	.	.
.			.	.	.
2.3	...	0.9909	0.9911	0.9913	
2.4	...	0.9931	**0.9932**	0.9934	
2.5	...	0.9948	0.9949	0.9951	
.					
.					
.					

Αριστερά του -2.47
P(Z < -2.47) = 1 – 0,9932
= 0,0068

Standard Normal Distribution



Η τιμή του πίνακα για το 2,47
P(Z < 2.47) = 0,9932

Εύρεση πιθανοτήτων της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής : $P(1 \leq Z \leq 2)$

Για να βρούμε την **$P(1 \leq Z \leq 2)$**:

1. Βρίσκουμε την τιμή του πίνακα για το 2,00

   $F(2) = P(Z \leq 2{,}00) = 0{,}9772$

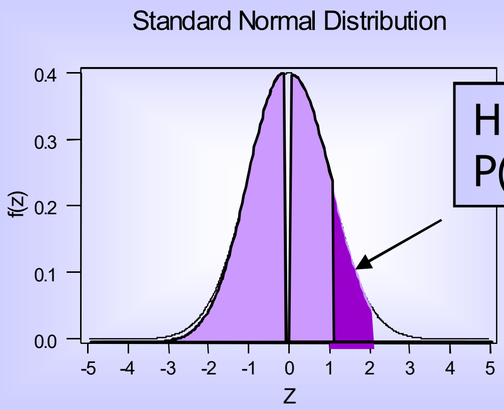
2. Βρίσκουμε την τιμή του πίνακα για το 1,00

   $F(1) = P(Z \leq 1{,}00) = 0{,}8413$

3. $P(1 \leq Z \leq 2{,}00) = P(Z \leq 2{,}00) - P(Z \leq 1{,}00)$

   $= 0{,}9772 - 0{,}8413 =$ **0,1359**

z	.00	...
.	.	
.	.	
.	.	
0.9	0.8159	...
1.0	0.8413	...
1.1	0.8643	...
.	.	
.	.	
.	.	
1.9	0.9713	...
2.0	0.9772	...
2.1	0.9821	...



Η περιοχή μεταξύ 1 και 2

$P(1 \leq Z \leq 2) = 0{,}9772 - 0{,}8413 = 0{,}1359$

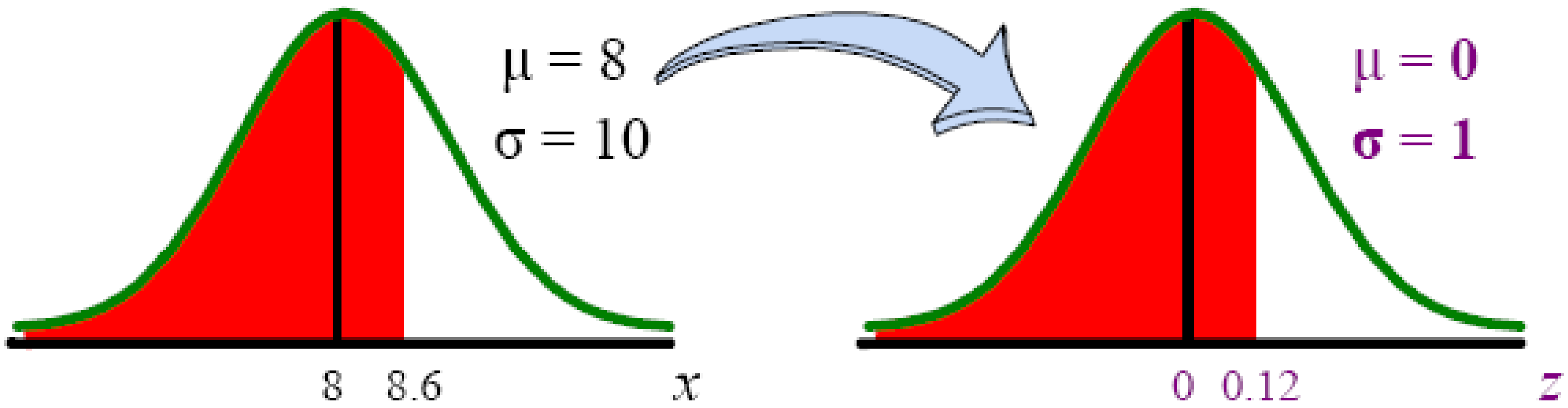
Παράδειγμα Τυποποίησης

Αν η τ.μ. *X* ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο 8,0 και τυπική απόκλιση 5,0 να βρεθεί η P(*X* < 8,6)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{8,6 - 8}{5} = 0,12$$

$$\Phi(0,12) = 0,5478$$

z	0,00	0,01	0,02
0,0	0,50000	0,50399	0,50798
0,1	0,53983	0,54380	**0,54776**



$P(X < 8,6)$ $\quad$ $P(Z < 0,12)$

Παράδειγμα Τυποποίησης (συν.)

Αν η τ.μ. *X* ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο 8,0 και τυπική απόκλιση 5,0 να βρεθεί η $P(X > 8,6)$

$$\mathbf{P(X > 8{,}6) = 1 - P(X < 8{,}6) = 1 - P(Z < 0{,}12) =}$$
$$\mathbf{= 1 - 0{,}5478 = 0{,}4522}$$

Εύρεση του z όταν γνωρίζουμε την πιθανότητα: P(Z < z) = 0.90

Για βρούμε την τιμή *z* για την οποία ισχύει:

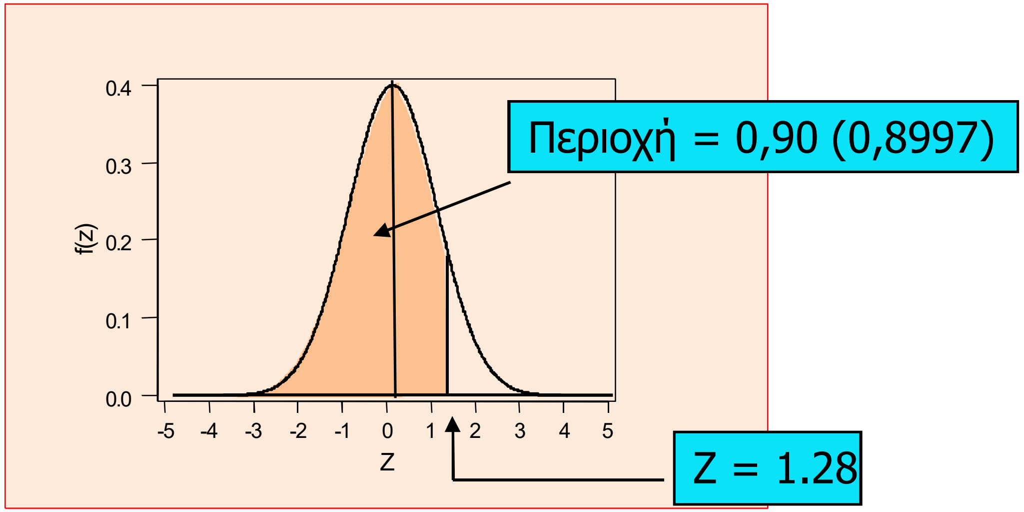
$$P(Z \leq z) = 0{,}90:$$

1. Βρίσκουμε την πλησιέστερη στο 0,90 πιθανότητα από τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

2. Προσδιορίσουμε την τιμή *z* από την αντίστοιχη γραμμή και στήλη.

$$P(Z \leq 1.28) \approx 0{,}90$$

0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84850	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	**0,89973**	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92786	0,92922	0,93056	0,93189
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.



Παράδειγμα

Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει φούρνους μικροκυμάτων για τους οποίους ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρι την εμφάνιση της πρώτης βλάβης ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 4 έτη και τυπική απόκλιση 1.2 έτη. Με βάση τα στοιχεία αυτά να υπολογισθούν:

1. Η πιθανότητα ένας φούρνος μικροκυμάτων του συγκεκριμένου εργοστασίου να μην χρειαστεί επισκευή πριν από τα 5.5 έτη λειτουργίας του.
2. Η πιθανότητα ένας φούρνος μικροκυμάτων να παρουσιάσει βλάβη στο διάστημα από το 4^{ο} έως το 5^{ο} έτος λειτουργίας του.

Λύση

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο που μεσολαβεί μέχρι την εμφάνιση της πρώτης βλάβης ενός φούρνου μικροκυμάτων που κατασκευάζεται από το παραπάνω εργοστάσιο. Δίνεται ότι $X \sim N\left(4,1,2^2\right)$

1. $$P\left(X > 5,5\right) = P\left(\frac{X-4}{1,2} > \frac{5,5-4}{1,2}\right) = P\left(Z > \frac{1,5}{1,2}\right) = P(Z > 1,25) =$$
$$= 1 - P(Z < 1,25) = 1 - \Phi(1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$$

2. $$P\left(4 \leq X \leq 5\right) = P\left(\frac{4-4}{1,2} \leq \frac{X-4}{1,2} \leq \frac{5-4}{1,2}\right) =$$

$$= P\left(0 \leq Z \leq 0,833\right) = P(Z \leq 0,833) - P(Z < 0) =$$

$$= \Phi(0,833) - \Phi(0) = 0,7967 - 0,5 = 0,2967$$

Προσέγγιση της Διωνυμικής μέσω της Κανονικής Κατανομής

- Στη διωνυμική κατανομή είχαμε *n* ***ανεξάρτητες δοκιμές*** με πιθανότητα επιτυχίας p.
- Έστω ότι η *X* είναι μια τ.μ. που ακολουθεί την διωνυμική κατανομή:

$$E(X) = \mu = np$$
$$Var(X) = \sigma^2 = np(1-p)$$

➢ Αν το *n* είναι μεγάλο τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως προσέγγιση την κανονική κατανομή

Προσέγγιση της Διωνυμικής μέσω της Κανονικής Κατανομής

- Η κανονική κατανομή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προσέγγιση για τη διωνυμική αν $np(1-p) > 5$. Τότε ισχύει επίσης:

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

- Π.χ., αν σε μια διωνυμική κατανομή θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα η τ.μ. Χ να βρίσκεται μεταξύ α και β τότε

$$\Pr(a < X < b) = Pr\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} < Z < \frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Προσέγγιση της Διωνυμικής μέσω της Κανονικής Κατανομής

- **Παράδειγμα:** Σε μια ψηφοφορία το 40% των ψηφοφόρων υποστηρίζουν την πρόταση Α. Σε ένα δείγμα από n = 200 ψηφοφόρους ποια η πιθανότητα οι υποστηρικτές της πρότασης Α να είναι μεταξύ 76 και 80;

$$E(X) = \mu = np = 200(0.40) = 80$$

$$Var(X) = np(1-p) = 200(0.40)(1-0.40) = 48$$

Οπότε:

$$\Pr(76 < X < 80) = Pr\left(\frac{76-80}{\sqrt{48}} < Z < \frac{80-80}{\sqrt{48}}\right)$$

$$= \Pr\,(-0{,}58 < Z < 0)$$

$$= \Phi(0) - \Phi(-0.58)$$

$$= 0.500 - 0.2810 = 0.219$$

Η Κατανομή Χ^2

- Αν οι $Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. και$Z_i \sim N(0,1)$. Τότε:

$$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim x^2(n)$$

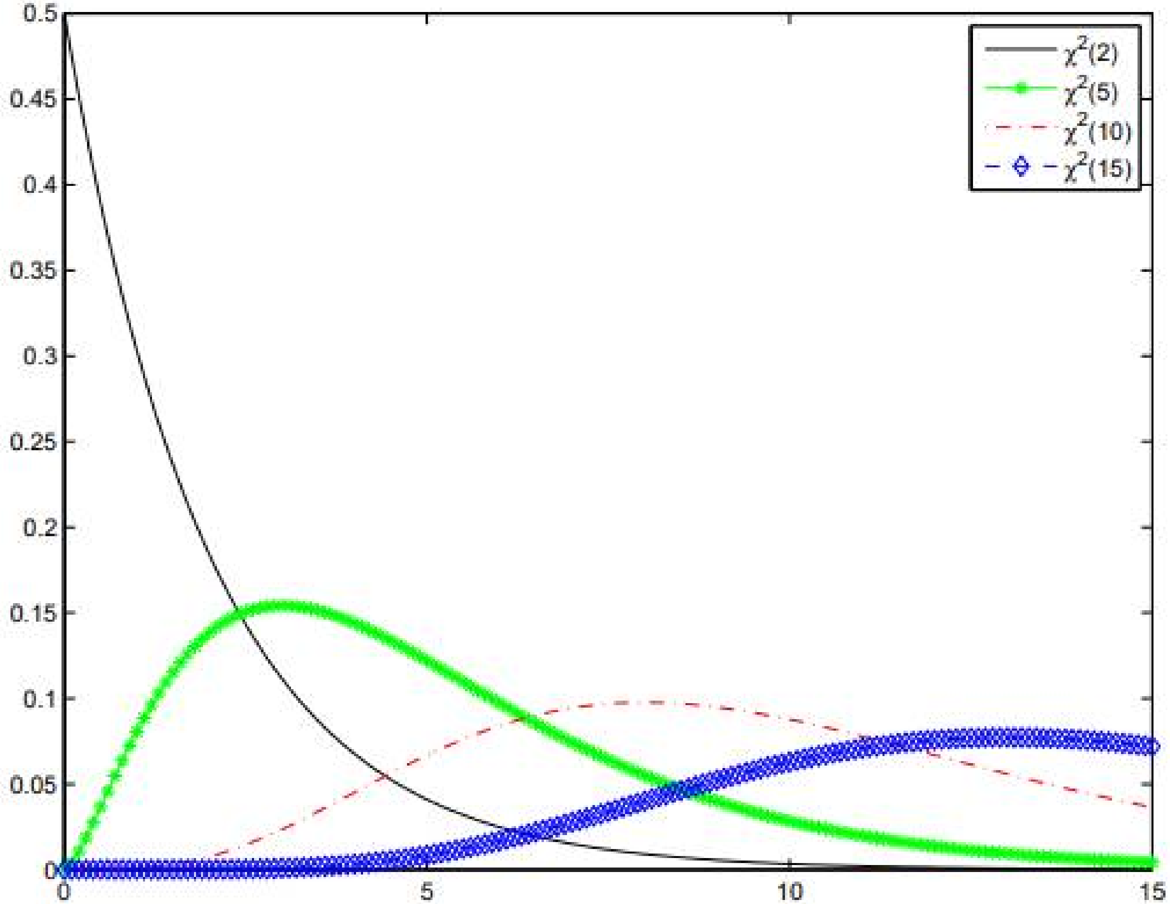
  - Η Κατανομή Χ^2 έχει μόνο μια παράμετρο, το *n*, είναι πάντα θετική και θετικά ασύμμετρη.
  - Επιπλέον ισχύουν:

$$E(X) = n, \qquad \kappa\alpha\iota$$

$$Var(X) = 2n$$

$$\gamma\iota\alpha\ n \geq 2$$

Η Κατανομή Χ²



Η Κατανομή t

- Έστω 2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $Z \sim N(0,1)$ και $Y \sim x^2(n)$
  Τότε η τ.μ.:

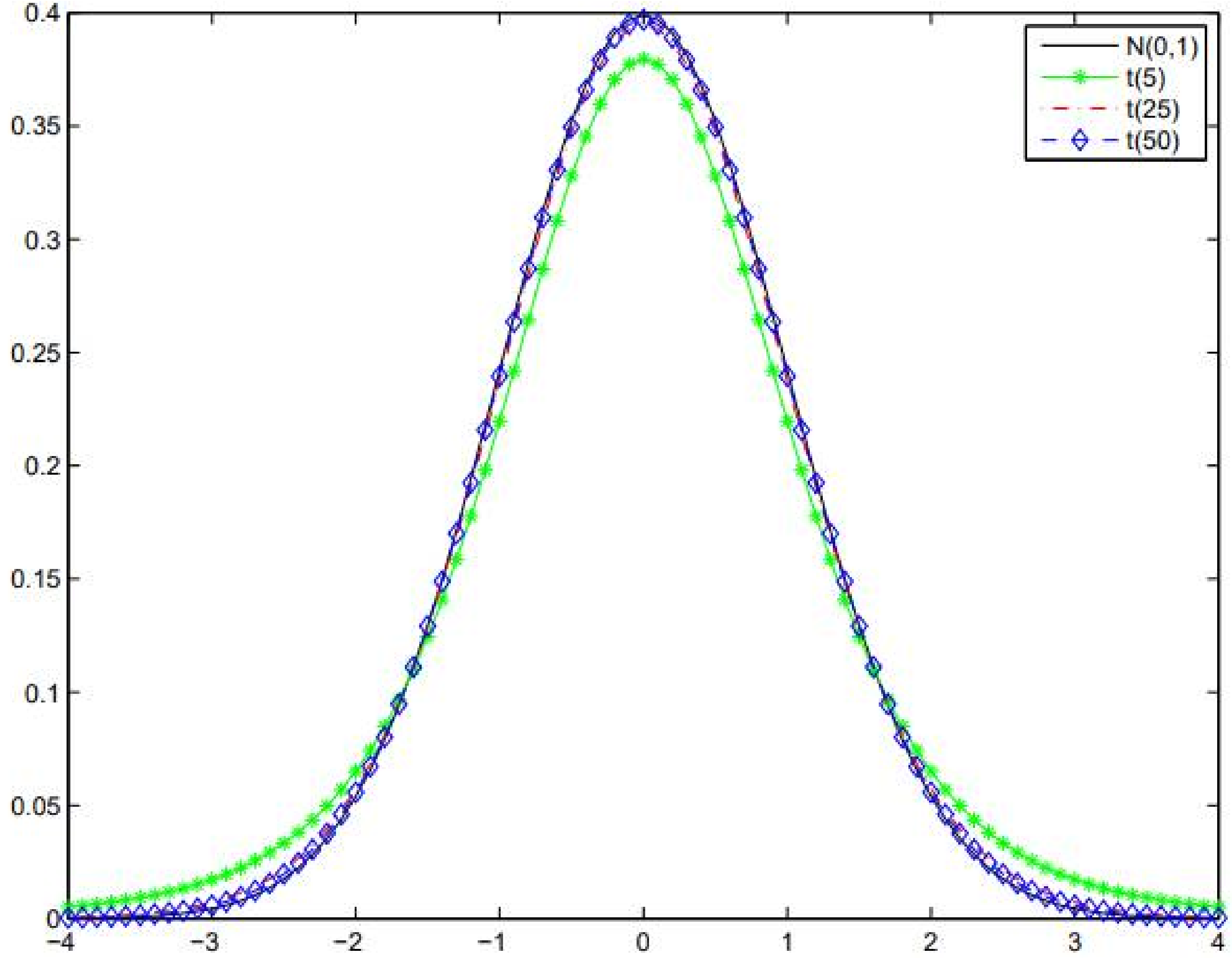
$$W = \frac{Z}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$

- Η Κατανομή *t* έχει μόνο μια παράμετρο, το *n*, είναι πάντα θετική και συμμετρική γύρω από το μηδέν.
- Επιπλέον ισχύουν:

$$E(X) = 0, \text{ για n > 1} \quad Var(X) = \frac{n}{n-1} \quad \text{για n > 2}$$

$$W \underset{n \to \infty}{\sim} N(0, 1)$$

Η Κατανομή t



Η Κατανομή F

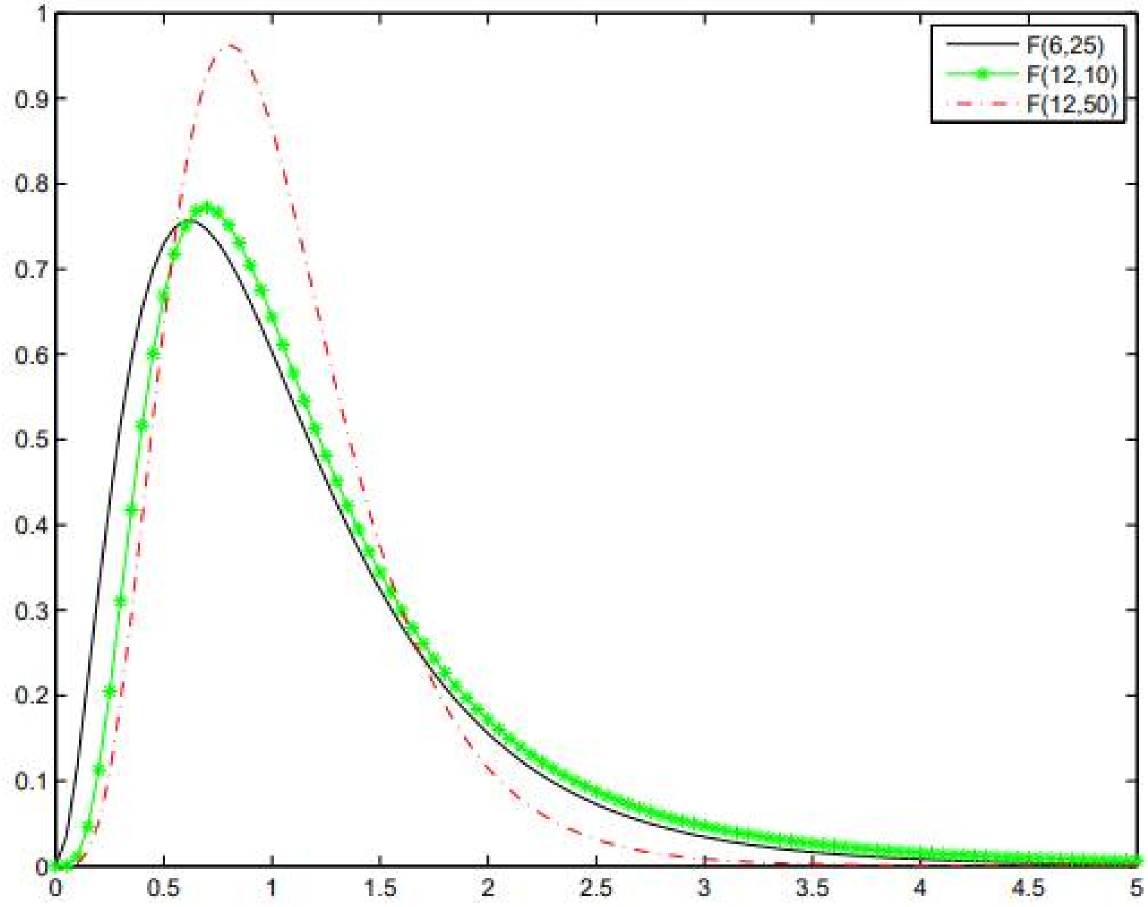
- Έστω X και Y δύο ανεξάρτητες τυχαίς μεταβλητές που κατανέμονται ως x^2: $X \sim x^2(n)$ και $Y \sim x^2(m)$. Τότε:

$$W = \frac{X/n}{Y/m} \sim F(n, m)$$

  - Η Κατανομή *F* έχει δύο παραμέτρους, τα *n* και *m* (οι βαθμοι ελευθερίας του αριθμητή και του παρανομαστή), είναι πάντα θετική και θετικά ασύμμετρη.
  - Επιπλέον ισχύει ότι αν $W \sim F(n, m)$

$$E(W) = \frac{m}{1-m}, for\ m > 2.$$

Η Κατανομή *F*


F(6,25)
F(12,10)
F(12,50)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5