# ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΘΟΔΩΡΟΣ ΠΑΠΑΔΟΓΓΟΝΑΣ

## Σετ Διαφανειών 2: Πιθανότητες - Συνδυαστική Ανάλυση - Ολική πιθανότητα

# ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

- **Τυχαίο φαινόμενο** είναι ένα φαινόμενο του οποίου η κατάληξη δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων.

- **Τυχαίο πείραμα** είναι μια διαδικασία της οποίας το αποτέλεσμα δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων (π.χ. ρίψη ζαριού).

# Βασικές έννοιες - 2

- **Δειγματικός χώρος (S)** είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός τυχαίου πειράματος.
- **Ενδεχόμενο** ονομάζεται κάθε δυνατό αποτέλεσμα του τυχαίου πειράματος (δηλ. κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου).
- Ο Δειγματικός χώρος S ονομάζεται και **βέβαιο ενδεχόμενο.**
- Το ενδεχόμενο $\varnothing$ ονομάζεται **αδύνατο ενδεχόμενο.**

# Διαγράμματα Venn

Σε αυτά τα διαγράμματα ο δειγματικός χώρος παριστάνεται με ένα παραλληλόγραμμο εντός του οποίου βρίσκονται όλα τα απλά ή στοιχειώδη ενδεχόμενα. Ένα ενδεχόμενο παριστάνεται με ένα κύκλο ή έλλειψη.

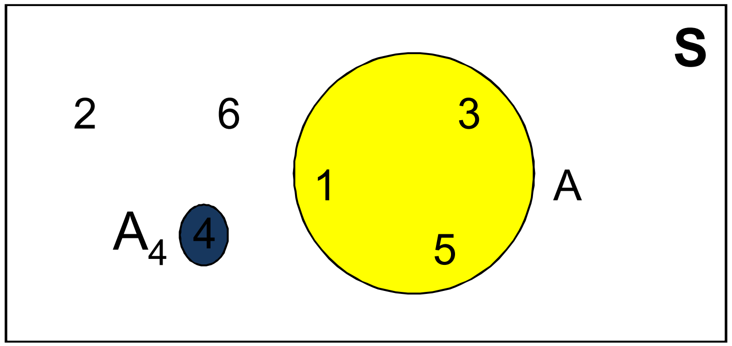
Π.χ. : Ο δειγματικός χώρος της ρίψης ενός ζαριού είναι
$S = \{1,2,3,4,5,6\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$

$A_4$ = {το αποτέλεσμα είναι 4}

είναι απλό (ή στοιχειώδες) ενδεχόμενο

A = {το αποτέλεσμα είναι περιττός}

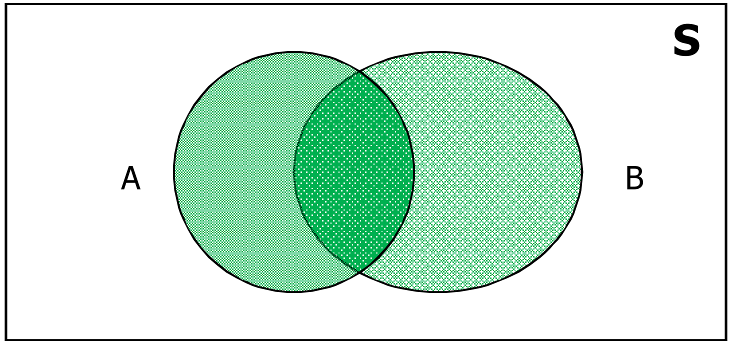
είναι σύνθετο ενδεχόμενο



# Βασικές έννοιες - 3

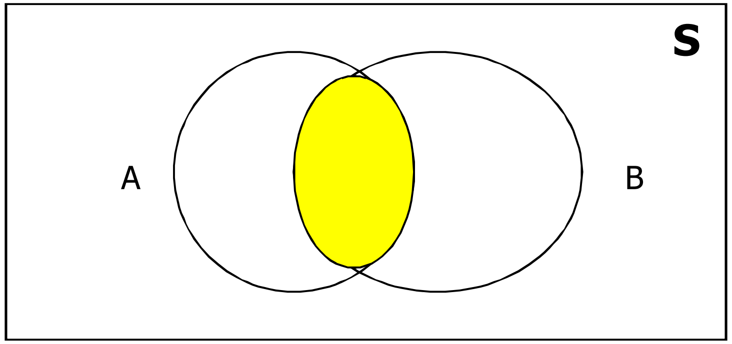
- <u>Ένωση δύο ενδεχομένων</u> A και B ονομάζεται το ενδεχόμενο A ∪ B το οποίο συμβαίνει όταν συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα A, B

**A ∪ B**



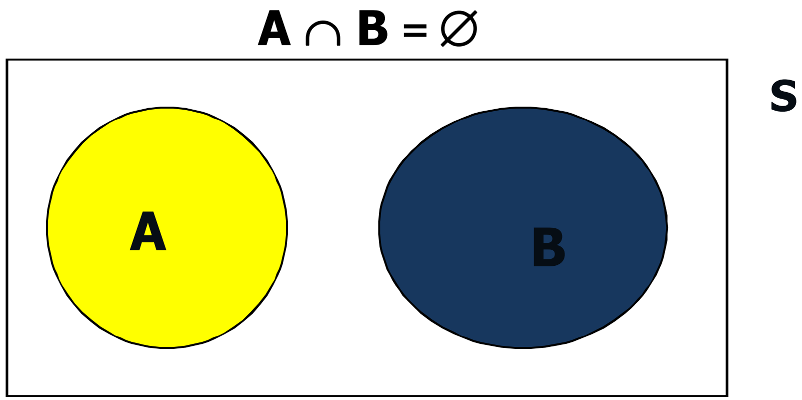

- <u>Τομή δύο ενδεχομένων</u> ονομάζεται το ενδεχόμενο A ∩ B το οποίο συμβαίνει όταν συμβαίνουν ταυτόχρονα και τα δύο ενδεχόμενα A, B

**A ∩ B**

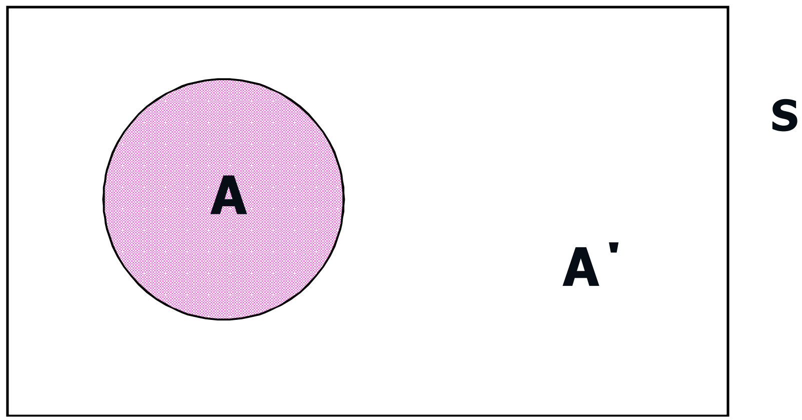


# Βασικές έννοιες - 4

- Αν η τομή των δύο ενδεχομένων είναι το αδύνατο ενδεχόμενο τότε αυτά καλούνται <u>ασυμβίβαστα ενδεχόμενα</u>.




- <u>Συμπλήρωμα</u> ενός ενδεχομένου A καλείται το ενδεχόμενο A΄ το οποίο περιέχει τα αποτελέσματα του δειγματικού χώρου S τα οποία δεν περιέχονται στο A.



# Ορισμός της πιθανότητας

- Κλασικός Ορισμός (Laplace): Αν όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα και ασυμβίβαστα τότε η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Ε ορίζεται ως:

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(S)}$$

N(E) ο αριθμός των ευνοϊκών για το ενδεχόμενο περιπτώσεων

N(S) ο αριθμός των δυνατών περιπτώσεων.

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι πιθανότητες P($A_4$) και P(A)

$$P(A_4) = \frac{N(A_4)}{N(S)} = \frac{1}{6} \qquad P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{3}{6} = 0,5$$

# Η πιθανότητα ως σχετική συχνότητα

- Αν έχουμε άπειρες επαναλήψεις ενός πειράματος τότε η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Ε ορίζεται ως το όριο της σχετικής συχνότητας του:

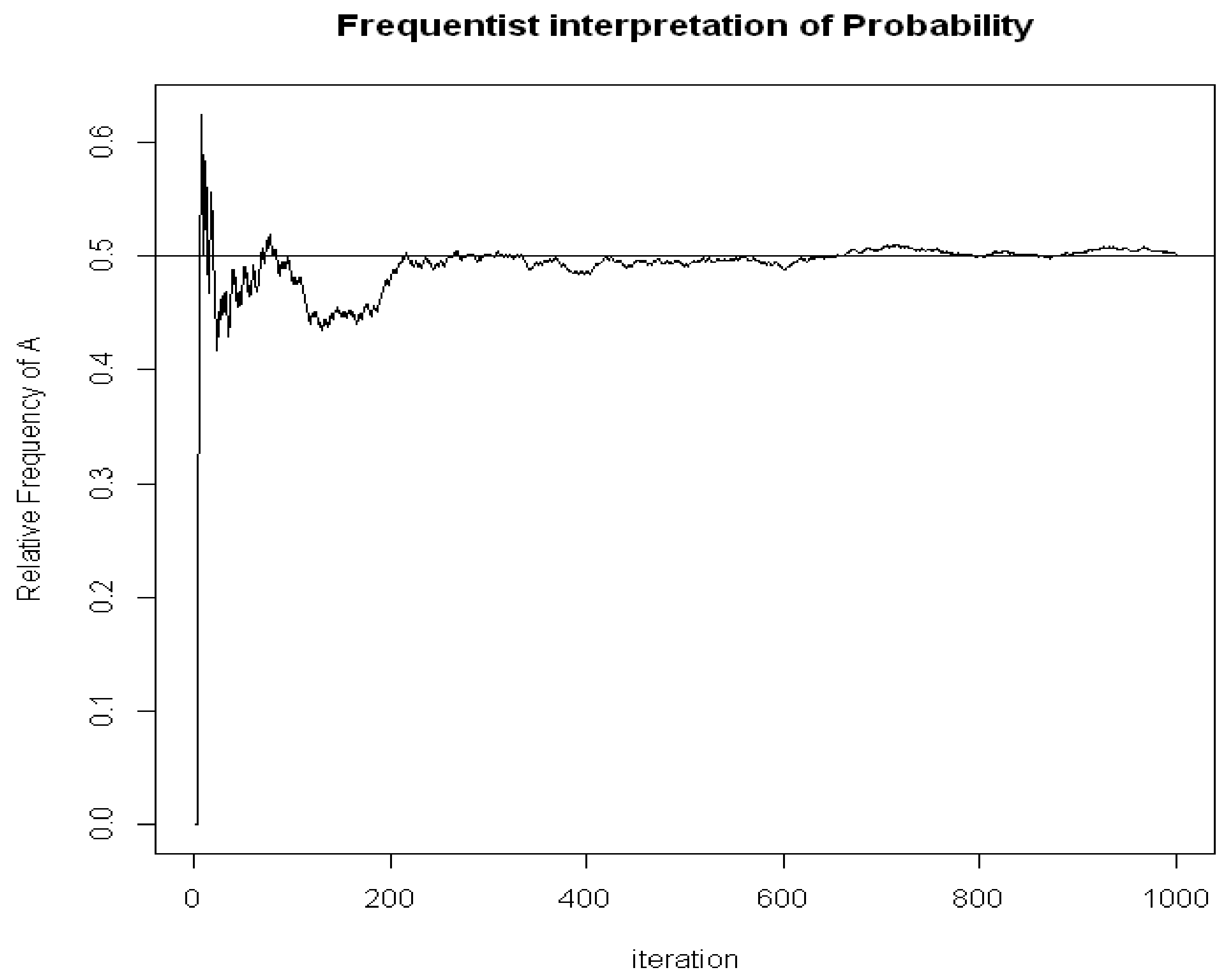
$$P(E) = \lim_{N \to \infty} \frac{N(E)}{N}$$

όπου:

- N(E) ο αριθμός των εμφανίσεων του ενδεχομένου Ε
- Ν ο αριθμός των επαναλήψεων του πειράματος

# Παράδειγμα

- Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα και έστω Α το ενδεχόμενο η ρίψη του νομίσματος να δώσει Γράμματα.
- Με βάση τον ορισμό της πιθανότητας ως σχετικής συχνότητας, αν επαναλάβουμε άπειρες φορές την ρίψη του νομίσματος, τότε ορίζεται ως Ρ(Α) το όριο της σχετικής συχνότητας του ενδεχομένου Α.


Frequentist interpretation of Probability
Relative Frequency of A
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0
200
400
600
800
1000
iteration

# Υποκειμενική προσέγγιση

- Στην υποκειμενική προσέγγιση ο ορισμός της πιθανότητας εκφράζει τις προσωπικές πεποιθήσεις ενός ατόμου. Η πιθανότητα την οποία ένα άτομο αντιστοιχεί σε ένα ενδεχόμενο εκφράζει το κατά πόσο το άτομο αυτό θα ήταν διατεθειμένο να στοιχηματίσει υπέρ ή κατά του ενδεχομένου αυτού.
- Η υποκειμενική προσέγγιση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν έχουμε πειράματα που δεν μπορούν να επαναληφθούν ή όταν οι συνθήκες αλλάζουν ραγδαία και επομένως δεν μπορούμε να στηριχθούμε σε ιστορικά στοιχεία.

# Παράδειγμα

- Αν μεταφερθούμε στις αρχές της οικονομικής κρίσης στην Ελλάδα περίπου το 2009, ένα ενδεχόμενο που είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον τότε ήταν: "Η Ελλάδα θα κηρύξει πτώχευση μέσα στα επόμενα δύο χρόνια (δηλ. έως το 2011)"
- Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την πιθανότητα του παραπάνω ενδεχομένου. Αυτός ο υπολογισμός προφανώς δεν μπορεί να γίνει με κανέναν από τους δύο πρώτους (αντικειμενικούς) τρόπους. Ο υπολογισμός λοιπόν της πιθανότητας στην περίπτωση αυτή μπορεί να γίνει μόνον υποκειμενικά και θα αντικατοπτρίζει το ποσό για το οποίο κάποιο άτομο θα ήταν διατεθειμένο να στοιχηματίσει για το ενδεχόμενο αυτό (προφανώς διαφορετικά άτομα θα έδιναν για το ίδιο ενδεχόμενο διαφορετικές πιθανότητες ανάλογα με την πληροφορία που το κάθε άτομο διέθετε).

# ΑΡΧΕΣ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

- Πολλαπλασιαστική Αρχή $n_1 * n_2 * \ldots * n_k$
- Μεταθέσεις $P_n = n!$
- Διατάξεις $P_{n\,x} = P(n, x) = \dfrac{n!}{(n-x)!}$
- Συνδυασμοί $C_{n\,x} = C(n, x) = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$

# Πολλαπλασιαστική αρχή ή αρχή της απαρίθμησης

Αν ένα πείραμα πραγματοποιείται σε 2 διαδοχικά στάδια και υπάρχουν $n_1$ πιθανά αποτελέσματα για το πρώτο στάδιο και $n_2$ πιθανά αποτελέσματα για το δεύτερο στάδιο τότε τα συνολικά δυνατά αποτελέσματα είναι $n_1.n_2$

Γενίκευση: $n_1.n_2.n_3 \ldots n_K$ (δενδροδιάγραμμα)

# Παράδειγμα

Έστω ότι ένας καθηγητής θέλει να ταξιδέψει από την Κρήτη στην Καβάλα για να συμμετάσχει σε ένα συνέδριο. Δεδομένου ότι δεν υπάρχουν απευθείας πτήσεις θα πρέπει να ταξιδέψει μέσω Αθήνας. Το πρώτο μέρος του ταξιδιού του (Κρήτη – Αθήνα) μπορεί να γίνει με δύο τρόπους, δηλαδή με πλοίο ή με αεροπλάνο. Αντίστοιχα, το δεύτερο μέρος του ταξιδιού του (Αθήνα – Καβάλα) μπορεί να γίνει με τέσσερις τρόπους, δηλαδή με αυτοκίνητο, με λεωφορείο, με τρένο ή με αεροπλάνο.

Επομένως σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή το ταξίδι Κρήτη – Καβάλα μπορεί να γίνει με 2x4 = 8 τρόπους.

# Μεταθέσεις

- Οι μεταθέσεις *n* στοιχείων εκφράζουν τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί κανείς να τοποθετήσει τα στοιχεία αυτά. Το πλήθος των διαφορετικών αυτών τρόπων δίνεται από τον τύπο:

$$P_n = n!$$

- Ο ορισμός του παραγοντικού (n!) είναι

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n - 1) \times n$$

# Ιδιότητες παραγοντικών

1) 1! = 1

2) 0! = 1

3) n! = (n-1)!·n

4) (n+1)! = (n+1)·n!

6) $$\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

7) $$\frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

# Παράδειγμα

Πόσους αριθμούς μεγαλύτερους από 10.000 με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να δημιουργήσουμε με χρήση των ψηφίων 0, 2, 4, 6, 7

# Παράδειγμα

Πόσους αριθμούς μεγαλύτερους από 10.000 με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να δημιουργήσουμε με χρήση των ψηφίων 0, 2, 4, 6, 7

**Απάντηση**

Κάθε μετάθεση των ψηφίων 0, 2, 4, 6, 7 μας δίνει ένα πενταψήφιο αριθμό. Το πλήθος αυτό είναι 5!=120.

# Παράδειγμα

Πόσους αριθμούς μεγαλύτερους από 10.000 με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να δημιουργήσουμε με χρήση των ψηφίων 0, 2, 4, 6, 7

**Απάντηση**

Κάθε μετάθεση των ψηφίων 0, 2, 4, 6, 7 μας δίνει ένα πενταψήφιο αριθμό. Το πλήθος αυτό είναι 5!=120.

Όσοι από αυτούς έχουν πρώτο ψηφίο το 0 είναι μικρότεροι από 10.000. Το πλήθος αυτό είναι 4!=24.

Άρα το πλήθος των αριθμών που είναι μεγαλύτεροι από 10.000 είναι 5! - 4! =96

# Διατάξεις

Οι **Διατάξεις** (*Permutations*) των *n* στοιχείων ενός συνόλου ανά *x* εκφράζουν τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να επιλέξει κάποιος *x* από τα *n* στοιχεία ενός συνόλου όταν η σειρά επιλογής έχει σημασία. Οι διαφορετικοί αυτοί τρόποι δίνονται από τον τύπο:

$$ {}_{n}P_{x} = P(n,x) = \frac{n!}{(n-x)!} $$

# Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι οι θέσεις του Προέδρου, Γραμματέα και Ταμία του Δ.Σ. ενός συλλόγου θα πληρωθούν με τυχαία επιλογή ατόμων μεταξύ 7 μελών του συλλόγου. Η σειρά επιλογής των ατόμων θα καθορίζει και την ιδιότητα που θα αναλάβουν, δηλ. ο πρώτος που θα επιλεγεί θα αναλάβει την ιδιότητα του Προέδρου, ο δεύτερος την ιδιότητα του Γραμματέα και ο τρίτος την ιδιότητα του Ταμία.

Οι δυνατές συνθέσεις του Δ.Σ. που μπορούν να δημιουργηθούν είναι:

$$\mathrm{P}(7,3)=\frac{7!}{4!}=\frac{7\times 6\times 5\times 4!}{4!}=210$$

# Συνδυασμοί

Οι **συνδυασμοί** (*Combinations*) των *n* στοιχείων ενός συνόλου ανά *x* εκφράζουν τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να επιλέξει κάποιος *x* από τα *n* στοιχεία ενός συνόλου όταν η σειρά επιλογής δεν έχει σημασία. Οι διαφορετικοί τρόποι δίνονται από τον τύπο:

$$ {}_{n}C_{x} = C(n,x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} $$

# Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι μια τριμελής επιτροπή θα σχηματισθεί με τυχαία επιλογή μεταξύ 7 υποψηφίων.

Στην περίπτωση αυτή η σειρά επιλογής δεν έχει σημασία. Άρα έχουμε:

$$C(7,3) = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7\times 6\times 5\times 4!}{2\times 3\times 4!} = 35$$

# Αξιώματα Πιθανοτήτων

- **Αξίωμα 1:** Για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει:

$$1 \geq P(A) \geq 0$$

- **Αξίωμα 2:** Ισχύει:

$$P(S) = 1$$

- **Αξίωμα 3:** Αν $A_i$ , i=1,2,…,n είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα ενδεχόμενα (δηλαδή η τομή τους ανά ζεύγη είναι το κενό) τότε:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n)$$

- Έστω

  $S = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ δειγματικός χώρος. Σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο $\alpha_i$ αντιστοιχείται μια πιθανότητα $P(\alpha_i)$ για την οποία ισχύουν:

  - $0 \leq P(\alpha_i) \leq 1$
  - $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + ... + P(\alpha_n) = 1$

- Έστω το ενδεχόμενο $A = \{a_1, a_2, ...a_r\}$
  Η πιθανότητα του A είναι $P(a_1) + P(a_2) + ... + P(a_r)$

- Επίσης ισχύει $P(\varnothing) = 0 \quad P(\Omega) = 1$

- Παράδειγμα: έστω ο δειγματικός χώρος $S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα $\mathrm{A}_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ και $\mathrm{A}_2 = \{\alpha_2, \alpha_3\}$

Έστω επίσης $P(A_1)=0.4$ και $P(A_2)=0.75$

- Παράδειγμα: έστω ο δειγματικός χώρος $S=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα $\mathrm{A}_1=\{\alpha_1,\alpha_2\}$ και $\mathrm{A}_2=\{\alpha_2,\alpha_3\}$
  Έστω επίσης $P(A_1)=0.4$ και $P(A_2)=0.75$

  Τότε ισχύει:

$$P(\alpha_1)+P(\alpha_2)=0.4$$

$$P(\alpha_2)+P(\alpha_3)=0.75$$

$$P(\alpha_1)+P(\alpha_2)+P(\alpha_3)=1$$

- <u>Παράδειγμα</u>: έστω ο δειγματικός χώρος $S=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα $\mathrm{A}_1=\{\alpha_1,\alpha_2\}$ και $\mathrm{A}_2=\{\alpha_2,\alpha_3\}$

  Έστω επίσης $P(A_1)=0.4$ και $P(A_2)=0.75$

  Τότε ισχύει:

$$P(\alpha_1)+P(\alpha_2)=0.4$$

$$P(\alpha_2)+P(\alpha_3)=0.75$$

$$P(\alpha_1)+P(\alpha_2)+P(\alpha_3)=1$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$P(\alpha_1)=0.25 \quad P(\alpha_2)=0.15 \quad P(\alpha_3)=0.6$$

# Θεωρήματα Πιθανοτήτων

**<u>Θεώρημα 1:</u>** Για κάθε ενδεχόμενο Α και το αντίθετό του ισχύει:

$$P\left(\overline{A}\right)=P\left(A^{c}\right)=P\left(A'\right)=P(\acute{o}\chi\iota \quad \mathrm{A})=1-P(A)$$

**<u>Θεώρημα 2:</u>**

$$P(\varnothing)=0$$

**<u>Θεώρημα 3:</u>** Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα $A_1$ και $A_2$ ισχύει:

$$P\left(A_1\bigcup A_2\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)-P\left(A_1\bigcap A_2\right)$$

(Προσθετική Αρχή)

**<u>Πόρισμα:</u>** . Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα $A_1$ και $A_2$ ισχύει:

$$P\left(A_1\bigcup A_2\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)$$

- <u>Παράδειγμα</u>: Η πιθανότητα $\alpha_1$ να επιλεγεί ένας μαθητής στην ομάδα μπάσκετ είναι 1/5, ενώ για την ομάδα βόλεϋ ($\alpha_2$) είναι 1/4. Η πιθανότητα $\alpha_3$ να επιλεγεί και στις δυο ομάδες είναι 1/8.

  Έστω το ενδεχόμενο:

  Α: ‘Να επιλεγεί τουλάχιστον σε μια από τις δύο ομάδες’

$$P(\mathrm{A}) = P(\alpha_1 \bigcup \alpha_2) = P(\alpha_1) + P(\alpha_2) - P(\alpha_1 \bigcap \alpha_2) \Rightarrow$$
$$P(\mathrm{A}) = 1/5 + 1/4 - 1/8 = 0,325$$

# ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Η πιθανότητα να συμβεί ένα ενδεχόμενο Α δοθέντος ότι το Β έχει ήδη συμβεί λέγεται δεσμευμένη πιθανότητα του Α δοθέντος του Β :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

Αντίστοιχα:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

Ισχύουν:

$$P(B / B) = 1$$

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i / B\right] = \sum_{i=1}^{n} P(A_i / B)$$

- <u>Παράδειγμα</u>: ρίχνουμε δυο ζάρια, ένα κόκκινο και ένα πράσινο
- Αν σε μια ταυτόχρονη ρίψη το πράσινο ζάρι έδειξε 6 ποια η πιθανότητα το άθροισμα να είναι ίσο ή μεγαλύτερο του 11;

- <u>Παράδειγμα</u>: ρίχνουμε δυο ζάρια, ένα κόκκινο και ένα πράσινο
- Αν σε μια ταυτόχρονη ρίψη το πράσινο ζάρι έδειξε 6 ποια η πιθανότητα το άθροισμα να είναι ίσο ή μεγαλύτερο του 11;
- Ο δειγματικός χώρος είναι:

Ένδειξη κόκκινου ζαριού

| Ένδειξη πράσινου ζαριού | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| 2 | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| 3 | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| 4 | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| 5 | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| 6 | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

- Έστω τα ενδεχόμενα:

  Α: ‘να έρθει άθροισμα ίσο ή μεγαλύτερο του 11’

  Β: ‘το πράσινο ζάρι να δείξει 6’

- Ο δειγματικός χώρος κάθε ενδεχομένου είναι:

  Α: {(5,6),(6,5)(6,6)}

  Β: {(6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6)}

A: ‘να έρθει άθροισμα ίσο ή μεγαλύτερο του 11’

B: ‘το πράσινο ζάρι να δείξει 6’

- Ο δειγματικός χώρος κάθε ενδεχομένου είναι:

A: {(5,6),(6,5)(6,6)}

B: {(6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6)}

- P(A)=3/36, P(B)=6/36, $P(A \bigcap B) = 2 / 36$

Άρα

$$P(A/B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}=2/6$$

# ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Δύο ενδεχόμενα αποκαλούνται ανεξάρτητα εάν:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

και επομένως: $P(A_1 \mid A_2) = P(A_1) \qquad P(A_2 \mid A_1) = P(A_2)$

Τρία ενδεχόμενα αποκαλούνται ανεξάρτητα εάν:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Παράδειγμα:

Η πιθανότητα ένας φοιτητής να λύσει ένα πρόβλημα είναι 1/2 και η πιθανότητα ένας άλλος φοιτητής Β να λύσει το ίδιο πρόβλημα είναι 3/5. Αν οι δύο φοιτητές προσπαθήσουν ταυτόχρονα, αλλά ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, ποια είναι η πιθανότητα να λυθεί το πρόβλημα;

Το πρόβλημα λύνεται όταν το λύσει ή ο Α ή ο Β ή και οι 2.

Ζητάμε λοιπόν την $P(A \cup B)$.

Έχουμε: $P(A) = 1/2$, $P(B) = 3/5$

Επειδή τα Α, Β είναι ανεξάρτητα ισχύει:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = (1/2) \cdot (3/5) = 3/15$

Οπότε έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

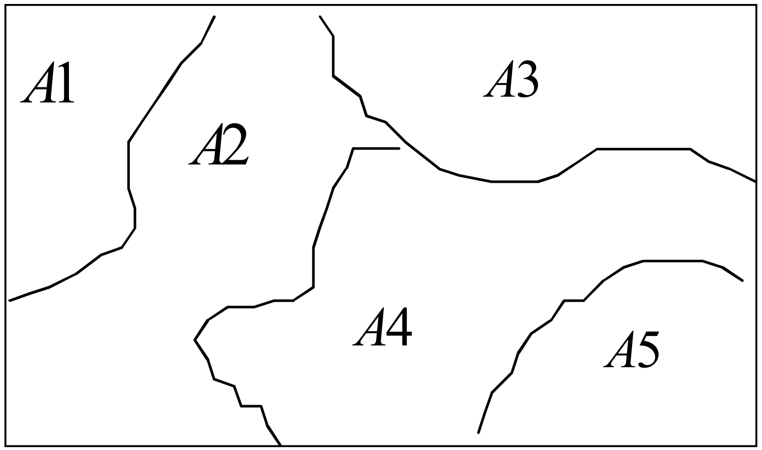
$$= 1/2 + 3/5 – 3/10$$

$$= 8/10$$

# ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

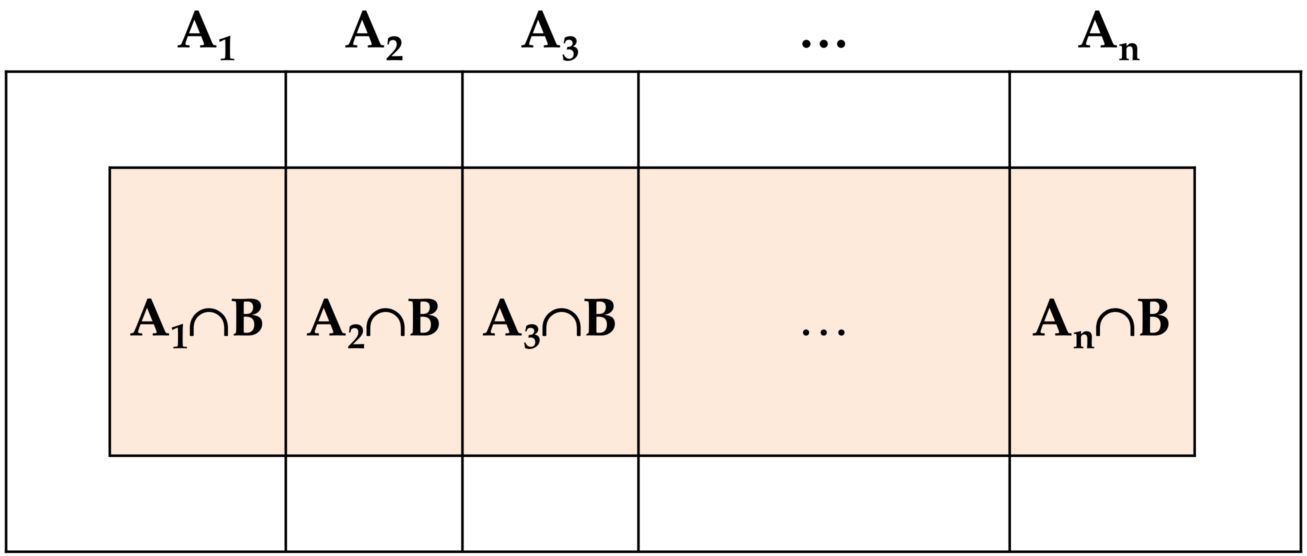
Ονομάζουμε <u>διαμέριση</u> ενός συνόλου S μια πεπερασμένη συλλογή συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$ για τα οποία ισχύει:

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \quad \kappa\alpha\iota \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i, j = 1,2,\ldots,n, \quad i \neq j$$



Έστω μια <u>διαμέριση</u> $A_1, A_2, \ldots, A_n$ του δειγματικού χώρου S τέτοια ώστε $P(A_i) \neq 0$, $i=1,2,\ldots,n$. Τότε για κάθε ενδεχόμενο B η πιθανότητα του υπολογίζεται μέσω των δεσμευμένων πιθανοτήτων του σε σχέση με τα στοιχεία της διαμέρισης :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B|A_i)$$



- Παράδειγμα:  δυο μηχανές παράγουν το 20% και το 80% αντίστοιχα της παραγωγής ενός προϊόντος. Η πρώτη παράγει ελαττωματικό προϊόν με πιθανότητα 0,02 και η δεύτερη με πιθανότητα 0,03. Αν ένα αντικείμενο επιλεγεί στην τύχη, ποιά η πιθανότητα να είναι ελαττωματικό;

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

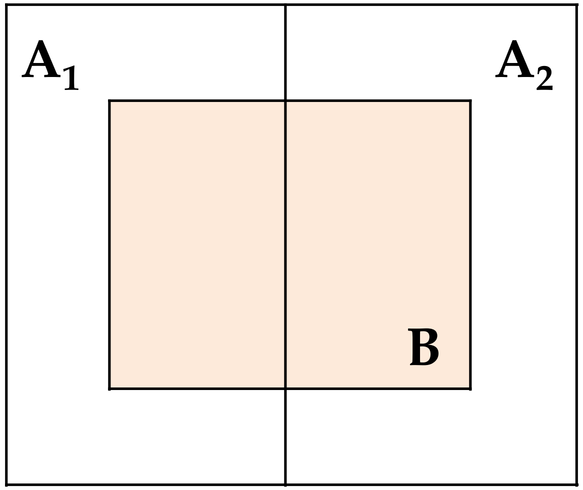
$A_1$: το προϊόν παράγεται από την πρώτη μηχανή

$A_2$: το προϊόν παράγεται από τη δεύτερη μηχανή

Β: το προϊόν είναι ελαττωματικό

- Ισχύει: $P(\mathrm{A}_1) = 0,2 \quad P(\mathrm{A}_2) = 0,8$

$$P(\mathrm{B}/\,\mathrm{A}_1) = 0,02 \quad P(\mathrm{B}/\,\mathrm{A}_2) = 0,03$$




- Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}_1)\cdot P(\mathrm{B}/\,\mathrm{A}_1) + P(\mathrm{A}_2)\cdot P(\mathrm{B}/\,\mathrm{A}_2) =$$

$$0,2\cdot 0,02 + 0,8\cdot 0,03 = 0,028$$