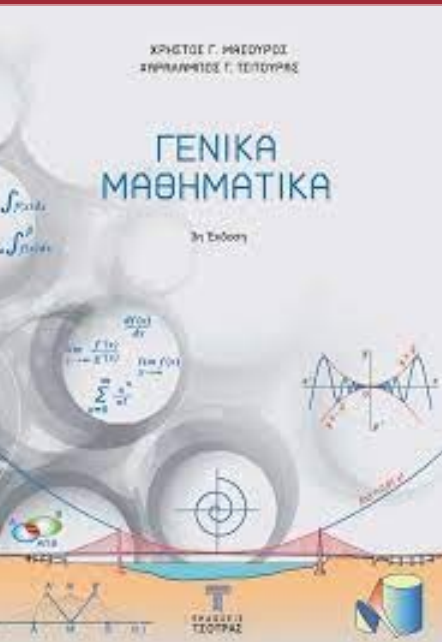




ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Τμήμα: Αγροτικής Ανάπτυξης, Αγροδιατροφής και
Διαχείρισης Φυσικών Πόρων
Μάθημα: Μαθηματικά
Ενότητα: Πίνακες - Γραμμικά Συστήματα



Σταμάτης Βολιώτης

10^ο μάθημα

Οι διαφάνειες έχουν βασισθεί στο βιβλίο:
Γενικά Μαθηματικά, Μασούρας, Τσίτουρας

Γραμμικές εξισώσεις

Μια ευθεία σε ένα καρτεσιανό επίπεδο είναι μια εξίσωση της μορφής

$$a_1x + a_2y = b$$

Μια εξίσωση της παραπάνω μορφής ονομάζεται γραμμική εξίσωση ως προς τις μεταβλητές x και y . Γενικότερα ονομάζουμε γραμμική εξίσωση n αγνώστων $x_1, x_2, \dots, x_n$ κάθε εξίσωση της μορφής

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

όπου $a_1, a_2, \dots, a_n$ και b είναι πραγματικοί αριθμοί.

$$2x + 3y = 5,$$

$$y = 2x + 3z - 1$$

$$2x + 3y^2 = 5,$$

$$y = 2 \cos x + 3z - 1$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 9$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1x_2 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 9$$

$$\sqrt{x_1} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

?

Γραμμικές εξισώσεις

Ορισμός 1.1. Έστω μια γραμμική εξίσωση

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

Μια **λύση** της εξίσωσης αυτής είναι n αριθμοί $s_1, s_2, \dots, s_n$ οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση αν θέσουμε:

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$$

Όλες οι λύσεις που ικανοποιούν την γραμμική εξίσωση αποτελούν το **σύνολο των λύσεων** ή τη **γενική λύση** της εξίσωσης.

Ορισμός 1.2. Ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους $x_1, x_2, \dots, x_n$, ονομάζεται **σύστημα γραμμικών εξισώσεων** ή απλά **γραμμικό σύστημα**. Οι n αριθμοί $s_1, s_2, \dots, s_n$ ονομάζονται **λύση** του συστήματος αν:

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$$

είναι λύση κάθε εξίσωσης του συστήματος.

Γραμμικές εξισώσεις

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$

$$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$$

?

$$x_1 = 1, x_2 = 8, x_3 = 1$$

?

Γραμμικές εξισώσεις

$$x + y = 5$$

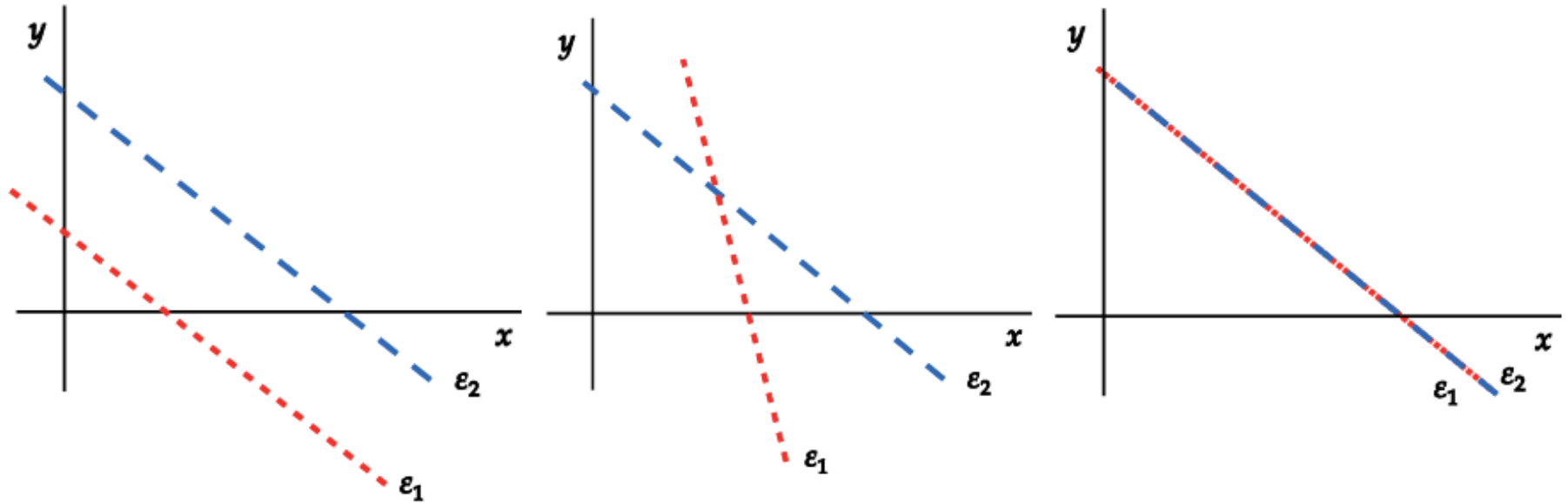
$$x + y = 6$$

?

Γραμμικές εξισώσεις

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$



Γραμμικές εξισώσεις

Θεώρημα 1.1. Κάθε σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει ή μια λύση, ή άπειρες λύσεις, ή καμία λύση.

Όταν το σύστημα έχει μια λύση, ονομάζεται **συμβιβαστό**, ενώ όταν δεν έχει λύση ονομάζεται **αδύνατο**.

Γραμμικά συστήματα

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Η χρήση των δύο δεικτών στους συντελεστές των αγνώστων αποδεικνύεται ένας πολύ χρήσιμος συμβολισμός, καθώς μας δίνει πολλές πληροφορίες. Ο πρώτος δείκτης του τυχόντος συντελεστή a_{ij} μας φανερώνει σε ποια εξίσωση ανήκει ο συντελεστής αυτός και ο δεύτερος ποιόν άγνωστο πολλαπλασιάζει. Έτσι, π.χ. ο συντελεστής a_{21} βρίσκεται στην δεύτερη εξίσωση και πολλαπλασιάζει τον άγνωστο x_1 .

Γραμμικά συστήματα

Η απλούστερη περίπτωση γραμμικού συστήματος είναι όταν ο αριθμός των αγνώστων είναι ίσος με τον αριθμό των εξισώσεων

- Η μέθοδος των οριζουσών
- Η μέθοδος της απαλοιφής

Γραμμικά συστήματα

Ας θεωρήσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}2x + y + z &= 5 \\4x - 6y + 3z &= 4 \\-2x + 15y + z &= 15\end{aligned}$$

Η μέθοδος ξεκινά προσθαφαιρώντας πολλαπλάσια της πρώτης εξίσωσης στις υπόλοιπες, έτσι ώστε να απαλειφθεί ο άγνωστος x από τις δύο τελευταίες εξισώσεις. Έτσι

- (α) πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί -2 και την προσθέτουμε στην δεύτερη.
- (β) προσθέτουμε την πρώτη εξίσωση στην τρίτη.

Το αποτέλεσμα είναι το ισοδύναμο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned}2x + y + z &= 5 \\-8y + z &= -6 \\16y + 2z &= 20\end{aligned}$$

Ο συντελεστής 2 που πολλαπλασιάζει τον πρώτο άγνωστο x στην πρώτη εξίσωση ονομάζεται **πρώτος οδηγός**. Στο επόμενο βήμα της μεθόδου της απαλοιφής αγνοούμε την πρώτη εξίσωση και εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία στις άλλες δύο εξισώσεις που περιέχουν τους αγνώστους y και z με σκοπό να απαλείψουμε τον άγνωστο y . Έτσι

Γραμμικά συστήματα

(γ) πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί 2 και την προσθέτουμε στην τρίτη.

Το αποτέλεσμα είναι το ισοδύναμο απλοποιημένο σύστημα εξισώσεων:

$$2x + y + z = 5$$

$$-8y + z = -6$$

$$4z = 8$$

Η λύση τώρα του τελευταίου αυτού συστήματος, στο οποίο καταλήξαμε, είναι πολύ απλή. Από την τελευταία εξίσωση άμεσα προκύπτει ότι $z = 2$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε ότι $y = 1$. Τέλος αντικαθιστώντας τις τιμές των y και z στην πρώτη εξίσωση λαμβάνουμε ότι $x = 1$.

Γραμμικά συστήματα

► Παράδειγμα 3.1. Έστω το σύστημα:

$$x + y + z + w = 6$$

$$2x + 2y + 3z + 3w = 15$$

$$4x + 6y + 8z + 2w = 34$$

$$x + 2y + 2z + 2w = 11$$

Γραμμικά συστήματα

► Παράδειγμα 3.2. Έστω το σύστημα:

$$x + y + z = a$$

$$2x + 2y + 5z = b$$

$$4x + 4y + 8z = c$$

Συμβολική γραφή γραμμικών συστημάτων

γραμμικό σύστημα	επαιζημένος πίνακας
$\begin{aligned}x + y + z + w &= 6 \\ 2x + 2y + 3z + 3w &= 15 \\ 4x + 6y + 8z + 2w &= 34 \\ x + 2y + 2z + 2w &= 11\end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 15 \\ 4 & 6 & 8 & 2 & 34 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 11 \end{bmatrix}$
$\begin{aligned}x + y + z &= a \\ 2x + 2y + 5z &= b \\ 4x + 4y + 8z &= c\end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 5 & b \\ 4 & 4 & 8 & c \end{bmatrix}$

Απαλοιφή με τον επαυξημένο πίνακα

γραμμικό σύστημα	επαυξημένος πίνακας
$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ 4x - 6y + 3z &= 4 \\ -2x + 15y + z &= 15 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 3 & 4 \\ -2 & 15 & 1 & 15 \end{bmatrix}$
πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί -2 και την προσθέτουμε στην δεύτερη:	πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή επί -2 και την προσθέτουμε στην δεύτερη:
$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ -8y + z &= -6 \\ -2x + 15y + z &= 15 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & 1 & -6 \\ -2 & 15 & 1 & 15 \end{bmatrix}$
προσθέτουμε την πρώτη εξίσωση στην τρίτη:	προσθέτουμε την πρώτη γραμμή στην τρίτη:
$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ -8y + z &= -6 \\ 16y + 2z &= 20 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 16 & 2 & 20 \end{bmatrix}$

Απαλοιφή με τον επαυξημένο πίνακα

πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί 2 και την προσθέτουμε στην τρίτη:	πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή επί 2 και την προσθέτουμε στην τρίτη:
$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ -8y + z &= -6 \\ 4z &= 8 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$
πολλαπλασιάζουμε την τρίτη εξίσωση επί 1/4:	πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή επί 1/4:
$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ -8y + z &= -6 \\ z &= 2 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
πολλαπλασιάζουμε την τρίτη εξίσωση επί -1 και την προσθέτουμε στην δεύτερη:	πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή επί -1 και την προσθέτουμε στην δεύτερη:
$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ -8y &= -8 \\ z &= 2 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Απαλοιφή με τον επαυξημένο πίνακα

πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί $-1/8$:	πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή επί $-1/8$:
$\begin{array}{rcl} 2x + y + z & = & 5 \\ y & = & 1 \\ z & = & 2 \end{array}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
πολλαπλασιάζουμε την τρίτη εξίσωση επί -1 και την προσθέτουμε στην πρώτη:	πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή επί -1 και την προσθέτουμε στην πρώτη:
$\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 3 \\ y & = & 1 \\ z & = & 2 \end{array}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Απαλοιφή με τον επαυξημένο πίνακα

πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί -1 και την προσθέτουμε στην πρώτη:	πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή επί -1 και την προσθέτουμε στην πρώτη:
$\begin{array}{rcl} 2x & & = 2 \\ y & & = 1 \\ z & & = 2 \end{array}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί 1/2:	πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή επί 1/2:
$\begin{array}{rcl} x & & = 1 \\ y & & = 1 \\ z & & = 2 \end{array}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Απαλοιφή με τον επαυξημένο πίνακα

► **Παράδειγμα 5.1.** Έστω ότι επιθυμούμε να λύσουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$x + 2y - 2z = 8$$

$$2x - 3y + z = -1$$

$$3x - 8y + 3z = -8$$

Απαλοιφή με τον επαυξημένο πίνακα

γραμμικό σύστημα	επαυξημένος πίνακας
$\begin{aligned}x + 2y - 2z &= 8 \\2x - 3y + z &= -1 \\3x - 8y + 3z &= -8\end{aligned}$	$\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 8 \\2 & -3 & 1 & -1 \\3 & -8 & 3 & -8\end{bmatrix}$
πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί -2 και την προσθέτουμε στην δεύτερη:	πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή επί -2 και την προσθέτουμε στην δεύτερη:
$\begin{aligned}x + 2y - 2z &= 8 \\-7y + 5z &= -17 \\3x - 8y + 3z &= -8\end{aligned}$	$\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 8 \\0 & -7 & 5 & -17 \\3 & -8 & 3 & -8\end{bmatrix}$
πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί -3 και την προσθέτουμε στην τρίτη:	πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή επί -3 και την προσθέτουμε στην τρίτη:
$\begin{aligned}x + 2y - 2z &= 8 \\-7y + 5z &= -17 \\-14y + 9z &= -32\end{aligned}$	$\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 8 \\0 & -7 & 5 & -17 \\0 & -14 & 9 & -32\end{bmatrix}$

Απαλοιφή με τον επαυξημένο πίνακα

πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί -2 και την προσθέτουμε στην τρίτη:	πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή επί -2 και την προσθέτουμε στην τρίτη:
$\begin{aligned}x + 2y - 2z &= 8 \\ -7y + 5z &= -17 \\ -z &= 2\end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
πολλαπλασιάζουμε την τρίτη εξίσωση επί -1:	πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή επί -1:
$\begin{aligned}x + 2y - 2z &= 8 \\ -7y + 5z &= -17 \\ z &= -2\end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
πολλαπλασιάζουμε την τρίτη εξίσωση επί -5 και την προσθέτουμε στην δεύτερη:	πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή επί -5 και την προσθέτουμε στην δεύτερη:
$\begin{aligned}x + 2y - 2z &= 8 \\ -7y &= -7 \\ z &= -2\end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Απαλοιφή με τον επαυξημένο πίνακα

πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί $-1/7$	πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή επί $-1/7$
$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 8 \\ y &= 1 \\ z &= -2 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
πολλαπλασιάζουμε την τρίτη εξίσωση επί 2 και την προσθέτουμε στην πρώτη	πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή επί 2 και την προσθέτουμε στην πρώτη
$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ y &= 1 \\ z &= -2 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί -2 και την προσθέτουμε στην πρώτη	πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή επί -2 και την προσθέτουμε στην πρώτη
$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \\ z &= -2 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Πίνακες

Πίνακας ονομάζεται κάθε ορθογώνια διάταξη $n \times m$ αριθμών (πραγματικών ή μιγαδικών) της μορφής

$$A_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

όπου n είναι το πλήθος των γραμμών του πίνακα και m το πλήθος των στηλών του. Ένας επίσης δόκιμος συμβολισμός για τον παραπάνω πίνακα είναι και ο $[a_{ij}]_{n \times m}$.

Το ζεύγος των δεικτών (n, m) ονομάζεται **μέγεθος** του πίνακα και ο αντίστοιχος πίνακας καλείται $n \times m$ πίνακας. Αν παραστήσουμε με F το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ή το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, τότε θα συμβολίζουμε με $F^{n \times m}$ το σύνολο όλων των $n \times m$ πινάκων με στοιχεία από το F .

Πίνακες

Δύο πίνακες A και B καλούνται **ίσοι** αν είναι του αυτού μεγέθους και $a_{ij} = b_{ij}$ για κάθε ζεύγος δεικτών (i, j) .

Αν ο αριθμός των γραμμών ενός πίνακα είναι ίσος με τον αριθμό των στηλών του, τότε ο πίνακας ονομάζεται **τετραγωνικός**. Έτσι ο πίνακας

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας ή ένας τετραγωνικός πίνακας μεγέθους n .

Πίνακες

Αν ο A είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας, τότε τα στοιχεία a_{ii} , $i = 1, \dots, n$ αποτελούν την **πρωτεύουσα** ή **κύρια διαγώνιο** του πίνακα και ονομάζονται **διαγώνια στοιχεία** του πίνακα. Το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων ονομάζεται **ίχνος** του πίνακα και συμβολίζεται με $tr(A)$. Έτσι στον παρακάτω τετραγωνικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{a}_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \textcolor{red}{a}_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \textcolor{red}{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

έχουμε $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Τα στοιχεία $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ αποτελούν την **δευτερεύουσα διαγώνιο** του πίνακα. Διευκρινίζουμε ότι όταν αναφερόμαστε γενικά σε διαγώνιο εννοούμε πάντοτε την κύρια διαγώνιο.

Πίνακες

Ένας τετραγωνικός πίνακας ονομάζεται **διαγώνιος** αν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \neq j$, δηλαδή ο παρακάτω $n \times n$ πίνακας είναι διαγώνιος:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Όταν τα διαγώνια στοιχεία ενός διαγώνιου πίνακα είναι όλα ίσα με την μονάδα, τότε αυτός ονομάζεται **μοναδιαίος**. Ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας συμβολίζεται με I_n . Έτσι ο είναι ο μοναδιαίος 3×3 πίνακας είναι ο:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πίνακες

Ένας τετραγωνικός πίνακας ονομάζεται **τριγωνικός άνω** αν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας ονομάζεται **τριγωνικός κάτω** αν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i < j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Πίνακες

Ένας πίνακας $n \times 1$, δηλαδή ένας πίνακας που έχει μόνον μία στήλη, ονομάζεται **πίνακας-στήλη**,

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

ενώ ένας πίνακας $1 \times m$ δηλαδή ένας πίνακας που έχει μόνον μία γραμμή, ονομάζεται **πίνακας-γραμμή**

$$[a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_m]$$

Πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Τότε ο $m \times n$ πίνακας B που ορίζεται θέτοντας $b_{ij} = a_{ji}$ για κάθε ζεύγος (i, j) ονομάζεται **ανάστροφος** του A και συμβολίζεται με A^t . Έτσι έχουμε:

$$B = A^t = \begin{bmatrix} b_{11}(=a_{11}) & b_{12}(=a_{21}) & \dots & b_{1n}(=a_{n1}) \\ b_{21}(=a_{12}) & b_{22}(=a_{22}) & \dots & b_{2n}(=a_{n2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}(=a_{1m}) & b_{m2}(=a_{2m}) & \dots & b_{mn}(=a_{nm}) \end{bmatrix}$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **συμμετρικός** αν $A = A^t$. Δηλαδή σε ένα συμμετρικό πίνακα, τα «συμμετρικά» ως προς την διαγώνιο στοιχεία του είναι ίσα.

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **αντισυμμετρικός** αν $A^t = -A$. Δηλαδή σε έναν αντισυμμετρικό πίνακα, τα στοιχεία της διαγωνίου είναι 0 και τα «συμμετρικά» ως προς την διαγώνιο στοιχεία είναι αντίθετα.

Πίνακες

Παραδείγματα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Πίνακες

► **Άσκηση 6.1.** Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4-k & 7 \\ k & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί το k ώστε ο πίνακας A να είναι συμμετρικός.

► **Άσκηση 6.2.** Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -8 & -6 \\ 8 & k^2 - 4 & k + 4 \\ 6 & -3k & 0 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί το k ώστε ο πίνακας A να είναι αντισυμμετρικός.

Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός και Άθροισμα Πινάκων

Av

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

είναι ένας $n \times m$ πίνακας με στοιχεία από το F (το σύνολο των πραγματικών ή των μιγαδικών αριθμών) και $\lambda \in F$ τότε ορίζουμε τον πίνακα λA ως εξής:

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nm} \end{bmatrix}$$

Το γινόμενο αυτό ονομάζεται **βαθμωτό γινόμενο** του λ με τον A . Δηλαδή το βαθμωτό

Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός και Άθροισμα Πινάκων

Αν

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

είναι δύο πίνακες του ίδιου μεγέθους, τότε το **άθροισμα** $A + B$ των δύο αυτών πινάκων είναι ένας νέος πίνακας, που προκύπτει αν αθροίσουμε τα στοιχεία του A με τα αντίστοιχα στοιχεία του B , δηλαδή:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}$$

Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός και Άθροισμα Πινάκων

Ο πίνακας μεγέθους $n \times m$, ο οποίος έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με το 0 καλείται **μηδενικός πίνακας** και συμβολίζεται με $O_{n \times m}$ ή απλά O όταν το μέγεθος του πίνακα εννοείται. Έτσι οι πίνακες:

Αν A είναι ένας $n \times m$ πίνακας, τότε ορίζουμε τον **αντίθετο** του A ως τον πίνακα που φτιάχνεται αν αντικαταστήσουμε κάθε στοιχείο του A με το αντίθετό του. Έτσι αν

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

τότε

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1m} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nm} \end{bmatrix}$$

Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός και Άθροισμα Πινάκων

Θεώρημα 7.1. Αν οι A, B, C είναι πίνακες του ίδιου μεγέθους $n \times m$, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- i.* $(A + B) + C = A + (B + C)$ (προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης)
- ii.* $A + O_{n \times m} = O_{n \times m} + A = A$ (ύπαρξη μηδενικού στοιχείου)
- iii.* $A + (-A) = (-A) + A = O_{n \times m}$ (ύπαρξη αντιθέτου στοιχείου)
- iv.* $A + B = B + A$ (αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης)

Θεώρημα 7.2. Αν $A \in F^{n \times m}$ και $\kappa, \lambda \in F$, τότε:

- i.* $(\kappa\lambda)A = \kappa(\lambda A)$
- ii.* $(\kappa + \lambda)A = \kappa A + \lambda A$ (επιμεριστική ιδιότητα)
- iii.* $\kappa(A + B) = \kappa A + \kappa B$ (επιμεριστική ιδιότητα)

Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός και Άθροισμα Πινάκων

Πρόταση 7.1. Αν οι $A, B \in F^{n \times m}$ και $\lambda \in F$, τότε:

i. $-(-A) = A$

ii. $-(A + B) = (-A) + (-B)$

iii. $OA = O_{n \times m}$

iv. $\lambda O_{n \times m} = O_{n \times m}$

v. $(-\lambda)A = -(\lambda A) = \lambda(-A)$

Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός και Άθροισμα Πινάκων

► Παράδειγμα 7.3. Έστω οι πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A + 2B - 3C =$$

$$2(3A - 4B) - (2C + A - 5B) - 3(2A - 3B + 3C) =$$

Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός και Άθροισμα Πινάκων

Πρόταση 7.2. Έστω ότι A, B είναι δύο πίνακες του ίδιου μεγέθους και $\lambda \in F$, τότε:

i. $(A + B)^t = A^t + B^t$

ii. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

Πρόταση 7.3. Έστω ότι A, B είναι δύο $n \times n$ τετραγωνικοί πίνακες και $\lambda \in F$, τότε:

i. αν οι A, B είναι συμμετρικοί, τότε οι πίνακες $A + B$ και λA είναι επίσης συμμετρικοί.

ii. αν οι A, B είναι αντισυμμετρικοί, τότε οι πίνακες $A + B$ και λA είναι επίσης αντισυμμετρικοί.

iii. αν οι A, B είναι άνω τριγωνικοί, τότε οι πίνακες $A + B$ και λA είναι επίσης άνω τριγωνικοί.

αν οι A, B είναι κάτω τριγωνικοί, τότε οι πίνακες $A + B$ και λA είναι επίσης κάτω τριγωνικοί.

Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός και Άθροισμα Πινάκων

Σε όλες περιπτώσεις επιτρέπεται να εκτελεστούν οι πράξεις:

i. $[3 \ -5] + [-3 \ 5 \ 0]$

ii. $[1 \ 3 \ -5] + [2 \ -1 \ 7] + [3 \ 2 \ 2]$

iii. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

iv. $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 5 & -3 & 8 \\ 3 & 4 & -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -7 & 4 & -3 \\ 2 & -6 & 1 \end{bmatrix} +$
 $+ 2 \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

v. $3 \left(\begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 9 & -2 & 0 \end{bmatrix} \right)$

vi. $2 \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$

vii. $\frac{3}{5} \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 9 \end{bmatrix} + \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Να βρεθούν οι αριθμοί x, y, z, w , που επαληθεύουν την ισότητα:

$$\begin{bmatrix} 2x & -y \\ 3z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ z+w & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & x+y \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πίνακες A και B θα πρέπει το πλήθος των στηλών του A να είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του B . Δηλαδή αν ο A είναι ένας $n \times m$ πίνακας, τότε ο B θα πρέπει να είναι ένας $m \times k$ πίνακας, για να ορίζεται το γινόμενο AB :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mk} \end{bmatrix}$$

Το αποτέλεσμα του γινομένου είναι ένας $n \times k$ πίνακας $C = AB$, με στοιχεία:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}.$$

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} = \underbrace{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1m}b_{m1}}_{\text{1η γραμμή A} \times \text{1η στήλη B}} & c_{12} = \underbrace{a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1m}b_{m2}}_{\text{1η γραμμή A} \times \text{2η στήλη B}} & \dots & c_{1k} = \underbrace{a_{11}b_{1k} + a_{12}b_{2k} + \dots + a_{1m}b_{mk}}_{\text{1η γραμμή A} \times \text{k στήλη B}} \\ c_{21} = \underbrace{a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2m}b_{m1}}_{\text{2η γραμμή A} \times \text{1η στήλη B}} & c_{22} = \underbrace{a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2m}b_{m2}}_{\text{2η γραμμή A} \times \text{2η στήλη B}} & \dots & c_{2k} = \underbrace{a_{21}b_{1k} + a_{22}b_{2k} + \dots + a_{2m}b_{mk}}_{\text{2η γραμμή A} \times \text{k στήλη B}} \\ c_{31} = \underbrace{a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + \dots + a_{3m}b_{m1}}_{\text{3η γραμμή A} \times \text{1η στήλη B}} & c_{32} = \underbrace{a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + \dots + a_{3m}b_{m2}}_{\text{3η γραμμή A} \times \text{2η στήλη B}} & \dots & c_{3k} = \underbrace{a_{31}b_{1k} + a_{32}b_{2k} + \dots + a_{3m}b_{mk}}_{\text{3η γραμμή A} \times \text{k στήλη B}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{n1} = \underbrace{a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots + a_{nm}b_{m1}}_{\text{n γραμμή A} \times \text{1η στήλη B}} & c_{n2} = \underbrace{a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \dots + a_{nm}b_{m2}}_{\text{n γραμμή A} \times \text{2η στήλη B}} & \dots & c_{nk} = \underbrace{a_{n1}b_{1k} + a_{n2}b_{2k} + \dots + a_{nm}b_{mk}}_{\text{n γραμμή A} \times \text{k στήλη B}} \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} =$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} =$$

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} =$$

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$AB =$$

$$BA =$$

Ιδιότητες του Πολλαπλασιασμού των Πινάκων

πολλαπλασιασμός των πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικός

Ορισμός 8.1. Έστω A, B δύο $n \times n$ τετραγωνικοί πίνακες. Θα λέμε ότι οι πίνακες A, B μετατίθενται (ή αντιμετατίθενται) αν $AB = BA$.

► **Άσκηση 8.2.** Να βρεθούν όλοι οι πίνακες οι οποίοι μετατίθενται με τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες του Πολλαπλασιασμού των Πινάκων

Θεώρημα 9.1. Αν για τους πίνακες A, B, C ορίζονται οι σημειούμενες πράξεις, τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

i. $(AB)C = A(BC)$

(προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού)

ii. $A(B + C) = AB + AC$

(επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση από αριστερά)

iii. $(B + C)A = BA + CA$

(επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση από δεξιά)

Ιδιότητες του Πολλαπλασιασμού των Πινάκων

► **Παράδειγμα 9.1.** Ας θεωρήσουμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες του Πολλαπλασιασμού των Πινάκων

Θεώρημα 9.2. Έστω ότι A και B είναι δύο $n \times n$ τετραγωνικοί πίνακες, τότε:

- i.* αν οι A και B είναι διαγώνιοι, το γινόμενο τους AB είναι επίσης διαγώνιος πίνακας.
- ii.* αν οι A και B είναι άνω τριγωνικοί, το γινόμενο τους AB είναι επίσης άνω τριγωνικός πίνακας.
- iii.* αν οι A και B είναι κάτω τριγωνικοί, το γινόμενο τους AB είναι επίσης κάτω τριγωνικός πίνακας.

Πρόταση 9.1. Αν A είναι ένας $n \times m$ πίνακας και $O_{r \times n}$, $O_{m \times k}$ οι $r \times n$ και $m \times k$ μηδενικοί πίνακες αντίστοιχα, τότε:

$$O_{r \times n} A = O_{r \times m} \quad \text{και} \quad A O_{m \times k} = O_{n \times k}$$

Πρόταση 9.2. Αν A είναι ένας $n \times m$ πίνακας και I_n , I_m οι μοναδιαίοι πίνακες μεγέθους n και m αντίστοιχα, τότε:

$$I_n A = A \quad \text{και} \quad A I_m = A$$

Ιδιότητες του Πολλαπλασιασμού των Πινάκων

Ορισμός 9.1. Έστω ο τετραγωνικός πίνακας A και έστω ότι υπάρχει ένας πίνακας B τέτοιος ώστε

$$AB = BA = I$$

Τότε ο A ονομάζεται **αντιστρέψιμος** ή **ομαλός**. Ο πίνακας B ονομάζεται **αντίστροφος** του A και συμβολίζεται με A^{-1} .

Ιδιότητες του Πολλαπλασιασμού των Πινάκων

► Παράδειγμα 9.8. Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

δεν έχει αντίστροφο. Πράγματι, έστω τυχόν 2×2 πίνακας:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες του Πολλαπλασιασμού των Πινάκων

Θεώρημα 9.3. Αν ένας πίνακας A έχει αντίστροφο, τότε αυτός είναι μονοσήμαντα ορισμένος.

Θεώρημα 9.4. Αν οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι του ιδίου μεγέθους, τότε το γινόμενο τους AB είναι αντιστρέψιμος πίνακας και μάλιστα:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Θεώρημα 9.5. Αν οι πίνακες $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ και $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ είναι δύο τετραγωνικοί πίνακες του ιδίου μεγέθους, τότε ο ανάστροφος του γινομένου τους $C = AB = [c_{ij}]_{n \times n}$ είναι ίσος με το γινόμενο $B^t A^t$, δηλαδή ισχύει:

$$(AB)^t = B^t A^t$$

Ιδιότητες του Πολλαπλασιασμού των Πινάκων

Θεώρημα 9.6. Αν ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο ανάστροφός του είναι επίσης αντιστρέψιμος, και μάλιστα:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

Ορισμός 9.2. Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας. Τότε ορίζουμε:

$$A^0 = I \quad \text{και} \quad A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ παράγοντες}} \quad (n > 0)$$

Επιπλέον αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \dots \cdot A^{-1}}_{n \text{ παράγοντες}} \quad (n > 0)$$

Ιδιότητες του Πολλαπλασιασμού των Πινάκων

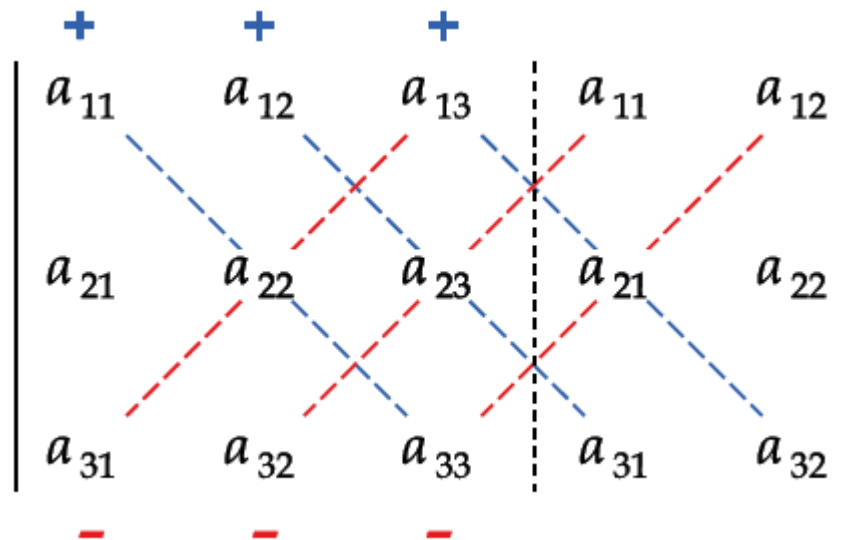
Πρόταση 9.3. Αν A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας και n, m φυσικοί αριθμοί, τότε:

i. $A^n A^m = A^{n+m}$

ii. $(A^n)^m = A^{nm}$

Ορίζουσες

$$D\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$



Ορίζουσες

Οι ορίζουσες ανώτερης τάξης ορίζονται ως εξής: Έστω A ένας πίνακας από το σύνολο $F^{n \times n}$ των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων. Θεωρούμε τον πίνακα που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την j στήλη. Ο πίνακας αυτός έχει $n-1$ γραμμές και $n-1$ στήλες. Αν συμβολίσουμε με A_j την ορίζουσα του πίνακα αυτού, τότε η ορίζουσα του A ορίζεται ως εξής:

$$\det A = a_{11}A_1 - a_{12}A_2 + a_{13}A_3 - \dots + (-1)^{n+1} a_{1n}A_n$$

Ορίζουσες

Θεώρημα 11.1. Η ορίζουσα ενός άνω ή κάτω τριγωνικού πίνακα (τριγωνική ορίζουσα) ή ενός διαγωνίου πίνακα, ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου.

Θεώρημα 11.2. Ένας τετραγωνικός πίνακας A και ο ανάστροφός του A^t έχουν την ίδια ορίζουσα, δηλαδή

$$\det(A) = \det(A^t)$$

Ορίζουσες

Θεώρημα 11.3. Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν

$$\det(A) \neq 0$$

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$