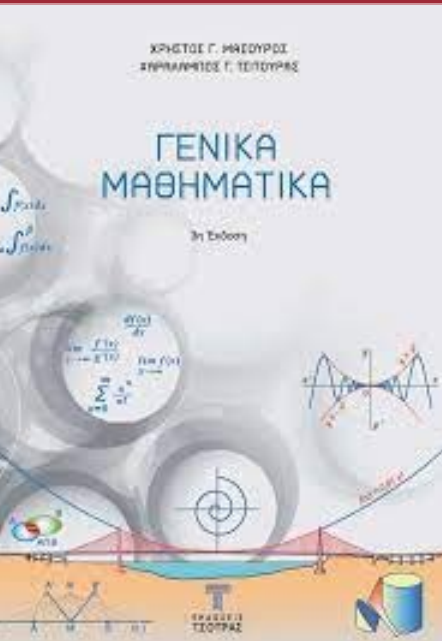




ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Τμήμα: Αγροτικής Ανάπτυξης, Αγροδιατροφής και
Διαχείρισης Φυσικών Πόρων
Μάθημα: Μαθηματικά
Ενότητα: Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού
Λογισμού



Σταμάτης Βολιώτης

9^ο μάθημα

Οι διαφάνειες έχουν βασισθεί στο βιβλίο:
Γενικά Μαθηματικά, Μασούρος, Τσίτουρας

Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

Θεώρημα 1.1. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$, τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

είναι συνεχής στο $[a, b]$.

Η f μπορεί να μην είναι συνεχής, καθώς η συνέχεια δεν αποτελεί προϋπόθεση της ολοκληρωσιμότητας, όμως η $F(x)$ είναι πάντοτε συνεχής.

Θεώρημα 1.2. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ και έστω η συνάρτηση F που ορίζεται από τον τύπο

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

Αν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο c του $[a, b]$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο c και

$$F'(c) = f(c)$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

Θεώρημα 2.1. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ και έστω ότι $f = g'$ για κάποια συνάρτηση g . Τότε

$$\int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a)$$

Μας δίνεται ένα εργαλείο για να υπολογίζουμε ολοκληρώματα χωρίς να είμαστε αναγκασμένοι να καταφύγουμε στον υπολογισμό των άνω και κάτω αθροισμάτων

Παράδειγμα:

$$g(x) = \frac{x^3}{3} \quad \text{και} \quad f(x) = x^2$$

τότε, $g'(x) = f(x)$, οπότε, λόγω του Δευτέρου Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού, παίρνουμε απευθείας ότι

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \quad (1)$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

για την διαφορά $g(b) - g(a)$ χρησιμοποιήθηκαν τα σύμβολα

$$g(x)\Big|_a^b = g(b) - g(a) \quad \text{ή} \quad [g(x)]_a^b = g(b) - g(a)$$

Παράδειγμα:

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

$$\int_a^b e^x dx =$$

$$y = e^x$$

$$y' = e^x$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

$$\int_a^b e^x dx = e^x \Big|_a^b = e^b - e^a$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx =$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x \, dx =$$

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$y = \cos x$$

$$y' = -\sin x$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = 0$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right) = 1 - (-1) = 2$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

$$\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

$$\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_1^9 = 2\sqrt{9} - 2\sqrt{1} = 4$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

$$\int_3^9 \frac{dx}{x} =$$

$$y = \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

$$\int_3^9 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_3^9 = \ln 9 - \ln 3 = \ln \frac{9}{3} = \ln 3$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

$$\int_{-1}^1 \frac{3dx}{9x^2 + 9} =$$

$$y = \arctan x$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

$$\int_{-1}^1 \frac{3dx}{9x^2 + 9} = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{3} \arctan x \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{3} [\arctan 1 - \arctan(-1)] = \frac{1}{3} \left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{6}$$

Η παραγωγή και η ολοκλήρωση ως αντίστροφες διαδικασίες

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

- αν ξεκινήσουμε με μια συνεχή συνάρτηση f , την ολοκληρώσουμε ώστε να επιτύχουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_a^x f(t) dt$$

- και στη συνέχεια την παραγωγίσουμε, τότε το αποτέλεσμα είναι η αρχική συνάρτηση f . Έτσι η παραγωγή εξουδετέρωσε την ολοκλήρωση.

Η παραγωγή και η ολοκλήρωση ως αντίστροφες διαδικασίες

- Αντίστροφα τώρα, αν ξεκινήσουμε με μια συνάρτηση F η οποία να έχει συνεχή παράγωγο, πρώτα παραγωγίσουμε και στη συνέχεια ολοκληρώσουμε, έχουμε κατασκευάσει το:

$$\int_a^x F'(t) dt$$

- Όμως από το δεύτερο θεμελιώδες Θεώρημα του απειροστικού λογισμού ισχύει η ισότητα:

$$\int_a^x F'(t) dt = F(x) - F(a)$$

- Έτσι έχουμε στα χέρια μας την αρχική συνάρτηση, αλλαγμένη ίσως κατά μία σταθερά.

Η παραγωγή και η ολοκλήρωση ως αντίστροφες διαδικασίες

Μια συνάρτηση F , για την οποία ισχύει $F' = f$, ονομάζεται παράγουσα της f . Γενικά είναι όλες οι συναρτήσεις της μορφής $F + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f .

Γενικά χρησιμοποιούμε το σύμβολο

$$\int f(x) dx$$

για να συμβολίσουμε την συλλογή των παραγουσών συναρτήσεων της f .

Μια συνάρτηση από το $\int f(x) dx$, δηλαδή μια παράγουσα της f , την ονομάζουμε **αόριστο ολοκλήρωμα** της f , ενώ το $\int_a^b f(x) dx$ λέγεται, σε αντιδιαστολή, **ορισμένο ολοκλήρωμα**.

Η παραγωγή και η ολοκλήρωση ως αντίστροφες διαδικασίες

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \text{ όπου } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη για όλες τις τιμές του x , όταν $a \leq x < +\infty$. Τότε το ολοκλήρωμα

$$I(b) = \int_a^b f(x) dx$$

υπάρχει και η συνάρτηση $I(b)$ είναι «καλά ορισμένη» για κάθε $b > a$. Είναι προφανές να αναρωτηθούμε τι συμβαίνει όταν $b \rightarrow +\infty$.

Ορισμός 4.1. Αν το όριο

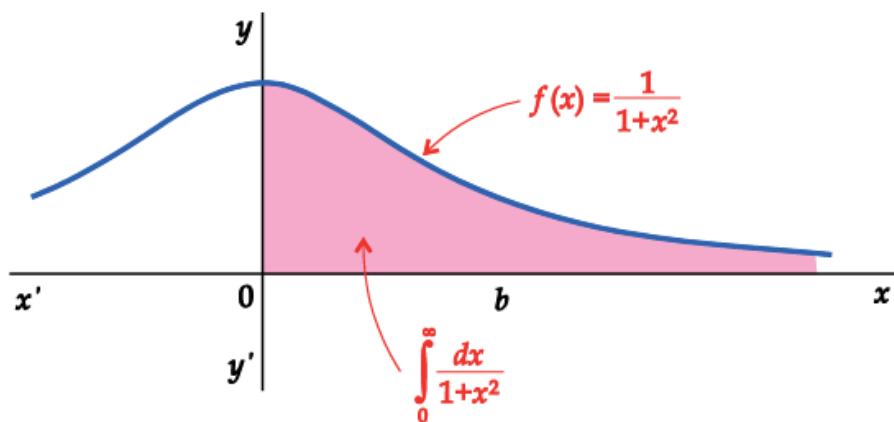
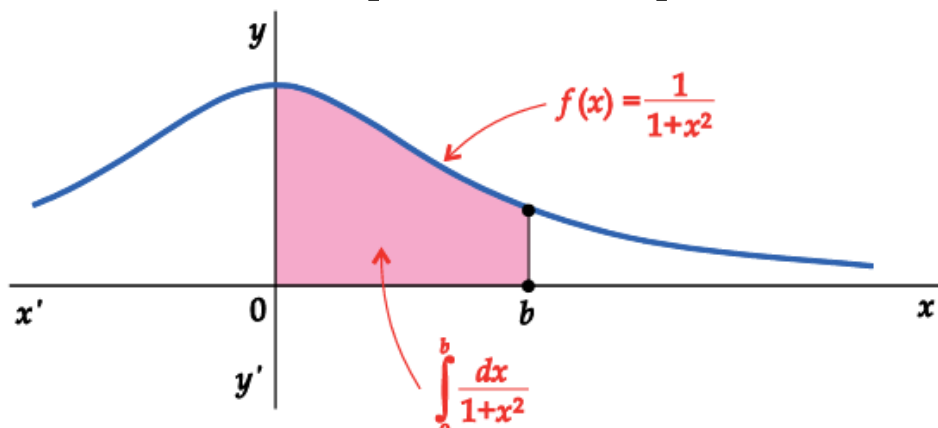
$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε αυτό καλείται **γενικευμένο ολοκλήρωμα** της συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[a, +\infty)$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Αν το όριο στον ορισμού 4.1 υπάρχει και είναι πεπερασμένο, συνηθίζουμε να λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα **συγκλίνει**. Στην αντίθετη περίπτωση λέμε ότι **αποκλίνει**.

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα



$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι ένα «άπειρο χωρίο», με την έννοια μιας περιοχής η οποία δεν περικλείεται παντού από όρια, μπορεί να έχει πεπερασμένο εμβαδόν.

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

Ορισμός 4.2. Αν το όριο

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε αυτό καλείται **γενικευμένο ολοκλήρωμα** της συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $(-\infty, b]$ και συμβολίζεται με

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

Ορισμός 4.3. Αν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx \quad \text{και} \quad \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

υπάρχουν, τότε ορίζουμε

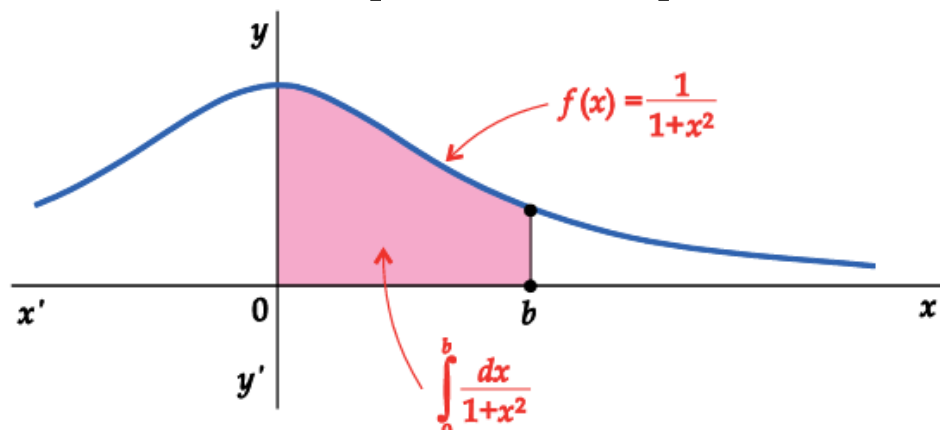
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα του ορισμού 4.3 λέμε ότι συγκλίνει, αν αμφότερα τα

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx \quad \text{και} \quad \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

συγκλίνουν.

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα



$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow -\infty} [\arctan x]_t^0 + \lim_{t \rightarrow +\infty} [\arctan x]_0^t = \\
 &= \lim_{t \rightarrow -\infty} [\arctan 0 - \arctan t] + \lim_{t \rightarrow +\infty} [\arctan t - \arctan 0] = \\
 &= 0 - \lim_{t \rightarrow -\infty} [\arctan t] + \lim_{t \rightarrow +\infty} [\arctan t] - 0 = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

Θεώρημα 4.1. Αν για κάθε x , $x \geq a$, ισχύει η ανισότητα:

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

και το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ συγκλίνει, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ επίσης συγκλίνει, και

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

Θεώρημα 4.2. Αν για κάθε x , $x \geq a$, ισχύει η ανισότητα:

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

και το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ αποκλίνει, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ επίσης αποκλίνει

Θεώρημα 4.2. Αν το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ συγκλίνει, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

επίσης αποκλίνει
συγκλίνει

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

Ένας άλλος τύπος γενικευμένων ολοκληρωμάτων εμφανίζεται όταν η συνάρτηση που ολοκληρώνεται τείνει στο $\pm\infty$, σε ένα από τα δύο ή και στα δύο όρια της ολοκλήρωσης, δηλαδή όταν η συνάρτηση αυτή δεν είναι φραγμένη σε ένα από τα δύο άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης, ή και στα δύο άκρα. Στην περίπτωση αυτή έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 4.4. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b)$, αλλά $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$, τότε ορίζουμε

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

Αντίστοιχα αν η f είναι συνεχής στο $(a, b]$ αλλά $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$, τότε ορίζουμε

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

Τέλος, αν η f είναι συνεχής στο (a, b) , αλλά δεν είναι φραγμένη στα a, b , λέμε ότι το

γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$ συγκλίνει, αν για κάποιο σημείο $c \in (a, b)$,

αμφότερα τα $\int_a^c f(x) dx$ και $\int_c^b f(x) dx$ συγκλίνουν. Στην περίπτωση αυτή,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

► **Παράδειγμα 4.6.** Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

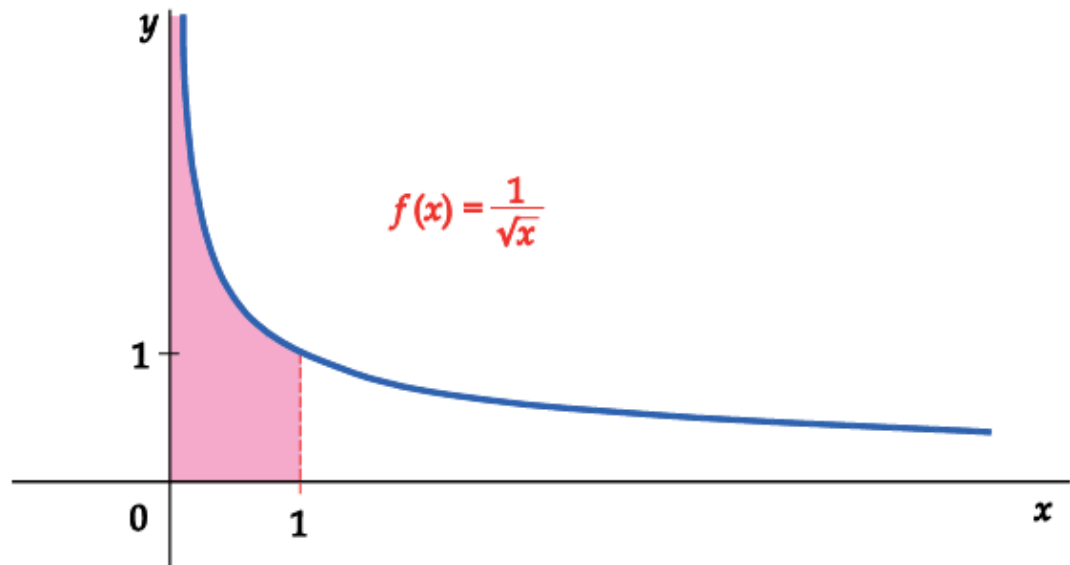
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$$

συγκλίνει.

Πράγματι, η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0,1]$ αλλά δεν είναι φραγμένη στο 0. Σύμφωνα με τον ορισμό 4.4 έχουμε:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_t^1 = 2 \left(1 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \right) = 2$$

Επομένως το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει και η τιμή του είναι 2. Αυτό σημαίνει ότι η σκιασμένη περιοχή του σχήματος 3 είναι 2.



Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

► Παράδειγμα 4.7. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

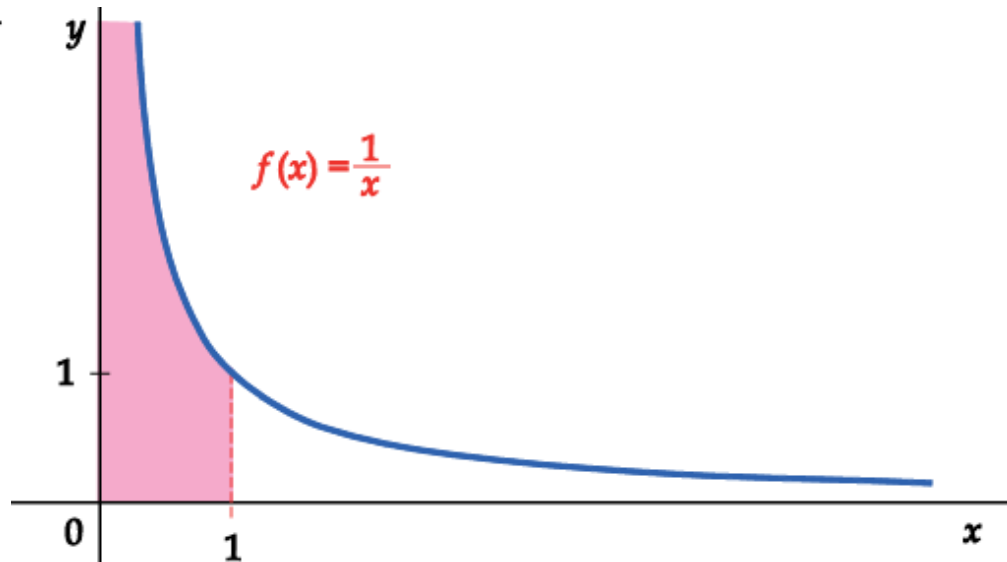
$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

αποκλίνει.

Πράγματι, η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0,1]$ αλλά δεν είναι φραγμένη στο 0. Σύμφωνα λοιπόν με τον ορισμό 4.4 έχουμε:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln x \Big|_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln t) = - \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = \infty$$

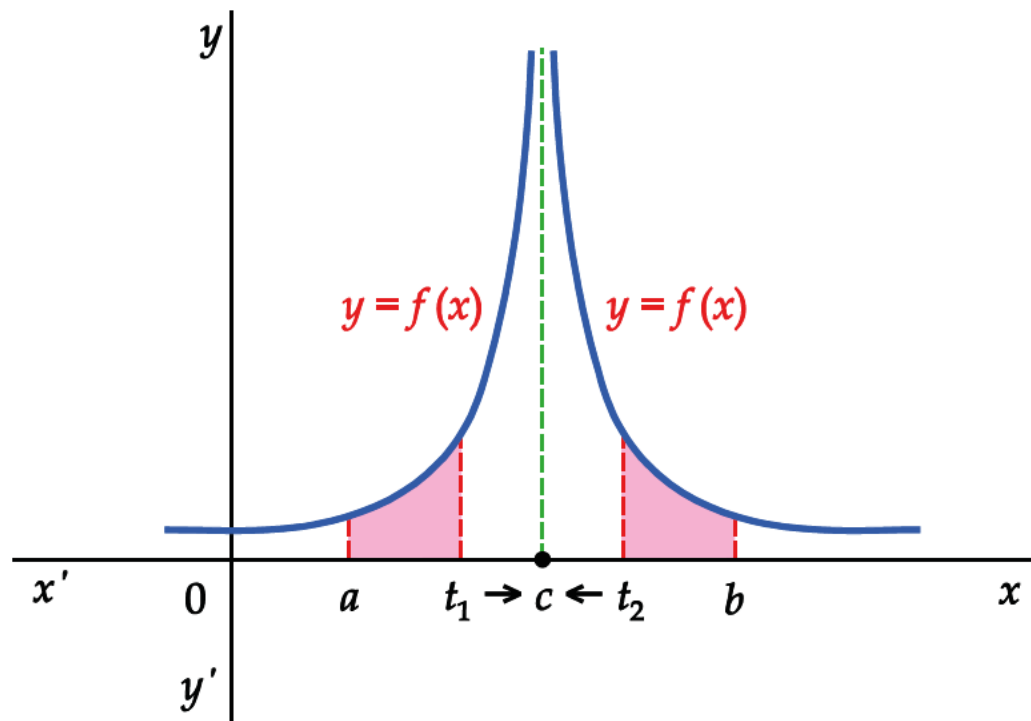
Επομένως το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι η σκιασμένη περιοχή του σχήματος 4 έχει άπειρο εμβαδόν.



Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

Μια άλλη περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος εμφανίζεται όταν η συνάρτηση που ολοκληρώνεται τείνει στο $\pm\infty$ σε ένα σημείο c , εντός του διαστήματος ολοκλήρωσης $[a,b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{t_1 \rightarrow c^-} \int_a^{t_1} f(x) dx + \lim_{t_2 \rightarrow c^+} \int_{t_2}^b f(x) dx$$



$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

i. $\int_0^1 x^{\mu+3} dx$

ii. $\int_{-1/2}^{3/4} x^{\mu+3} dx$

iii. $\int_0^{\pi/4} \cos((\mu+3)x) dx$

iv. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin((\mu+3)x) dx$

v. $\int_1^e (1 + \ln x) dx$

Αριθμητική Ολοκλήρωση

- Η πιθανότητα να μπορέσουμε να βρούμε το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης είναι απειροελάχιστη. Ακόμη και απλές περιπτώσεις δεν οδηγούν σε αποτέλεσμα με αναλυτικό τύπο, π.χ.:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad \int_0^1 \sin x^2 dx,$$

$$\int_0^1 \cos x^2 dx, \quad \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{1}{2 + \sin x}} dx.$$

Όμως υπάρχουν,
αφού είναι κάποια
συγκεκριμένα
εμβαδά

- Το Θεώρημα Taylor είναι ένα πολύ ισχυρό υπολογιστικό εργαλείο για την προσέγγιση συναρτήσεων
- Προσέγγιση της μορφής:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

όπου w_i βάρη και x_i σημεία στο διάστημα ολοκλήρωσης $[a, b]$

Αριθμητική Ολοκλήρωση

- Διάφορες προσεγγίσεις:

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x) dx \approx 2h f(x_0 + h)$$

$$\int_{x_0}^{x_0+3h} f(x) dx \approx \frac{3h}{2} (f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h))$$

$$\int_{x_0}^{x_0+4h} f(x) dx \approx \frac{4h}{3} (2f_1 - f_2 + 2f_3)$$

τύποι Newton – Cotes

- μέσον σημείου
- μέθοδος τραπεζίου
- Milne

Αριθμητική Ολοκλήρωση

- Διάφορες προσεγγίσεις:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n w_i f(x_0 + c_i h)$$

Τύποι Gauss

- **n=1**
- **n=2**
- **n=3**

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx \approx h f\left(x_0 + \frac{1}{2}h\right)$$

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx \approx h \left[\frac{1}{2} f\left(x_0 + \frac{1}{6}(3 - \sqrt{3})h\right) + \frac{1}{2} f\left(x_0 + \frac{1}{6}(3 + \sqrt{3})h\right) \right]$$

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx \approx h (w_1 f(x_0 + c_1 h) + w_2 f(x_0 + c_2 h) + w_3 f(x_0 + c_3 h))$$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Τύποι βασικών ολοκληρωμάτων

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Τύποι βασικών ολοκληρωμάτων

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Τύποι βασικών ολοκληρωμάτων

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + c$$

$$\int \tanh x \, dx = \ln |\cosh x| + c$$

$$\int \coth x \, dx = \ln |\sinh x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Τύποι βασικών ολοκληρωμάτων

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Τύποι βασικών ολοκληρωμάτων

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση Αθροίσματος

$$\int [c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)] dx = c_1 \int f_1(x) dx + \dots + c_n \int f_n(x) dx$$

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)] dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + \dots + c_n \int_a^b f_n(x) dx$$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση Αθροίσματος

Παράδειγμα 1.1. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i. $\int (2x^4 - 5 \sin x + 7\sqrt{x}) dx$

ii. $\int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^2 dx$

iii. $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x} dx$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση Αθροίσματος

Παράδειγμα 1.1. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\text{i. } \int (2x^4 - 5 \sin x + 7\sqrt{x}) dx \quad \text{ii. } \int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^2 dx \quad \text{iii. } \int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x} dx$$

$$\begin{aligned} \text{i. } \int (2x^4 - 5 \sin x + 7\sqrt{x}) dx &= 2 \int x^4 dx - 5 \int \sin x dx + 7 \int \sqrt{x} dx = \\ &= 2 \frac{x^{4+1}}{4+1} - 5(-\cos x) + 7 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = 2 \frac{x^5}{5} + 5 \cos x + 14 \frac{x\sqrt{x}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^2 dx &= \int x^{1/2} (1 + x^{1/3})^2 dx = \int x^{1/2} (1 + 2x^{1/3} + x^{2/3}) dx = \\ &= \int x^{1/2} dx + 2 \int x^{5/6} dx + \int x^{7/6} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{12}{11} x^{11/6} + \frac{6}{13} x^{13/6} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii. } \int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x} dx &= \int \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x} dx = \int \frac{x}{x} dx - 2 \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx + \int \frac{1}{x} dx = \\ &= \int dx - 2 \int x^{-1/2} dx + \int \frac{1}{x} dx = x - 4\sqrt{x} + \ln x + c \end{aligned}$$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Θεώρημα 2.1. Αν οι f' και g' είναι συνεχείς, τότε:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Παράδειγμα 2.1. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i. $\int \ln x \, dx$

ii. $\int x \ln x \, dx$

iii. $\int x^n \ln x \, dx$

iv. $\int (\ln x)^2 \, dx$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Παράδειγμα 2.1. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i. $\int \ln x \, dx$

ii. $\int x \ln x \, dx$

iii. $\int x^n \ln x \, dx$

iv. $\int (\ln x)^2 \, dx$

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= \int (x)' (\ln x) \, dx = x \ln x - \int x (\ln x)' \, dx = \\ &= x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x \ln x \, dx &= \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' (\ln x) \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} (\ln x)' \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + c\end{aligned}$$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\begin{aligned}\text{iii. } \int x^n \ln x \, dx &= \int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' (\ln x) \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)' \, dx = \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx = \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} + c = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{iv. } \int (\ln x)^2 \, dx &= \int (x)' (\ln x)^2 \, dx = x (\ln x)^2 - \int x \left[(\ln x)^2 \right]' \, dx = \\ &= x (\ln x)^2 - \int x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot (\ln x)' \, dx = x (\ln x)^2 - \int x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\ &= x (\ln x)^2 - 2 \int \ln x \, dx\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τώρα το ολοκλήρωμα $\int \ln x \, dx$ από το (i) έχουμε:

$$\int (\ln x)^2 \, dx = x (\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c = x \left[(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2 \right] + c \quad \blacktriangleleft$$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

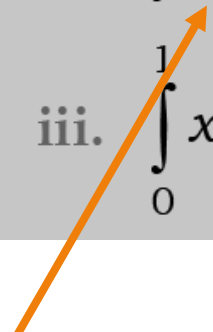
Παράδειγμα 2.2. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i. $\int x e^x dx$

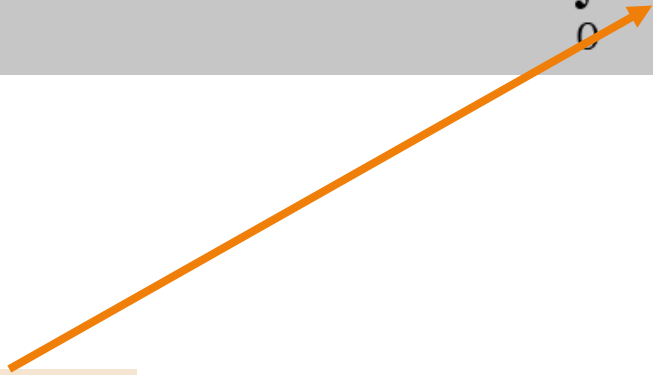
ii. $\int x a^x dx$

iii. $\int_0^1 x e^{-x} dx$

iv. $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

$$x(e^x)'$$


$$-x(e^{-x})'$$


$$-x^2(e^{-x})'$$


Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Παράδειγμα 2.2. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i. $\int x e^x dx$

ii. $\int x a^x dx$

iii. $\int_0^1 x e^{-x} dx$

iv. $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

i. $\int x e^x dx = \int x (e^x)' dx = x e^x - \int x' e^x dx = (x-1)e^x + c$

iii. $\int_0^1 x e^{-x} dx = -\int_0^1 x (e^{-x})' dx = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx =$

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$
$$= -x e^{-x} \Big|_0^1 - e^{-x} \Big|_0^1 = -e^{-1} - (e^{-1} - 1) = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}$$

iv. $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -\int_0^1 x^2 (e^{-x})' dx = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} (x^2)' dx =$

$$= -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} 2x dx = -e^{-1} + 2 \int_0^1 x e^{-x} dx$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα το έχουμε ήδη υπολογίσει στο (iii), οπότε:

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 2 \frac{e-2}{e} = \frac{2e-5}{e} \blacktriangleleft$$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

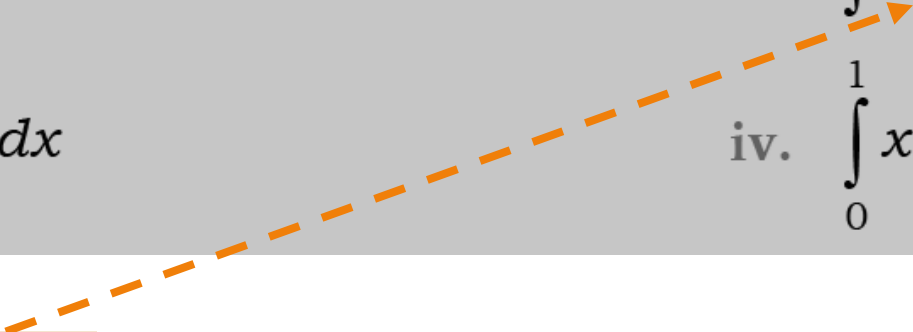
Παράδειγμα 2.2. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i. $\int x e^x dx$

ii. $\int x a^x dx$

iii. $\int_0^1 x e^{-x} dx$

iv. $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$


$$x(a^x)'$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Παράδειγμα 2.2. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i. $\int x e^x dx$

ii. $\int x a^x dx$

iii. $\int_0^1 x e^{-x} dx$

iv. $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \int x a^x dx &= \frac{1}{\ln a} \int x a^x \ln a dx = \frac{1}{\ln a} \int x (a^x)' dx = \frac{1}{\ln a} \left(x a^x - \int a^x dx \right) = \\ &= \frac{1}{\ln a} \left(x a^x - \frac{1}{\ln a} a^x \right) + c = \frac{a^x}{\ln a} \left(x - \frac{1}{\ln a} \right) + c \end{aligned}$$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Παράδειγμα 2.4. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i. $\int x \cos x \, dx$

ii. $\int x \sin x \, dx$

iii. $\int x \cosh x \, dx$

iv. $\int x \sinh x \, dx$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Παράδειγμα 2.4. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i. $\int x \cos x \, dx$

ii. $\int x \sin x \, dx$

iii. $\int x \cosh x \, dx$

iv. $\int x \sinh x \, dx$

i. $\int x \cos x \, dx = \int x (\sin x)' \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + c$

ii. $\int x \sin x \, dx = - \int x (\cos x)' \, dx = - \left(x \cos x - \int \cos x \, dx \right) = -x \cos x + \sin x + c$

iii. $\int x \cosh x \, dx = \int x (\sinh x)' \, dx = x \sinh x - \int \sinh x \, dx = x \sinh x - \cosh x + c$

iv. $\int x \sinh x \, dx = \int x (\cosh x)' \, dx = x \cosh x - \int \cosh x \, dx = x \cosh x - \sinh x + c \quad \blacktriangleleft$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Θεώρημα 3.1. Έστω οι συναρτήσεις f , g με συνεχείς της $g \circ f$ και f' σε ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών. Αν η G είναι η παράγουσα της g , τότε:

$$\int g(f(x)) f'(x) dx = G(f(x)) + c$$

$$\int \overbrace{g[f(x)]}^u \overbrace{f'(x) dx}^{du} = \int g(u) du = G(u) + c = G(f(x)) + c$$

$$\int_a^b \overbrace{g[f(x)]}^u \overbrace{f'(x) dx}^{du} = G(f(b)) - G(f(a)) = \int_{u(a)=f(a)}^{u(b)=f(b)} g(u) du$$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Παράδειγμα 2.4. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i. $\int 3x^2(x^3 + 5)dx$

ii. $\int (x^3 + 2x + 6)(3x^2 + 2)dx$

$$\int \overbrace{(x^3 + 5)}^u \overbrace{(3x^2)}^{du} dx$$

$$\int \overbrace{(x^3 + 2x + 6)}^u \overbrace{(3x^2 + 2)}^{du} dx$$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Παράδειγμα 2.4. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i. $\int 3x^2(x^3 + 5)dx$

ii. $\int (x^3 + 2x + 6)(3x^2 + 2)dx$

Λύση. i. Θέτουμε $u = x^3 + 5$ οπότε $du = 3x^2 dx$. Τότε

$$\int 3x^2(x^3 + 5)dx = \int \overbrace{(x^3 + 5)}^u \overbrace{(3x^2)}^{du} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + c$$

Άρα

$$\int 3x^2(x^3 + 5)dx = \frac{1}{2}(x^3 + 5)^2 + c$$

ii. Θέτουμε $u = x^3 + 2x + 6$ οπότε $du = (3x^2 + 2)dx$. Τότε

$$\begin{aligned} \int (x^3 + 2x + 6)(3x^2 + 2)dx &= \int \overbrace{(x^3 + 2x + 6)}^u \overbrace{(3x^2 + 2)}^{du} dx = \\ &= \int u du = \frac{u^2}{2} + c \end{aligned}$$

Επομένως

$$\int (x^3 + 2x + 6)(3x^2 + 2)dx = \frac{1}{2}(x^3 + 2x + 6)^2 + c \quad \blacktriangleleft$$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

► Παράδειγμα 3.2. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i. $\int 3x^2 (x^3 + 5)^7 dx$

ii. $\int (x^3 + 2x + 6)^9 (3x^2 + 2) dx$

Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

► Παράδειγμα 3.2. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i. $\int 3x^2 (x^3 + 5)^7 dx$

ii. $\int (x^3 + 2x + 6)^9 (3x^2 + 2) dx$

Λύση. i. Θέτουμε $u = x^3 + 5$ οπότε $du = 3x^2 dx$. Άρα

$$\int 3x^2 (x^3 + 5)^7 dx = \int \overbrace{(x^3 + 5)^7}^{u^7} \overbrace{(3x^2) dx}^{du} = \int u^7 du = \frac{u^8}{8} + c$$

Συνεπώς

$$\int 3x^2 (x^3 + 5)^7 dx = \frac{1}{8} (x^3 + 5)^8 + c$$

ii. Θέτουμε $u = x^3 + 2x + 6$ οπότε $du = (3x^2 + 2) dx$. Τότε

$$\int (x^3 + 2x + 6)^9 (3x^2 + 2) dx = \int \overbrace{(x^3 + 2x + 6)^9}^{u^9} \overbrace{(3x^2 + 2) dx}^{du} = \int u^9 du = \frac{u^{10}}{10} + c$$

Επομένως

$$\int (x^3 + 2x + 6)^9 (3x^2 + 2) dx = \frac{1}{10} (x^3 + 2x + 6)^{10} + c \quad \blacktriangleleft$$

