

1. Η δειγματική διακύμανση ονομάζεται _____ της πραγματικής διακύμανσης του πληθυσμού.

α) Επίπεδο σημαντικότητας

β) Σημειακός εκτιμητής

γ) Επίπεδο εμπιστοσύνης

δ) Εκτίμηση μέσω διαστήματος εμπιστοσύνης

1. Η σωστή απάντηση είναι η (β).

Ένας τρόπος εκτίμησης μιας παραμέτρου είναι να προσδιορίσουμε από το δείγμα μια τιμή για τη ζητούμενη παράμετρο μέσω του υπολογισμού της τιμής ενός εκτιμητή για μια συγκεκριμένη πραγματοποίηση του τυχαίου δείγματος. Αυτό ονομάζεται σημειακή εκτίμηση παραμέτρου και το αποτέλεσμα είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός. Παραδείγματα σημειακών εκτιμητών είναι ο δειγματικός μέσος, η δειγματική διακύμανση και η δειγματική τυπική απόκλιση.

2. Γνωρίζουμε ότι η βαθμολογία των φοιτητών στο μάθημα «Στατιστική για τη Διοίκηση Επιχειρήσεων» ακολουθεί την κανονική κατανομή με διακύμανση 144 μόρια (με άριστα το 100). Η τυπική απόκλιση του δειγματικού μέσου ενός τυχαίου δείγματος 100 βαθμολογιών φοιτητών είναι:

α) 1,2

β) 12

γ) 10

δ) δεν επαρκούν οι πληροφορίες αυτές για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης του δειγματικού μέσου

2. Η σωστή απάντηση είναι η (α).

Όταν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με γνωστή διακύμανση σ^2 ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$), τότε για την τυπική απόκλιση του δειγματικού μέσου ισχύει:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Γνωρίζουμε ότι $\sigma^2 = 144$, άρα $\sigma = 12$.

Επομένως:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{100}} = 1,2$$

3. Γνωρίζουμε ότι η βαθμολογία των φοιτητών στο μάθημα «Ποσοτικές Μέθοδοι Οικονομικής Ανάλυσης» ακολουθεί την κανονική κατανομή με άγνωστη διακύμανση. Η τυπική απόκλιση του δειγματικού μέσου ενός τυχαίου δείγματος 100 βαθμολογιών φοιτητών (για το οποίο υπολογίσαμε ότι $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 1584$) είναι:

α) 0,4

β) 1,26

γ) 4

δ) δεν επαρκούν οι πληροφορίες αυτές για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης του δειγματικού μέσου

3. Η σωστή απάντηση είναι η (α).

Όταν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με διακύμανση σ^2 ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$), την οποία όμως δεν γνωρίζουμε, χρησιμοποιούμε την δειγματική διακύμανση:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε ότι:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{100-1} \cdot 1584 = 16$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε την διακύμανση του δειγματικού μέσου από την σχέση:

$$\widehat{\sigma_{\bar{X}}^2} = \frac{s^2}{n} = \frac{16}{100} = 0,16$$

Επομένως η τυπική απόκλιση του δειγματικού μέσου είναι:

$$\widehat{\sigma_{\bar{X}}} = \sqrt{0,16} = 0,4$$

4. Υποθέστε ότι λαμβάνουμε 800 διαφορετικά τυχαία δείγματα για την εκτίμηση της διακύμανσης μιας τυχαίας μεταβλητής. Αν γνωρίζουμε ότι τα διαστήματα που περιέχουν την πραγματική τιμή της διακύμανσης είναι 730, αυτό σημαίνει ότι:

α) Υπάρχει 91,25% πιθανότητα αν λάβουμε ένα οποιοδήποτε από αυτά τα 800 δείγματα η διακύμανσή του να ισούται με την διακύμανση του πληθυσμού.

β) Υπάρχει 91,25% πιθανότητα αν λάβουμε ένα οποιοδήποτε από αυτά τα 800 δείγματα ο μέσος του να ισούται με τον μέσο του πληθυσμού.

γ) το 91,25% των δειγμάτων περιέχουν την πραγματική τιμή της διακύμανσης και αυτό δείχνει τον βαθμό εμπιστοσύνης που έχουμε ότι το διάστημα εμπιστοσύνης περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου.

δ) το 95% των δειγμάτων περιέχουν την πραγματική τιμή της διακύμανσης και αυτό δείχνει τον βαθμό εμπιστοσύνης που έχουμε ότι το διάστημα εμπιστοσύνης περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου.

4. Η σωστή απάντηση είναι η (γ).

Με βάση τα δεδομένα της ερώτησης τα διαστήματα που περιέχουν την πραγματική τιμή της διακύμανσης είναι 730, δηλαδή το 91,25%. Το επίπεδο εμπιστοσύνης ενός διαστήματος εμπιστοσύνης δείχνει τον βαθμό εμπιστοσύνης που έχουμε (δηλαδή την πιθανότητα) ότι το διάστημα εμπιστοσύνης περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου.

5. Το 98,5% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο ύψος των αγοριών 15 – 18 ετών στην Ελλάδα είναι (1,64 μέτρα, 1,87 μέτρα). Ποια από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστή σχετικά με το επίπεδο εμπιστοσύνης 98,5%;

α) Από τον συνολικό αριθμό αγοριών 15 – 18 ετών στην Ελλάδα το 98,5% έχει ύψος μεταξύ 1,64 μέτρων και 1,87 μέτρων.

β) Εάν επαναλάβουμε αυτή τη δειγματοληψία πολλές φορές, το 98,5% των διαστημάτων εμπιστοσύνης θα περιλαμβάνει την πραγματική τιμή του μέσου όρου του πληθυσμού.

γ) Υπάρχει 98,5% πιθανότητα το μέσο ύψος των αγοριών 15 – 18 ετών στην Ελλάδα να βρίσκεται μεταξύ 1,64 μέτρων και 1,87 μέτρων.

δ) Το 98,5% των διαστημάτων εμπιστοσύνης που μπορούμε να κατασκευάσουμε μετά από επαναλαμβανόμενες δειγματοληψίες για το μέσο ύψος των αγοριών 15 – 18 ετών στην Ελλάδα θα εμπίπτει στο διάστημα (1,64 μέτρα, 1,87 μέτρα).

5. Η σωστή απάντηση είναι η (β).

Το επίπεδο εμπιστοσύνης ενός διαστήματος εμπιστοσύνης δείχνει τον βαθμό εμπιστοσύνης που έχουμε (δηλαδή την πιθανότητα) ότι το διάστημα εμπιστοσύνης περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου.

6. «Ένα διάστημα εμπιστοσύνης 99% είναι μεγαλύτερο από ένα διάστημα εμπιστοσύνης 95% για την ίδια παράμετρο και με το ίδιο σύνολο δεδομένων».

α) Σωστό.

β) Λάθος.

γ) Δεν ισχύει πάντα.

δ) Δεν επαρκούν οι πληροφορίες αυτές για να βγάλουμε συμπέρασμα. Πρέπει να γνωρίζουμε και την κατανομή της εξεταζόμενης μεταβλητής.

6. Η σωστή απάντηση είναι η (α).

Το επίπεδο εμπιστοσύνης ενός ΔΕ δείχνει τον βαθμό εμπιστοσύνης που έχουμε (δηλαδή την πιθανότητα) ότι το διάστημα εμπιστοσύνης περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου. Όταν κατασκευάζουμε ένα ΔΕ 99% αυτό σημαίνει ότι το 99% των δειγμάτων περιέχουν την πραγματική τιμή της παραμέτρου που μας ενδιαφέρει, επομένως το διάστημα αυτό θα είναι οπωσδήποτε μεγαλύτερο από ένα διάστημα εμπιστοσύνης 95% για την ίδια παράμετρο και με το ίδιο σύνολο δεδομένων.

7. Η θεωρητική τιμή της τυποποιημένης κανονικής κατανομής σε επίπεδο εμπιστοσύνης 80% είναι:

α) 1,96

β) 1,64

γ) 1,28

δ) 2,33

7. Η σωστή απάντηση είναι η (γ).

Αφού πρόκειται για 80% επίπεδο εμπιστοσύνης αυτό σημαίνει ότι

$1 - \alpha = 0,80$ και $\alpha = 0,20$. Άρα ζητείται η τιμή $Z_{\alpha/2} = Z_{0,10}$.

Από τους πίνακες της τυποποιημένης κανονικής κατανομής βρίσκουμε ότι $Z_{0,10} = 1,28$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84850	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92786	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408

8. Γνωρίζουμε ότι ένα διάστημα εμπιστοσύνης 93% για τη μέση βαθμολογία στην Πληροφορική των φοιτητών του δεύτερου έτους είναι (47, 65). Ας υποθέσουμε ότι υπολογίζουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης 97% για τη μέση βαθμολογία στην Πληροφορική χρησιμοποιώντας τον ίδιο πληθυσμό φοιτητών. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

α) Τα διαστήματα έχουν το ίδιο πλάτος.

β) Το διάστημα 93% είναι μικρότερο.

γ) Το διάστημα 93% είναι μεγαλύτερο.

δ) δεν επαρκούν οι πληροφορίες αυτές για να βγάλουμε συμπέρασμα. Πρέπει να γνωρίζουμε και την κατανομή της εξεταζόμενης μεταβλητής.

8. Η σωστή απάντηση είναι η (β).

Το επίπεδο εμπιστοσύνης ενός διαστήματος εμπιστοσύνης δείχνει τον βαθμό εμπιστοσύνης που έχουμε (δηλαδή την πιθανότητα) ότι το διάστημα εμπιστοσύνης περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου. Όταν κατασκευάζουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης 97% αυτό σημαίνει ότι το 97% των δειγμάτων περιέχουν την πραγματική τιμή της παραμέτρου που μας ενδιαφέρει, επομένως το διάστημα αυτό θα είναι οπωσδήποτε μεγαλύτερο από ένα διάστημα εμπιστοσύνης 93% για την ίδια παράμετρο και με το ίδιο σύνολο δεδομένων.

9. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης 80% για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού με άγνωστη διακύμανση. Το μέγεθος του δείγματος είναι 28. Η θεωρητική τιμή της κατανομής Student t που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για το διάστημα αυτό είναι:

α) 0,80

β) 1,645

γ) 1,96

δ) 1,314

9. Η σωστή απάντηση είναι η (δ).

Αφού πρόκειται για 80% διάστημα εμπιστοσύνης αυτό σημαίνει ότι $1 - \alpha = 0,80$ και $\alpha = 0,20$.

Άρα ζητείται η τιμή $t_{n-1, \alpha/2} = t_{27, 0,10}$

Από τους πίνακες της κατανομής Student t βρίσκουμε ότι $t_{27, 0,10} = 1,314$.

v	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$
1	3,078	6,314
2	1,886	2,920
3	1,638	2,353
4	1,533	2,132
5	1,476	2,015
6	1,440	1,943
7	1,415	1,895
8	1,397	1,860
9	1,383	1,833
10	1,372	1,812
11	1,363	1,796
12	1,356	1,782
13	1,350	1,771
14	1,345	1,761
15	1,341	1,753
16	1,337	1,746
17	1,333	1,740
18	1,330	1,734
19	1,328	1,729
20	1,325	1,725
21	1,323	1,721
22	1,321	1,717
23	1,319	1,714
24	1,318	1,711
25	1,316	1,708
26	1,315	1,706
27	1,314	1,703
28	1,313	1,701
29	1,311	1,699
∞	1,282	1,645

Οι επόμενες ερωτήσεις 10 – 14 να απαντηθούν με βάση τα ακόλουθα δεδομένα από ένα δείγμα 25 παρατηρήσεων ενός κανονικού πληθυσμού με άγνωστη διακύμανση. Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης 95% για τη μέση τιμή του πληθυσμού αυτού.

50		82		112		118		92
52		54		106		124		112
64		46		110		116		64
42		70		114		142		76
58		94		108		138		45

10. Ποια είναι η σημειακή εκτίμηση για τον μέσο μ του πληθυσμού;

α) 45

β) 87,56

γ) 25

δ) 102

10. Η σωστή απάντηση είναι η (β).

Η μέση τιμή του δείγματος υπολογίζεται ως εξής:

$$\bar{X} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} X_i = 87,56$$

11. Ποια είναι η θεωρητική τιμή της κατανομής Student t που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για το διάστημα αυτό;

α) 2,064

β) 1,645

γ) 1,96

δ) 0,95

11. Η σωστή απάντηση είναι η (α).

Αφού πρόκειται για 95% διάστημα εμπιστοσύνης αυτό σημαίνει ότι $1 - \alpha = 0,95$ και $\alpha = 0,05$. Άρα

ζητείται η τιμή $t_{n-1, \alpha/2} = t_{24, 0,025}$

Από τους πίνακες της κατανομής Student t

βρίσκουμε ότι $t_{24, 0,025} = 2,064$.

v	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,025$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,005$
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

12. Ποια είναι η τυπική απόκλιση του δείγματος;

α) 0,95

β) 87,56

γ) 31,4

δ) 6,28

12. Η σωστή απάντηση είναι η (γ).

Εφόσον η διακύμανση είναι άγνωστη θα πρέπει να την εκτιμήσουμε από την σχέση:

$$s^2 = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι:

$$s = 31,4$$

13. Ποιο είναι το τυπικό σφάλμα του δειγματικού μέσου;

α) 0,95

β) 87,56

γ) 31,4

δ) 6,28

13. Η σωστή απάντηση είναι η (δ).

Το τυπικό σφάλμα του δειγματικού μέσου είναι:

$$S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = 6,28$$

14. Ποιο είναι το διάστημα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής της τυχαίας μεταβλητής X σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%;

α) [87,56, 100,5]

β) [74,6, 100,5]

γ) [46,57, 43,43]

δ) [100,5, 87,56]

14. Η σωστή απάντηση είναι η (β).

Δεδομένου ότι το ζητούμενο ΔΕ πρέπει να παρέχει 95% επίπεδο εμπιστοσύνης, δηλαδή $1 - \alpha = 0,95$, έχουμε $\alpha = 0,05$ και επομένως $t_{24, 0,025} = 2,064$ (για $n - 1 = 25 - 1 = 24$ β.ελ.).

Επομένως τα όρια του ΔΕ είναι:

$$[\ell, u] = \left[\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \right] \Rightarrow$$

$$[\ell, u] = [87,56 - 6,28 \cdot 2,064, 87,56 + 6,28 \cdot 2,064] \Rightarrow$$
$$[\ell, u] = [74,6, 100,5]$$

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε 95% εμπιστοσύνη πως η αληθινή τιμή του μέσου μ βρίσκεται μέσα σε αυτό το διάστημα.

15. Ποια από τις παρακάτω προϋποθέσεις είναι απαραίτητη προκειμένου να γίνει χρήση της κατανομής t του Student για την εύρεση ενός διαστήματος εμπιστοσύνης για τον μέσο μιας τυχαίας μεταβλητής X σε δείγματα μεγέθους $n < 30$:

- (α) να είναι γνωστή η διακύμανση
- (β) το δείγμα να προέρχεται από έναν κανονικό πληθυσμό
- (γ) η δειγματική τυπική απόκλιση να είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια
- (δ) όλα τα παραπάνω

15. Η σωστή απάντηση είναι η (β).

Σε περίπτωση που **δεν** γνωρίζουμε την διακύμανση του πληθυσμού σ^2 και το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό τότε η κατανομή του μέσου είναι η κατανομή t με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας.